

本文書は 2009 年度前期の宇宙理学専攻講義「惑星気象学特論 I」のベナール対流に関するレクチャーノートである。一大学院生がメモ書き同然に書き上げたものであるので、性悪説の立場に立って(誤りや計算ミスがあることを前提として)読まれることを強く推奨する。

## 1 対流とは

静力学的に不安定な流体中において、その不安定を解消するように発現する現象のことを指す<sup>1)</sup>。熱輸送の観点で言うと、流体の運動によって熱が運ばれることを指す。対流の身近な典型例として、積乱雲、日本海の筋状雲、味噌汁のセルパターンなどが挙げられる。

## 2 対流研究の始まり

実験的研究としては Thomson(1882), Benard(1900), 理論的研究としては Rayleigh(1916) が挙げられる。

### 2.1 Benard の研究

Benard の実験の概要

- 厚さ数 mm の薄い流体層の上面と下面の温度をそれぞれ一定に保つ。
- 下面の温度を上げていき、上下の面での温度差が臨界値に達すると規則的な六角形状の対流構造が発生することを発見<sup>2),3)</sup>。
- 対流のセルの中心は上昇域となっており、セルの境界部で下降域となっていることを発見。

<sup>1)</sup>静力学的に不安定であるとは、静的安定度  $N^2 = -\rho_B^{-1}\partial\rho_B/\partial z$  が負である状態のことを指す。Boussinesq 流体の場合、温度勾配が負の状態と等価である。

<sup>2)</sup>Benard は作業流体として溶かした蠟やパラフィンを、可視化物質としてグラファイトやアルミニウム粉を用いた。

<sup>3)</sup>その後の実験的研究により、対流セルの形状は六角形とは限らずに縞状・同心円状・長方形のものも生じることが分かっている。

## 2.2 Rayleigh の研究

Rayleigh の理論の概要

- 線形論に基づき, 粘性流体中において対流が発生する為の条件を検証した.
- Rayleigh 数が臨界値を超えると対流が生じることを発見した.

## 3 Rayleigh - Benard 問題

以下では Rayleigh(1916) に従って対流の発生条件について考察する.

### 3.1 仮定

問題を単純化する為に, 以下の仮定を置く.

- 作業流体は Boussinesq 流体とみなせる.
- 水平 1 次元, 鉛直 1 次元の 2 次元運動を考える.
- 外力として重力のみを考慮する.
- 動粘性係数, 熱拡散係数, 体積膨張率は一定とみなせる.
- 解の振幅は無限小であり, 非線形項を無視できる.
- 基本場は水平一様で静水圧平衡の状態にあり, かつ静止状態にある.
- 流体中において相変化は生じないものとする.

Boussinesq 流体とは浮力項以外での密度の時間的・空間的变化を無視できる流体のことである. 従って, Benard の実験で扱う薄い液体の流体層を Boussinesq 流体で記述するのは精度良い近似であると考えられる.

### 3.2 系の設定と Boussinesq 方程式系

後の議論の便宜上、有次元量には \* を付すこととする。

水平方向に無限に広がっている厚さ  $D$  の流体層を考える。流体層の上面と下面の温度はそれぞれ  $T_* = T_0$ ,  $T_* = T_0 + \Delta T$  ( $\Delta T > 0$ ) に保たれているとする。

Boussinesq 方程式系を書き下すと、以下のようなになる<sup>4)</sup>。

$$\frac{\partial u_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + w_* \frac{\partial u_*}{\partial z_*} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_*}{\partial x_*} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 u_*}{\partial z_*^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial w_*}{\partial t_*} + w_* \frac{\partial w_*}{\partial x_*} + w_* \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_*}{\partial z_*} - g[1 - \alpha(T_* - T_0)] + \nu \left( \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 w_*}{\partial z_*^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial T_*}{\partial x_*} + w_* \frac{\partial T_*}{\partial z_*} = \kappa \left( \frac{\partial^2 T_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 T_*}{\partial z_*^2} \right). \quad (4)$$

ここで  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $\kappa$  はそれぞれ動粘性係数, 体積膨張率, 熱拡散係数である。前回の内部重力波の議論で無視していた粘性力 (散逸) を考慮する。

