

重力値とその補正に関する理論式の導出メモ

0. はじめに

とある業務の都合上、重力値とその補正の理論式をフォローする必要性が生じた。しかしそれらの導出を記述した日本語の専門書は容易に入手することはできなかった。その後、幸いにして Heiskanen and Moritz(1967)という英文の専門書にたどり着いた。Heiskanen and Moritz(1967)には導出などの要点が比較的丁寧に記述されているものの、導出の詳細部分や補正の具体的な表式については省略されている。そこで本文書では Heiskanen and Moritz(1967)以外の文献も参照しつつ、重力値とその補正の理論式の導出を詳細にフォローすることとした。

本文書の構成は以下のようになっている。

1. Somigliana の公式の導出
2. 高度変化を考慮した重力値の導出
3. 大気補正式の導出
4. ブーゲー平板補正式の導出
5. 地形補正式の導出

付録：各種数学公式の導出

なお、あくまで本文書は個人的メモという扱いであるので、読者におかれては性悪説の立場に基づいて参照されたい。

1. Somigliana の公式の導出

本節では地球が回転楕円体面とみなせるときの地球表面における重力値(正規重力)を記述する Somigliana の公式を導出する。導出の流れとしては、

1. 重力ポテンシャルの支配方程式である「一般化されたポアソン方程式」を導出する
2. 一般化されたポアソン方程式を楕円座標系のもとで解き、重力ポテンシャルを得る
3. 重力ポテンシャルの鉛直勾配をとり、重力値を得る

となる。

1.1 一般化されたポアソン方程式の導出

最初に一般化されたポアソン方程式を導出する。地球とともに回転する座標系において、地球上の物体に働く主な力として地球からの万有引力、地球の自転に伴う遠心力の二つが挙げられる。これらの力はいずれもポテンシャルの勾配によって記述されるポテンシャル力である。地球の中心を原点とし、赤道面上に x 軸、 y 軸、地球自転軸方向に z 軸をとり、

地球上の点 P での位置ベクトルを $\mathbf{r}=(x,y,z)$ とする。このとき点 P での万有引力、遠心力をそれぞれ \mathbf{F}_g 、 \mathbf{F}_c とすると、

$$\mathbf{F}_g = -\frac{GM}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{F}_c = \omega^2\mathbf{r} \quad (1.2)$$

となる。但し、 G 、 M 、 ω はそれぞれ万有引力定数、地球質量、地球自転角速度を表す。ここで万有引力、遠心力のポテンシャルをそれぞれ V 、 Φ とし、 $\mathbf{F}_g=\nabla V$ 、 $\mathbf{F}_c=\nabla \Phi$ と置くと、(1.1)、(1.2)式より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{GMx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{GMy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{GMz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \omega^2 x, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \omega^2 y, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

となる。(1.3)、(1.4)式を積分すると、

$$V = \frac{GM}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{GM}{|\mathbf{r}|} \quad (1.5)$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) \quad (1.6)$$

となる¹。

以下、 V 、 Φ が満たす方程式を求める。地球を囲む閉曲面 S を考え、 S 上に点 P が存在するものとする。また S によって形成される領域を V' とする。領域 V' におけるポテンシャル V のラプラシアン $\nabla^2 V$ の体積積分を考えると、ガウスの定理より、

$$\iiint \nabla^2 V dV' = \iint \nabla V \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.7)$$

となる。ここで \mathbf{n} は閉曲面の法線ベクトルを表す。 \mathbf{n} と \mathbf{r} のなす角を θ とし、(1.7)式の右边を変形すると、

$$\iint \nabla V \cdot \mathbf{n} dS = -\iint \frac{GM}{|\mathbf{r}|^3} \cdot \mathbf{n} dS = -\iint \frac{GM}{|\mathbf{r}|^2} \cos \theta dS \quad (1.8)$$

となる。ここで dS に対する立体角(原点を中心とする単位円に射影したときの面積)を $d\Omega$ とすると、幾何学的な考察により、

$$\cos \theta dS = |\mathbf{r}|^2 d\Omega \quad (1.9)$$

の関係が成り立つ。(1.9)式を(1.8)式に代入すると、

¹ 厳密に言うと、(1.5)式は地球から十分離れた(地球が質点とみなせる)場合で成り立つ近似式である。

$$\iint \nabla V \cdot \mathbf{n} dS = -GM \iint d\Omega = -4\pi GM = -4\pi G \iiint \rho dV' \quad (1.10)$$