### 3.3 境界条件

系の設定で述べたように、上下それぞれの面で温度は一定に保たれているので、

$$T_* = T_0, \quad (z_* = D) \quad (5)$$

$$T_* = T_0 + \Delta T \quad (z_* = 0) \quad (6)$$

となる。また上下の面において流体が境界の外に侵入することはないので、

$$w_* = 0 \quad (z_* = 0, D) \quad (7)$$

である。

Benard の実験では下面を固体壁, 上面を自由表面としていた。従って Benard の実験を念頭に置いて境界条件を適用するならば、下面に滑りなし条件, 上面に応力なし条

<sup>4)</sup>Boussinesq 方程式系における状態方程式は非圧縮流体と同様に

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)]$$

と表される。

件を適用すべきである. しかし下面に滑りなし条件, 上面に応力なし条件を適用すると, 対流発生の条件を解析的に求めるのが困難である<sup>5)</sup>. そこで Rayleigh(1916)と同様に両面に応力なし条件, 即ち

$$\frac{\partial^2 w_*}{\partial z_*^2} = 0 \quad (z_* = 0, D) \quad (8)$$

を適用することとする<sup>6)</sup>. (8) を適用することで解析解が容易に得られ, Benard の対流に関していくつかの知見を得ることが出来る.

### 3.4 方程式の線形化

各物理量が基本場成分と擾乱成分の和で書けるとする. 基本場成分には下付きで  $B$  と付し, 擾乱成分には上付きで  $'$  を付すことにすると,

$$u_* = u'_*, \quad (9)$$

$$w_* = w'_*, \quad (10)$$

$$T_* = T_{*B} + T'_*, \quad (11)$$

$$p_* = p_{*B} + p'_* \quad (12)$$

と表される. 以下の条件を満たす基本場について考える<sup>7)</sup>.

$$\frac{\partial p_{*B}}{\partial x_*} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial p_{*B}}{\partial z_*} = -\rho_0 g, \quad (14)$$

$$T_{*B} = T_0 + \Delta T - \frac{\Delta T}{D} z_*. \quad (15)$$

<sup>5)</sup> 下面に滑りなし条件, 上面に応力なし条件を適用した場合の計算は Low(1929), Pellew and Southwell(1940), Reid and Harris(1958) によって行なわれている.

<sup>6)</sup> (8) の導出について簡潔に述べる. 境界においてせん断応力  $\tau_{xz}$  が働かないことから

$$\tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u_*}{\partial z_*} + \frac{\partial w_*}{\partial x_*} \right) = \mu \frac{\partial u_*}{\partial z_*}.$$

但し境界で  $w = 0$  となることを用いた. 更に (3) を  $z_*$  で微分することにより,

$$\frac{\partial}{\partial x_*} \left( \frac{\partial u_*}{\partial z_*} \right) + \frac{\partial^2 w_*}{\partial z_*^2} = \frac{\partial^2 w_*}{\partial z_*^2} = 0$$

が得られる.

<sup>7)</sup> 基本場の温度分布が 1 次関数で記述される理由について述べる. 解が方程式系を満たす為には, 擾乱成分だけでなく基本場成分も方程式系を満足する必要がある. 従って基本場が  $z$  のみの関数であることに注意すると, (4) より

$$\frac{\partial^2 T_{*B}}{\partial z^2} = 0$$

となる. 上式を 2 度積分することにより,  $T_{*B}(z)$  は 1 次関数として記述されることが分かる.

(9), (10), (11), (12), (13), (14), (15) を Boussinesq 方程式系 (1), (2), (3), (4) に代入し、擾乱成分の 2 次の項を無視すると、

$$\frac{\partial u'_*}{\partial t_*} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'_*}{\partial x_*} + \nu \left( \frac{\partial^2 u'_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 u'_*}{\partial z_*^2} \right), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'_*}{\partial t_*} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'_*}{\partial z_*} + g\alpha \left[ \Delta T \left( 1 - \frac{z_*}{D} \right) + T'_* \right] \\ &\quad + \nu \left( \frac{\partial^2 w'_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 w'_*}{\partial z_*^2} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{\partial u'_*}{\partial x_*} + \frac{\partial w'_*}{\partial z_*} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial T'_*}{\partial t_*} - \frac{\Delta T}{D} w'_* = \kappa \left( \frac{\partial^2 T'_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 T'_*}{\partial z_*^2} \right). \quad (19)$$

となる。

### 3.5 方程式と境界条件の無次元化

各変数を以下のようにスケーリングする<sup>8)</sup>。

$$(x_*, z_*) = D(x, z), \quad (20)$$

$$t_* = \frac{D^2}{\kappa} t, \quad (21)$$

$$(u'_*, w'_*) = \frac{\kappa}{D} (u', w'), \quad (22)$$

$$T'_* = \Delta T T', \quad (23)$$

$$p'_* = \frac{\nu \kappa \rho_0}{D^2} p'. \quad (24)$$

このとき (16), (17), (18), (19) は以下のように無次元化される。

$$\frac{\kappa}{\nu} \frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}, \quad (25)$$

$$\frac{\kappa}{\nu} \frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{g\alpha D^3 \Delta T}{\nu \kappa} (1 - z + T') + \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} - w' = \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \quad (28)$$

<sup>8)</sup>時間  $t_*$  に関して、動粘性係数を用いて  $t_* = D^2 t / \nu$  と無次元化する流儀もある。このように無次元化しても最終的な結果に変わりはない。

となる. ここで

$$Pr \equiv \frac{\nu}{\kappa}, \quad (29)$$

$$Ra \equiv \frac{g\alpha D^3 \Delta T}{\nu\kappa} \quad (30)$$

と置くと, (25), (26), (27), (28) は

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}, \quad (31)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + Ra(1-z+T') + \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (33)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} - w' = \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \quad (34)$$

となる.  $Pr$  は Prandtl 数と呼ばれる無次元量であり, 熱拡散係数に対する動粘性係数の比となっている. 一方  $Ra$  は Rayleigh 数と呼ばれる無次元量であり, 粘性力の大きさに対する浮力の大きさの比を表している. Benard の実験において下面の温度を上げていくことは  $Ra$  を上げていくことに対応する.

境界条件 (5), (6), (7), (8) を無次元化すると,

$$T' = 0, \quad (z = 0, 1) \quad (35)$$

$$w' = 0, \quad (z = 0, 1) \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} = 0 \quad (z = 0, 1) \quad (37)$$

となる.

以下, (31), (32), (33), (34) に (5), (6), (7), (8) を適用して対流が発生する為の条件を求める. ここで流線関数  $\psi$  を導入し,

$$u' = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (38)$$

$$w' = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (39)$$

と表すと, (33) は自動的に満たされる. (38), (39) を (31), (32), (34) に代入して  $u'$ ,  $w'$  を消去すると,

$$-\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x} - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (40)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial z} + Ra(1-z+T') + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (41)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T' \quad (42)$$

となる。(40) を  $z$  で微分したものと (41) を  $x$  で微分したものの差をとると,

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \psi + Ra \frac{\partial T'}{\partial x} \quad (43)$$

となる。(43) を  $x$  で微分したものに (42) を代入して  $\psi$  を消去すると,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T' - \left( 1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 T' \\ & + \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^3 - Ra \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] T' = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

となる。(34) を用いて (35), (36), (37) を  $T'$  に関する境界条件に書き換えると,

$$T' = \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} = \frac{\partial^4 T'}{\partial z^4} = 0 \quad (z = 0, 1) \quad (45)$$

となる。(45) が満たされるためには

$$T' \propto \sin(n\pi z) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (46)$$

であれば良いことが分かる。そこで  $T'$  の解の形状を

$$T' = e^{ikx + \sigma t} \sin n\pi z \quad (47)$$

と仮定し, (44) に代入すると,

$$\frac{1}{Pr} (k^2 + n^2 \pi^2) \sigma^2 + \left( 1 + \frac{1}{Pr} \right) (k^2 + n^2 \pi^2)^2 \sigma + (k^2 + n^2 \pi^2)^3 - k^2 Ra = 0 \quad (48)$$

となる<sup>9)</sup>.  $\sigma > 0$  ならば不安定であり対流発生,  $\sigma < 0$  ならば安定,  $\sigma = 0$  ならば中立状態である。中立状態となるときの Rayleigh 数は (48) より

$$Ra = \frac{(k^2 + n^2 \pi^2)^3}{k^2} \quad (49)$$

となる。(49) は  $\Delta T$  を大きくしていき, 解 (47) が不安定になり始める  $Ra$  の値を表している。

以上では 1 つのモード ( $n$  番目のモード) についてのみ考えたが, これは特解に過ぎない。一般解を構成する為には, 全てのモードの重ね合わせを考える必要がある。(49) の示す通り, 中立状態となる  $Ra$  の値はそれぞれのモードで異なる。対流の発生の有無を支配するのは (49) が最小であるモード, 即ち  $n = 1$  のモードである。 $n = 1$  に対する中立曲線 (Rayleigh 曲線) は