となる。但し式変形の途中で全立体角(単位円の表面積)が 4π であること、及び地球質量 M が固体地球の体積密度 ρ の体積積分によって記述できることを用いた。(1.7)、(1.10)式より

$$\iiint (\nabla^2 V + 4\pi G\rho) dV' = 0 \quad (1.11)$$

となる。(1.11)式は任意の領域 V で成立するので、

$$\nabla^2 V = -4\pi G\rho \quad (1.12)$$

が得られる。(1.12)式はポアソン方程式と呼ばれる。

次に Φ が満たす方程式を求める。 Φ のラプラシアンを(1.6)式より算出すると、

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 2\omega^2 \quad (1.13)$$

が得られる。

ここで $W=V+\Phi$ という量を導入すると、 W は万有引力と遠心力の合力のポテンシャルと考えることが出来る。(1.12)、(1.13)式を足し合わせると、

$$\nabla^2 W = -4\pi G\rho + 2\omega^2 \quad (1.14)$$

となり、 W が満たす方程式が得られる。(1.14)式は「一般化されたポアソン方程式」と呼ばれる。

1.1.2 楕円座標系における重力ポテンシャルの導出

以下、楕円座標系における重力ポテンシャルを求める。地上、即ち固体地球境界より外側では密度 ρ はゼロとなるので、(1.14)式は

$$\nabla^2 W = 2\omega^2 \quad (1.15)$$

となる。(1.14)式の解は非同次の微分方程式であるので、その一般解は同次の場合の一般解 W_1 と非同次の場合の特別解 W_2 の和で記述される。 W_2 については遠心力ポテンシャル Φ の表式(1.6)式そのものであることは容易に分かるので、これを楕円座標で書き換えればよい。固体地球境界の外側の点を P として、楕円座標系では点 P を通る回転楕円体の半短径 u 、回転楕円体の長半径を半径とする球面上に存在し、点 P と水平座標が等しい点 Q における余緯度 θ 、地心経度 λ によって位置を表す(図 1)。注目している回転楕円体の形状を特徴づける定数 E を以下のように定義する。

$$E = \sqrt{v^2 - u^2} \quad (1.16)$$

但し v は回転楕円体の長半径である。このとき地心直交座標系 x 、 y 、 z は楕円座標系 u 、 θ 、 λ によって以下のように表される。

$$x = \sqrt{u^2 + E^2} \sin \theta \cos \lambda \quad (1.17)$$

$$y = \sqrt{u^2 + E^2} \sin \theta \sin \lambda \quad (1.18)$$

$$z = u \cos \theta \quad (1.19)$$

(1.17)、(1.18)式を用いて非同次特別解 W_2 を表すと、

$$W_2 = \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \sin^2 \theta \quad (1.20)$$

となる。

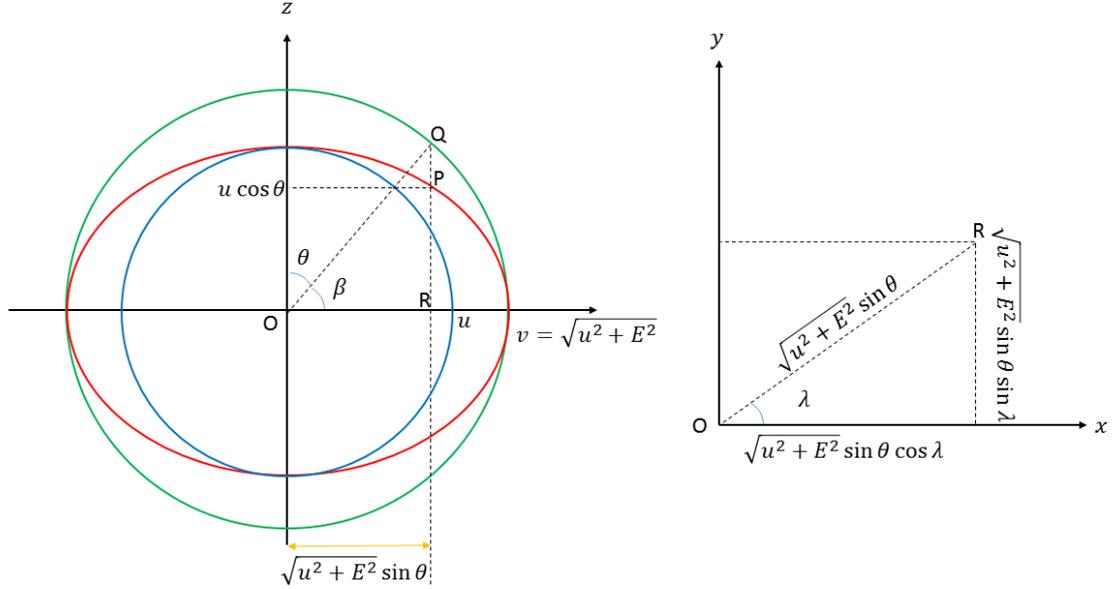


図 1 : 楕円座標の幾何学的な関係。

次に同次一般解 W_1 を求める。楕円座標 u 、 θ 、 λ に対するスケールファクターをそれぞれ h_u 、 h_θ 、 h_λ とすると、同次一般解に対する微分方程式は以下のように記述される²。

$$\begin{aligned} \nabla^2 W_1 &= \frac{1}{h_u h_\theta h_\lambda} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_\theta h_\lambda}{h_u} \frac{\partial W_1}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h_\lambda h_u}{h_\theta} \frac{\partial W_1}{\partial \theta} \right) \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{h_u h_\theta}{h_\lambda} \frac{\partial W_1}{\partial \lambda} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

座標の微小変化に伴う距離の微小変化を ds とすると、以下の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \\ &= h_u^2 (du)^2 + h_\theta^2 (d\theta)^2 + h_\lambda^2 (d\lambda)^2 \end{aligned} \quad (1.22)$$