$$Ra(k) = \frac{(k^2 + \pi^2)^3}{k^2} \quad (50)$$

<sup>9)</sup> 解の形状を (47) と仮定したことは, 対流セルの構造がロール状であることを仮定したことに相当する。

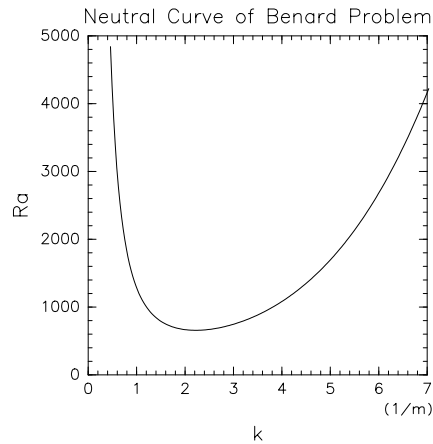


図 1: 上下両面に応力なし条件を適用した場合の Rayleigh 曲線. 横軸に  $k$ , 縦軸に  $Ra$  をとってある.

と表される. (50) より,  $k \rightarrow 0$  及び  $k \rightarrow \infty$  の極限において  $Ra \rightarrow \infty$  となることが分かる. 更に (50) の最小値  $Rc$  は臨界 Rayleigh 数を求めてみる. (50) を  $k$  で微分すると,

$$\frac{dRa}{dk} = \frac{2(k^2 + \pi^2)^2(2k^2 - \pi^2)}{k^3} \quad (51)$$

となる. 従って  $R = Rc$  となる  $k$  を  $k_c$  と表すと,

$$k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \simeq 2.22, \quad (52)$$

$$Rc = \frac{27\pi^4}{4} \simeq 657.5 \quad (53)$$

となる. 図 1 に Rayleigh 曲線を示す.

今回の計算では境界条件として上下両面に応力なし条件を適用した. 異なる境界条件を与えると,  $k_c, Rc$  も異なる値をとることが確かめられている (Low, 1929; Pellew and Southwell, 1940; Reid and Harris, 1958). 上下両面に滑りなし条件を適用した場合,  $k_c \simeq 3.12, Rc \simeq 1707.8$  となる. また下面に滑りなし条件, 上面に応力なし条件を適用する場合,  $k_c \simeq 2.68, Rc \simeq 1100.7$  となる. Silveston(1958) は上下両面を固体壁とした実験を行ない,  $Rc = 1700 \pm 51$  という値が得た<sup>10)</sup>. この実験結果は理論値と良く一致している.

<sup>10)</sup> 下面を固体壁, 上面を自由表面とする実験の  $Rc$  の値を調べた研究があるのか, 現在調査中である.



今回は対流セルの形状がロール状であると仮定して計算を行なった. Benard の実験で現れた六角形状の対流セルや三角形のものも理論上存在しうることが Christopherson(1940), Bisshopp(1960) によって確かめられている. しかし線形論の範囲内では対流セルの形状を一意に決めることが出来ない. 今回は2次元問題を取り扱ったので波数ベクトルの向きは問題にならなかったが, 3次元問題では波数ベクトルの向きを定めることが出来ない. セルの形状を議論する為には, 非線形理論に立ち入る必要がある.

また線形論の範囲内では中立状態 ( $\sigma = 0$ ) における解の振幅を決めることが出来ない. 定常解の振幅を決める為には, やはり非線形論に立ち入る必要がある.

## 4 弱非線形定常問題

ここまでは線形問題について考えてきたが, これより後は非線形の効果を考慮した定常問題について考える.

### 4.1 方程式系の無次元化

線形化する前の方程式系において

$$(x_*, z_*) = D(x, z), \quad (54)$$

$$t_* = \frac{D^2}{\kappa} t, \quad (55)$$

$$(u_*, w_*) = \frac{\kappa}{D} (u', w'), \quad (56)$$

$$T_* = \Delta T T', \quad (57)$$

$$p_* = \frac{\nu \kappa \rho_0}{D^2} p'. \quad (58)$$

とスケールリングすると,

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (59)$$

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + Ra \left( T - \frac{1}{\alpha \Delta T} - \frac{T_0}{\Delta T} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad (60)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (61)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (62)$$

となる.