ここで x 、 y 、 z が u 、 θ 、 λ の関数であることに着目すると、

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \quad (1.23)$$

²(1.21)式の導出については、付録 A を参照されたい。

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \quad (1.24)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial z}{\partial \lambda} d\lambda \quad (1.25)$$

と表される。また(1.17)、(1.18)、(1.19)式より

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2 + E^2}} \sin \theta \cos \lambda & -\sqrt{u^2 + E^2} \cos \theta \cos \lambda & -\sqrt{u^2 + E^2} \sin \theta \sin \lambda \\ \frac{u}{\sqrt{u^2 + E^2}} \sin \theta \sin \lambda & \sqrt{u^2 + E^2} \cos \theta \sin \lambda & \sqrt{u^2 + E^2} \sin \theta \cos \lambda \\ \cos \theta & -u \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

となる。(1.22)式の中辺に(1.23)、(1.24)、(1.25)式を代入すると、

$$\begin{aligned} & (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 (du)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 (d\theta)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 (d\lambda)^2 \\ &+ 2 \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial \theta} dud\theta + 2 \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\theta d\lambda + 2 \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial u} d\lambda du \\ &+ \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 (du)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 (d\theta)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 (d\lambda)^2 \\ &+ 2 \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial \theta} dud\theta + 2 \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\theta d\lambda + 2 \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial u} d\lambda du \\ &+ \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 (du)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 (d\theta)^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial \theta} dud\theta \\ &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \right] (du)^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \right] (d\theta)^2 \\ &+ \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 \right] (d\lambda)^2 + 2 \left[\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right] dud\theta \\ &+ 2 \left[\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right] d\theta d\lambda + 2 \left[\frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial u} \right] d\lambda du \end{aligned} \quad (1.27)$$

となる。ここで(1.26)式より

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\
&= \frac{u^2}{u^2 + E^2} \sin^2 \theta \cos^2 \lambda + \frac{u^2}{u^2 + E^2} \sin^2 \theta \sin^2 \lambda + \cos^2 \theta \\
&= \frac{u^2}{u^2 + E^2} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \theta}{u^2 + E^2}
\end{aligned} \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \\
&= (u^2 + E^2) \cos^2 \theta \cos^2 \lambda + (u^2 + E^2) \cos^2 \theta \sin^2 \lambda + u^2 \sin^2 \theta \\
&= (u^2 + E^2) \cos^2 \theta + u^2 \sin^2 \theta = u^2 + E^2 \cos^2 \theta
\end{aligned} \tag{1.29}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 \\
&= (u^2 + E^2) \sin^2 \theta \sin^2 \lambda + (u^2 + E^2) \sin^2 \theta \cos^2 \lambda \\
&= (u^2 + E^2) \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial \theta} \\
&= u \sin \theta \cos \theta \cos^2 \lambda + u \sin \theta \cos \theta \sin^2 \lambda - u \sin \theta \cos \theta \\
&= u \sin \theta \cos \theta - u \sin \theta \cos \theta = 0
\end{aligned} \tag{1.31}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\
&= -(u^2 + E^2) \sin \theta \cos \theta \sin \lambda \cos \lambda + (u^2 + E^2) \sin \theta \cos \theta \sin \lambda \cos \lambda \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.32}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial u} = -u \sin^2 \theta \sin \lambda \cos \lambda + u \sin^2 \theta \sin \lambda \cos \lambda = 0 \tag{1.33}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
(ds)^2 &= h_u^2 (du)^2 + h_\theta^2 (d\theta)^2 + h_\lambda^2 (d\lambda)^2 \\
&= \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \theta}{u^2 + E^2} (du)^2 + (u^2 + E^2 \cos^2 \theta) (d\theta)^2 \\
&\quad + (u^2 + E^2) \sin^2 \theta (d\lambda)^2
\end{aligned} \tag{1.34}$$

即ち、

$$h_u = \sqrt{\frac{u^2 + E^2 \cos^2 \theta}{u^2 + E^2}}, h_\theta = \sqrt{u^2 + E^2 \cos^2 \theta}, h_\lambda = \sqrt{(u^2 + E^2) \sin^2 \theta} \tag{1.35}$$

が得られる。(1.35)式を(1.21)式に代入すると、

$$\begin{aligned}
\nabla^2 W_1 &= \frac{1}{(u^2 + E^2 \cos^2 \theta) \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[(u^2 + E^2) \sin \theta \frac{\partial W_1}{\partial u} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial W_1}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{u^2 + E^2 \cos^2 \theta}{(u^2 + E^2) \sin \theta} \frac{\partial W_1}{\partial \lambda} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{(u^2 + E^2 \cos^2 \theta) \sin \theta} \left[2u \sin \theta \frac{\partial W_1}{\partial u} + (u^2 + E^2) \sin \theta \frac{\partial^2 W_1}{\partial u^2} \right. \\
&\quad \left. + \cos \theta \frac{\partial W_1}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 W_1}{\partial \theta^2} + \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \theta}{(u^2 + E^2) \sin \theta} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \lambda^2} \right] = 0
\end{aligned} \tag{1.36}$$

即ち、

$$\begin{aligned}
(u^2 + E^2) \frac{\partial^2 W_1}{\partial u^2} + 2u \frac{\partial W_1}{\partial u} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial W_1}{\partial \theta} \\
+ \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \theta}{(u^2 + E^2) \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \lambda^2} = 0
\end{aligned} \tag{1.37}$$

が得られる。

同次一般解の微分方程式(1.37)式が得られたので、以下ではこれを解いてゆく。(1.37)式は W_1 に対して同次かつ線形であるので、次のように変数分離形の解を仮定する。

$$W_1 = f(u)g(\theta)h(\lambda) \tag{1.38}$$

(1.38)式を(1.37)式に代入すると、

$$\begin{aligned}
(u^2 + E^2) f'' g h + 2u f' g h + f g'' h + \cot \theta f g' h + \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \theta}{(u^2 + E^2) \sin^2 \theta} f g h'' \\
= 0
\end{aligned} \tag{1.39}$$

となる。但しプライム記号は各関数の独立変数での微分を表す。(1.39)式の両辺を fgh で割ると、

$$\frac{1}{f} [(u^2 + E^2) f'' + 2u f'] + \frac{1}{g} (g'' + \cot \theta g') + \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \theta}{(u^2 + E^2) \sin^2 \theta} \frac{h''}{h} = 0 \tag{1.40}$$

となる。(1.40)式はさらに次のように変形される。

$$-\frac{(u^2 + E^2) \sin^2 \theta}{u^2 + E^2 \cos^2 \theta} \left\{ \frac{1}{f} [(u^2 + E^2) f'' + 2u f'] + \frac{1}{g} (g'' + \cot \theta g') \right\} = \frac{h''}{h} \tag{1.41}$$

(1.41)式において右辺は λ 、左辺は u 、 θ のみに依存する。このことから(1.41)式の両辺は定数でなければならない。そこで右辺の値を $-m^2$ と置くと、

$$h'' + m^2 h = 0 \tag{1.42}$$

となる。(1.42)式はいわゆる調和振動子に対する微分方程式であり、その基本解は $\sin(m\lambda)$ 、 $\cos(m\lambda)$ で与えられる。

また(1.41)式の左辺については、

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{f}[(u^2 + E^2)f'' + 2uf'] + \frac{1}{g}(g'' + \cot \theta g') - \frac{u^2 + E^2 \cos^2 \theta}{(u^2 + E^2) \sin^2 \theta} m^2 \\
&= \frac{1}{f}[(u^2 + E^2)f'' + 2uf'] + \frac{1}{g}(g'' + \cot \theta g') - \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{E^2}{u^2 + E^2} \right) m^2 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.43}$$

となる。(1.43)式はさらに次のように変形される。

$$\frac{1}{f}[(u^2 + E^2)f'' + 2uf'] + \frac{E^2}{u^2 + E^2} m^2 = -\frac{1}{g}(g'' + \cot \theta g') + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \tag{1.44}$$

(1.44)式において左辺は u 、右辺は θ のみに依存する。このことから(1.44)式の両辺は定数でなければならない。そこでその定数の値を $n(n+1)$ (但し n は正の整数)と置くと³、

$$\sin \theta g'' + \cos \theta g' + \left[n(n+1) \sin \theta - \frac{m^2}{\sin \theta} \right] g = 0 \tag{1.45}$$

$$(u^2 + E^2)f'' + 2uf' - \left[n(n+1) - \frac{E^2}{u^2 + E^2} m^2 \right] f = 0 \tag{1.46}$$

となる。ここで

$$t = \cos \theta \tag{1.47}$$

と置くと、

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dt}{d\theta} \frac{d}{dt} = -\sin \theta \frac{d}{dt} = -\sqrt{1-t^2} \frac{d}{dt} \tag{1.48}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta} \left(-\sqrt{1-t^2} \frac{d}{dt} \right) = -\cos \theta \frac{d}{dt} + \sin^2 \theta \frac{d^2}{dt^2} \\
&= -t \frac{d}{dt} + (1-t^2) \frac{d^2}{dt^2}
\end{aligned} \tag{1.49}$$

となる。(1.47)、(1.48)、(1.49)式を用いて(1.45)式を書き換えると、

$$(1-t^2)g''(t) - 2tg'(t) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2} \right] g(t) = 0 \tag{1.50}$$

となる。(1.50)式はルジャンドル微分方程式と呼ばれており、その基本解は第一種ルジャンドル陪関数 $P_{nm}(\cos \theta)$ と第二種ルジャンドル陪関数 $Q_{nm}(\cos \theta)$ である⁴。第一種ルジャンドル陪関数は $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ で発散せず、第二種ルジャンドル陪関数は $\cos \theta = \pm 1$ で発散するという大きな違いがある。

(1.46)式についても、変数変換によりルジャンドル微分方程式に帰着されることが分かる。以下、そのことを示す。虚数単位を i として

³ ここでの定数の値は本来どのように置いても良い筈である。ここであえて $n(n+1)$ と置いている理由は、 n を正の整数として定数の値が $n(n+1)$ という形でなければ、(1.46)式の解が有限の値をとらなくなってしまう為である。詳細は付録 B.1 節を参照されたい。