## 4.2 摂動展開

線形論では各物理量を基本場成分 (0 次) と擾乱成分 (1 次) に分離したが, ここでは更に高次まで摂動展開して考える. 即ち

$$\psi(x, z, t) = \varepsilon\psi^{(1)}(x, z, t) + \varepsilon^2\psi^{(2)}(x, z, t) + \cdots, \quad (63)$$

$$T(x, z, t) = T_B(z) + \varepsilon T^{(1)}(x, z, t) + \varepsilon^2 T^{(2)}(x, z, t) + \cdots, \quad (64)$$

$$p(x, z, t) = p_B(z) + \varepsilon p^{(1)}(x, z, t) + \varepsilon^2 p^{(2)}(x, z, t) + \cdots, \quad (65)$$

$$Ra = Ra^{(0)} + \varepsilon Ra^{(1)} + \varepsilon^2 Ra^{(2)} + \cdots \quad (66)$$

と展開する. ここで  $\varepsilon$  は 1 に比べて十分小さいパラメータである<sup>11)</sup>. 摂動展開の式を方程式系に代入すると, それぞれの式は形式的に

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n F^{(n)} = 0 \quad (67)$$

と書ける. (67) が任意の  $\varepsilon$  に対して恒等的に成立する為には,

$$F^{(n)} = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots) \quad (68)$$

であれば良い. 低次のバランスから求めた低次の解を使って, より高次の解を求めていくのが弱非線形論の基本的な作戦である.

$O(\varepsilon)$  のバランスを考えると,

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial z^2}, \quad (69)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial t} = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial z} + Ra^{(0)} (1 - z + T^{(1)}) + \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial z^2}, \quad (70)$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(1)}}{\partial z} = 0, \quad (71)$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial t} - w^{(1)} = \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial z^2} \quad (72)$$

となる. これは線形化された方程式 (31), (32), (33), (34) に同一のものである.

<sup>11)</sup>  $\varepsilon$  が十分小さいと想定することは, 解が線形解に補正を加えたもので構成できる (非線形性が弱い) とみなすことに相当する.

$O(\varepsilon^2)$  のバランスを考えると,

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + u^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + w^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial z^2}, \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial w^{(2)}}{\partial t} + u^{(1)} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} + w^{(1)} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial z^2} \\ &+ Ra^{(2)}(1-z) + Ra^{(1)}T^{(1)} + Ra^{(0)}T^{(2)}, \end{aligned} \quad (74)$$

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z} = 0, \quad (75)$$

$$\frac{\partial T^{(2)}}{\partial t} - w^{(2)} + u^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial x} + w^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial z^2} \quad (76)$$

となる. より高次のバランスについても, 同様に書き下すことができる.

### 4.3 定常問題

問題を解く上で, 以下のことを想定する.

- $Ra = Rc$  の周りでの定常解について考える.
- $O(\varepsilon)$  のバランスまで考える.
- 1 次の解として最小のモードを想定する.
- 水平方向に周期的な解について考える.
- 境界条件として滑り無し条件を適用する.

定常状態における  $O(\varepsilon)$  のバランスの式は

$$0 = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial z^2}, \quad (77)$$

$$0 = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial z} + Ra^{(0)}(1-z+T^{(1)}) + \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial z^2}, \quad (78)$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(1)}}{\partial z} = 0, \quad (79)$$

$$-w^{(1)} = \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial z^2} \quad (80)$$

となる. 第 3 節の線形論の議論から

$$T^{(1)} = \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}x\right) \sin(\pi z), \quad (81)$$

$$u^{(1)} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi^2 \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}x\right) \cos(\pi z), \quad (82)$$

$$w^{(1)} = \frac{3}{2}\pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}x\right) \sin(\pi z), \quad (83)$$

$$\psi^{(1)} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}x\right) \sin(\pi z), \quad (84)$$

$$Ra^{(0)} = Rc \quad (85)$$

となる.