⁴ ルジャンドル微分方程式の解の導出については、付録 B を参照されたい。

$$\tau = i \frac{u}{E} \quad (1.51)$$

と置くと、

$$\frac{d}{du} = \frac{d\tau}{du} \frac{d}{d\tau} = \frac{i}{E} \frac{d}{d\tau} \quad (1.52)$$

$$\frac{d^2}{du^2} = \frac{i}{E} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{i}{E} \frac{d}{d\tau} \right) = -\frac{1}{E^2} \frac{d^2}{d\tau^2} \quad (1.53)$$

となる。(1.51)、(1.52)、(1.53)式を用いて(1.46)式を書き換えると、

$$\begin{aligned} & (-E^2\tau^2 + E^2) \frac{1}{E^2} f''(\tau) - 2 \frac{\tau E}{i} \frac{i}{E} f'(\tau) + \left[n(n+1) - \frac{E^2 m^2}{-E^2\tau^2 + E^2} \right] f(\tau) \\ &= (1 - \tau^2) f''(\tau) - 2\tau f'(\tau) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \tau^2} \right] f(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (1.54)$$

が得られる。(1.54)式はルジャンドル微分方程式(1.50)式と同じ形式となっている。従って、(1.54)式の基本解は $P_{nm}(iu/E)$ 、 $Q_{nm}(iu/E)$ となる。

以上をまとめると、 W_1 は次の形で表される⁵。

$$\begin{aligned} W_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n & \left[\alpha_{nm} \frac{P_{nm}\left(i \frac{u}{E}\right)}{P_{nm}\left(i \frac{b}{E}\right)} + \beta_{nm} \frac{Q_{nm}\left(i \frac{u}{E}\right)}{Q_{nm}\left(i \frac{b}{E}\right)} \right] [a_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda \\ & + b_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \sin m\lambda + c_{nm} Q_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda \\ & + d_{nm} Q_{nm}(\cos \theta) \sin m\lambda] \end{aligned} \quad (1.55)$$

いま物理的に意味のある解は地球表面から無限遠の領域で有限である解であるので、その条件を満たす W_1 を求めなければならない。先ず上で述べたように $Q_{nm}(\cos \theta)$ は $\cos \theta = \pm 1$ で発散してしまうので、全ての n 、 m について $c_{nm} = d_{nm} = 0$ でなければならない。次に $P_{nm}(iu/E)$ 、 $Q_{nm}(iu/E)$ の振舞いについて考える。 $E \rightarrow 0$ なる極限(回転楕円体を球に近付ける極限)を考えてみると、満たすべき微分方程式(1.54)式は単純化されて

$$u^2 f'' + 2uf' - n(n+1)f = 0 \quad (1.56)$$

となる。(1.56)式において $f = u^p$ と置くと、 $p = n$ 、 $-n-1$ が得られる。即ち(1.56)式の基本解は u^n と $u^{-(n+1)}$ となる。従って $E \rightarrow 0$ の極限において $P_{nm}(iu/E)$ 、 $Q_{nm}(iu/E)$ は u^n 、 $u^{-(n+1)}$ のいずれかに収束することになる。ここで $Q_{nm}(iu/E)$ は $iu/E = \pm 1$ で発散するので、 $E \rightarrow 0$ の極限においては $u = \pm Ei \rightarrow 0$ で発散することになる。(1.56)式の基本解のうち、 $u \rightarrow 0$ で発散するのは $u^{-(n+1)}$ である。従って

$$\lim_{E \rightarrow 0} P_{nm}\left(i \frac{u}{E}\right) = u^n \quad (1.57)$$

⁵ $P_{nm}(iu/E)$ 、 $Q_{nm}(iu/E)$ の比例係数において陽に $P_{nm}^{-1}(iu/E)$ 、 $Q_{nm}^{-1}(iu/E)$ を括り出しているのは、後の計算の便宜を考慮してのことである。単に比例係数を α_{nm} 、 β_{nm} と置いても(計算の手数は少々増えるものの)問題なく計算は進められる。

$$\lim_{E \rightarrow 0} Q_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right) = u^{-(n+1)} \quad (1.58)$$

となることが分かる。(1.57)式より $E \rightarrow 0$ の極限では、 $P_{nm}(iu/E)$ は無限遠の領域 ($u \rightarrow \infty$) において発散する。従って少なくとも $E \rightarrow 0$ という極限において W_1 が有限である為には、全ての n 、 m について $\alpha_{nm} = 0$ でなければならない。以上より

$$W_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{Q_{nm} \left(i \frac{u}{E} \right)}{Q_{nm} \left(i \frac{b}{E} \right)} [a_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \sin m\lambda] \quad (1.59)$$

となる。地球が回転楕円体とみなせる場合、 W_1 は自転軸について対称となるので、経度 λ には依存しない。このとき(1.59)式の添え字 m については $m=0$ の項だけが生き残り、

$$W_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n \left(i \frac{u}{E} \right)}{Q_n \left(i \frac{b}{E} \right)} A_n P_n(\cos \theta) \quad (1.60)$$