定常状態における  $O(\varepsilon^2)$  のバランスの式は

$$\frac{1}{Pr} \left( u^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + w^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial z^2}, \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \left( u^{(1)} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} + w^{(1)} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial z^2} \\ &+ Ra^{(2)}(1-z) + Ra^{(1)}T^{(1)} + Ra^{(0)}T^{(2)}, \end{aligned} \quad (87)$$

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z} = 0, \quad (88)$$

$$-w^{(2)} + u^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial x} + w^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial z^2} \quad (89)$$

となる. (88) より流線関数  $\psi^{(2)}$  を導入して

$$u^{(2)} = -\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial z}, \quad (90)$$

$$w^{(2)} = \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x} \quad (91)$$

と表すことが出来る. (86) を  $z$  で微分したものと (87) を  $x$  で微分したものの差をとると,

$$\begin{aligned} &Ra^{(0)} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial x} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \psi^{(2)} \\ &= -\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^{(1)} - Ra^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (92)$$

また (89) は以下のように書き換えられる.

$$-\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x} - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T^{(2)} = \left( \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) T^{(1)}. \quad (93)$$

(81), (84) を (92), (93) に代入すると,

$$Ra^{(0)} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial x} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \psi^{(2)} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} Ra^{(1)} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}x\right) \sin(\pi z), \quad (94)$$

$$\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T^{(2)} = \frac{3}{2} \pi^3 \sin(\pi z) \cos(\pi z) \quad (95)$$

となる. (95) を  $x$  で微分すると,

$$\frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial T^{(2)}}{\partial x} = 0 \quad (96)$$

となる. (94) に Laplacian を作用させたものに (96) を代入して  $T^{(2)}$  を消去すると,

$$-Ra^{(0)} \frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^3 \psi^{(2)} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \pi^3 Ra^{(1)} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}x\right) \sin(\pi z) \quad (97)$$

となる. (97) より  $\psi^{(2)}$  の解の形状は

$$\psi^{(2)} = A \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}x\right) \sin(\pi z) \quad (98)$$

という形で書けることが分かる. 但し  $A$  は比例係数である<sup>12)</sup>. (98) を (97) に代入すると,

$$Ra^{(1)} = 0 \quad (99)$$

が得られる. いま  $Ra$  を  $\varepsilon$  の 2 次の精度で近似すると

$$Ra \simeq Ra^{(0)} + \varepsilon Ra^{(1)} + \varepsilon^2 Ra^{(2)} \quad (100)$$

となる. (99) を (100) に適用し,  $\varepsilon$  について解くと,

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{Ra - Rc}{Ra^{(2)}}} \quad (101)$$

が得られる.  $\varepsilon$  は線形論における擾乱成分の振幅に対応するものであることに注意すると, 線形解の振幅は  $\sqrt{Ra - Rc}$  に比例することが分かる<sup>13)</sup>. 従って, 臨界 Rayleigh 数における線形定常解の振幅はゼロである.

かくして非線形効果を考慮することにより, 線形定常解の振幅を決めることが出来る.

<sup>12)</sup>  $A$  はより高次のバランスを考えることによって定めることが出来る.

<sup>13)</sup> 線形解の振幅が  $\sqrt{Ra - Rc}$  に比例することを初めて示したのは Malkus and Veronis(1958) である.

## 参考文献

- J. Thomson, 1882: On a changing tessellated structure in certain liquids, *Proc. Phil. Soc. Glasgow*, **13**, 464–468
- H. Bénard, 1900: Les Tourbillons cellulaires dans une nappe liquide, *Revue générale des Sciences pures et appliquées*, **11**, 1261–1271, 1309–1328
- L. Rayleigh, 1916: On convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side, *Phil. Mag.*, **32**, 529–546
- A. R. Low, 1929: On the criterion for stability of a layer of viscous fluid heated from below, *Proc. Roy. Soc.*, **125**, 180–195
- A. Pellew, R. V. Southwell, 1940: On maintained convective motion in a fluid heated from below, *Proc. Roy. Soc.*, **176**, 312–343
- W. H. Reid, D. L. Harris, 1958: Some further results on the Bénard problem, *The Physics of Fluids*, **1**, 102–110
- D. G. Christopherson, 1940: Note on the vibration of membranes, *Quart. J. of Math.*, **11**, 63–65
- F. E. Bisshopp, 1960: On two-dimensional cell patterns, *J. Math. Anal. and Appl.*, **1**, 373–385
- P. L. Silveston, 1958: Wärmedurchgang in waagerechten Flüssigkeitsschichten, *Forsch. Ing. Wes.*, **24**, 29–32, 59–69
- W. V. R. Malkus, G. Veronis, 1958: Finite amplitude cellular convection, *J. Fluid. Mech.*, **4**, 225–260
- S. Chandrasekhar, 1961: Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Dover Publications, 652 pp