となる。但し $a_{n0} \equiv A_n$ 、 $P_{n0} = P_n$ 、 $Q_{n0} = Q_n$ と置いた⁶。(1.20)、(1.60)式より

$$W = W_1 + W_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n \left(i \frac{u}{E} \right)}{Q_n \left(i \frac{b}{E} \right)} A_n P_n(\cos \theta) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \sin^2 \theta \quad (1.61)$$

となる。ここで長半径の球に対する緯度(更成緯度と呼ばれる) $\beta = \pi/2 - \theta$ を導入すると、

$$W(u, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n \left(i \frac{u}{E} \right)}{Q_n \left(i \frac{b}{E} \right)} A_n P_n(\sin \beta) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta \quad (1.62)$$

となる。(1.62)式において $u=b$ とし、 $W(b, \beta) \equiv W_0$ と置くと、

$$W_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\sin \beta) + \frac{1}{2} \omega^2 (b^2 + E^2) \cos^2 \beta \quad (1.63)$$

となる。(1.16)式を地球表面に適用すると $v=a$ 、 $u=b$ となるので、

$$a^2 = b^2 + E^2 \quad (1.64)$$

が成り立つ。またそれに加えて

$$P_2(\sin \beta) = \frac{3}{2} \sin^2 \beta - \frac{1}{2} = 1 - \frac{3}{2} \cos^2 \beta \quad (1.65)$$

となることに着目すると⁷、(1.63)式は

$$W_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\sin \beta) + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 [1 - P_2(\sin \beta)] \quad (1.66)$$

となる。ここで

$$P_0(\sin \beta) = 1 \quad (1.67)$$

⁶ ルジャンドル陪関数のうち、 $m=0$ であるものをルジャンドル関数と呼ぶ。

⁷ P_n の具体的な表式とその導出については付録 B.1 節を参照されたい。

が成り立つことに着目して(1.66)式を $P_n(n=0,1,2,\dots)$ ごとに整理すると、

$$\begin{aligned} & \left(A_0 + \frac{1}{3}\omega^2 a^2 - W_0\right) P_0(\sin \beta) + A_1 P_1(\sin \beta) + \left(A_2 - \frac{1}{3}\omega^2 a^2\right) P_2(\sin \beta) \\ & + \sum_{n=3}^{\infty} A_n P_n(\sin \beta) = 0 \end{aligned} \quad (1.68)$$

となる。(1.68)式が任意の β について成立する為には、

$$A_0 = W_0 - \frac{1}{3}\omega^2 a^2, A_1 = 0, A_2 = \frac{1}{3}\omega^2 a^2, A_n = 0 \quad (n = 3, 4, \dots) \quad (1.69)$$

とならなければならない。従って(1.62)式は

$$\begin{aligned} & W(u, \beta) \\ & = \left(W_0 - \frac{1}{3}\omega^2 a^2\right) \frac{Q_0\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_0\left(i\frac{b}{E}\right)} + \frac{1}{3}\omega^2 a^2 \frac{Q_2\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_2\left(i\frac{b}{E}\right)} P_2(\sin \beta) \\ & + \frac{1}{2}\omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta \end{aligned} \quad (1.70)$$

となる。(1.70)式において、

$$Q_0\left(i\frac{u}{E}\right) = -i \tan^{-1}\left(\frac{E}{u}\right) \quad (1.71)$$

$$Q_2\left(i\frac{u}{E}\right) = \frac{i}{2} \left[\left(1 + 3\frac{u^2}{E^2}\right) \tan^{-1}\left(\frac{E}{u}\right) - 3\frac{u}{E} \right] \quad (1.72)$$

となることに着目すると⁸、

⁸(1.71)、(1.72)式の導出については付録 B. 6 節を参照されたい。

$$\begin{aligned}
& W(u, \beta) \\
&= \left(W_0 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \right) \frac{-i \tan^{-1} \left(\frac{E}{u} \right)}{-i \tan^{-1} \left(\frac{b}{u} \right)} \\
&+ \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \frac{-\frac{i}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{u^2}{E^2} \right) \tan^{-1} \left(\frac{E}{u} \right) - 3 \frac{u}{E} \right]}{-\frac{i}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{b^2}{E^2} \right) \tan^{-1} \left(\frac{E}{b} \right) - 3 \frac{b}{E} \right]} P_2(\sin \beta) \\
&+ \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta \tag{1.73} \\
&= \left(W_0 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \right) \frac{\tan^{-1} \left(\frac{E}{u} \right)}{\tan^{-1} \left(\frac{b}{u} \right)} \\
&+ \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \frac{\frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{u^2}{E^2} \right) \tan^{-1} \left(\frac{E}{u} \right) - 3 \frac{u}{E} \right]}{\frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{b^2}{E^2} \right) \tan^{-1} \left(\frac{E}{b} \right) - 3 \frac{b}{E} \right]} P_2(\sin \beta) \\
&+ \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$q = \frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{u^2}{E^2} \right) \tan^{-1} \left(\frac{E}{u} \right) - 3 \frac{u}{E} \right] \tag{1.74}$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{b^2}{E^2} \right) \tan^{-1} \left(\frac{E}{b} \right) - 3 \frac{b}{E} \right] \tag{1.75}$$

と置くと、

$$\begin{aligned}
& W(u, \beta) \\
&= \left(W_0 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \right) \frac{\tan^{-1} \left(\frac{E}{u} \right)}{\tan^{-1} \left(\frac{E}{b} \right)} + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} P_2(\sin \beta) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta \tag{1.76}
\end{aligned}$$

となる。ここで W_0 を他の定数で表現する為、地球から十分離れた場合 ($|\mathbf{r}| \gg 1$) の (1.76) 式の近似形を導く。(1.17)、(1.18)、(1.19) 式より、 $|\mathbf{r}|^2 = u^2 + E^2 \cos \theta$ の関係が成り立つことに着目すると、 $|\mathbf{r}| \gg 1$ の場合は $u \gg 1$ 、もしくは $E \leq 1$ より $u \gg E$ の場合に対応する。このとき、

$$\tan^{-1} \frac{E}{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{E}{u} \right)^{2k+1} \tag{1.77}$$

$$q = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{(2k+1)(2k+3)} \left(\frac{E}{u} \right)^{2k+1} \tag{1.78}$$

が成り立つことを用いると⁹、

$$\begin{aligned}
& W(u, \beta) \\
&= \left(W_0 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \right) \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{E}{u} \right)^{2k+1}}{\tan^{-1} \left(\frac{E}{b} \right)} \\
&\quad - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{(2k+1)(2k+3)} \left(\frac{E}{u} \right)^{2k+1}}{q_0} P_2(\sin \beta) \\
&\quad + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta \tag{1.79} \\
&\approx \frac{W_0 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 E}{\tan^{-1} \left(\frac{E}{b} \right)} \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta \\
&\approx \frac{W_0 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 E}{\tan^{-1} \left(\frac{E}{b} \right)} \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{1}{2} \omega^2 (|\mathbf{r}|^2 + E^2) \cos^2 \beta
\end{aligned}$$

となる。(1.79)式の左辺第1項は万有引力ポテンシャルの寄与であるので、これを万有引力ポテンシャルの近似式(1.5)と比較すると、

$$GM = \frac{W_0 - \frac{1}{3} \omega^2 a^2 E}{\tan^{-1} \left(\frac{E}{b} \right)} \tag{1.80}$$

となる。(1.80)式を W_0 について整理すると、

$$W_0 = \frac{GM}{E} \tan^{-1} \left(\frac{E}{b} \right) + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \tag{1.81}$$

となる。(1.81)式を(1.79)式に代入して W_0 を消去すると、

$$\begin{aligned}
& W(u, \beta) \\
&= \frac{GM}{E} \tan^{-1} \left(\frac{E}{u} \right) + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} P_2(\sin \beta) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta \\
&= \frac{GM}{E} \tan^{-1} \left(\frac{E}{u} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \beta
\end{aligned} \tag{1.82}$$

が得られる。

1.3 Somigliana の公式の導出

前節で重力ポテンシャル W が得られたので、本節では W より地球表面での重力値(正規

⁹(1.77)、(1.78)式の導出については、付録 C を参照されたい。

重力)を記述する Somigliana の公式を導出する。重力値は単位質量の物質に加わる重力の鉛直成分であるので、重力ポテンシャルの鉛直方向の勾配によって与えられる。楕円座標の場合、 u 方向が鉛直方向となる。従って重力値を γ_u とすると、

$$\gamma_u = \frac{1}{h_u} \frac{\partial W}{\partial u} = \sqrt{\frac{u^2 + E^2}{u^2 + E^2 \cos^2 \theta}} \frac{\partial W}{\partial u} = \sqrt{\frac{u^2 + E^2}{u^2 + E^2 \sin^2 \beta}} \frac{\partial W}{\partial u} \quad (1.83)$$

と表される¹⁰。(1.82)式の両辺を u で微分すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial W(u, \beta)}{\partial u} \\ &= \frac{GM}{E} \frac{1}{1 + (E/u)^2} \left(-\frac{E}{u^2} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \frac{1}{q_0} \frac{dq}{du} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{3} \right) + \omega^2 u \cos^2 \beta \\ &= -\frac{GM}{u^2 + E^2} + \frac{\omega^2 a^2}{q_0} \frac{dq}{du} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \beta - \frac{1}{6} \right) + \omega^2 u \cos^2 \beta \end{aligned} \quad (1.84)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} q' &= -\frac{u^2 + E^2}{E} \frac{dq}{du} \\ &= -\frac{u^2 + E^2}{2E} \left\{ 6 \frac{u}{E^2} \tan^{-1} \left(\frac{E}{u} \right) + \left(1 + 3 \frac{u^2}{E^2} \right) \frac{1}{1 + \left(\frac{E}{u} \right)^2} \left(-\frac{E}{u^2} \right) - \frac{3}{E} \right\} \\ &= -\frac{u^2 + E^2}{2E} \left[6 \frac{u}{E^2} \tan^{-1} \left(\frac{E}{u} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{u^2 + E^2} \left\{ E \left(1 + 3 \frac{u^2}{E^2} \right) + \frac{3}{E} (u^2 + E^2) \right\} \right] \\ &= -3 \left(1 + \frac{u^2}{E^2} \right) \frac{u}{E} \tan^{-1} \left(\frac{E}{u} \right) + 2 + 3 \frac{u^2}{E^2} \\ &= -3 \left(1 + \frac{u^2}{E^2} \right) \frac{u}{E} \tan^{-1} \left(\frac{E}{u} \right) + 3 \left(1 + \frac{u^2}{E^2} \right) - 1 \\ &= 3 \left(1 + \frac{u^2}{E^2} \right) \left(1 - \frac{u}{E} \tan^{-1} \left(\frac{E}{u} \right) \right) - 1 \end{aligned} \quad (1.85)$$

と置くと、(1.84)式は

$$\frac{\partial W(u, \beta)}{\partial u} = -\frac{GM}{u^2 + E^2} - \frac{\omega^2 a^2 E}{u^2 + E^2} \frac{q'}{q_0} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \beta - \frac{1}{6} \right) + \omega^2 u \cos^2 \beta \quad (1.86)$$

となる。(1.86)式を(1.83)式に代入すると、

¹⁰(1.83)式の導出については付録 A を参照されたい。

$$\gamma_u(u, \beta) = \sqrt{\frac{u^2 + E^2}{u^2 + E^2 \sin^2 \beta}} \left\{ -\frac{GM}{u^2 + E^2} - \frac{\omega^2 a^2 E q'}{u^2 + E^2 q_0} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \beta - \frac{1}{6} \right) + \omega^2 u \cos^2 \beta \right\} \quad (1.87)$$

となる。地球表面(回転楕円体面)での重力値を求める為、(1.87)式において $u=b$ とし、 $\gamma(\beta) = |\gamma_u(b, \beta)|$ と置くと、

$$\gamma(\beta) = \sqrt{\frac{b^2 + E^2}{b^2 + E^2 \sin^2 \beta}} \left\{ \frac{GM}{b^2 + E^2} + \frac{\omega^2 a^2 E q'_0}{b^2 + E^2 q_0} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \beta - \frac{1}{6} \right) - \omega^2 b \cos^2 \beta \right\} \quad (1.88)$$

となる。但し

$$q'_0 = 3 \left(1 + \frac{b^2}{E^2} \right) \left(1 - \frac{b}{E} \tan^{-1} \left(\frac{E}{b} \right) \right) - 1 \quad (1.89)$$

と置いた。(1.64)式が成り立つことに着目しつつ、(1.88)式を書き換えると、

$$\begin{aligned} \gamma(\beta) &= \sqrt{\frac{a^2}{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \beta}} \left\{ \frac{GM}{a^2} + \omega^2 E \frac{q'_0}{q_0} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \beta - \frac{1}{6} \right) - \omega^2 b \cos^2 \beta \right\} \\ &= \frac{GM}{a \sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}} \left\{ 1 + \frac{\omega^2 a^2 E q'_0}{GM q_0} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \beta - \frac{1}{6} \right) - \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \cos^2 \beta \right\} \end{aligned} \quad (1.90)$$

となる。ここで回転楕円体の第二離心率

$$e' = \frac{E}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \quad (1.91)$$

及び無次元数

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \quad (1.92)$$

を導入すると、

$$\begin{aligned}
\gamma(\beta) &= \frac{GM}{a\sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}} \left\{ 1 + \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} e' \frac{q'_0}{q_0} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \beta - \frac{1}{6} \right) - \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \cos^2 \beta \right\} \\
&= \frac{GM}{a\sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}} \left\{ \sin^2 \beta + \cos^2 \beta + m e' \frac{q'_0}{q_0} \left(\frac{1}{3} \sin^2 \beta - \frac{1}{6} \cos^2 \beta \right) \right. \\
&\quad \left. - m \cos^2 \beta \right\} \tag{1.93} \\
&= \frac{GM}{a\sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}} \left\{ \left(1 + \frac{m e' q'_0}{3 q_0} \right) \sin^2 \beta \right. \\
&\quad \left. + \left(1 - m - \frac{m e' q'_0}{6 q_0} \right) \cos^2 \beta \right\}
\end{aligned}$$

となる。ここで赤道での正規重力を γ_a 、極での正規重力を γ_b とすると、

$$\gamma_a = \gamma(0) = \frac{GM}{ab} \left(1 - m - \frac{m e' q'_0}{6 q_0} \right) \tag{1.94}$$

$$\gamma_b = \gamma\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{m e' q'_0}{3 q_0} \right) \tag{1.95}$$

となる¹¹。(1.94)、(1.95)式を用いて(1.93)式を書き換えると、

$$\gamma(\beta) = \frac{a\gamma_b \sin^2 \beta + b\gamma_a \cos^2 \beta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}} \tag{1.96}$$

となる。ここで回転楕円体面の法線と赤道面のなす角によって定義される測地緯度(又は地理学的緯度)を ϕ と表すと、幾何学的な考察により

$$\tan \beta = \frac{b}{a} \tan \phi \tag{1.97}$$

が成り立つことが分かる¹²。(1.97)式を用いて(1.96)式の β を消去すると、

¹¹(1.94)式より、無次元数 m は赤道における重力の大きさに対する遠心力の大きさの比 $\omega^2 a / \gamma_a$ に近似的に等しいことが分かる。地球上における m の大きさを(1.92)式より見積もると、 $m \sim 3 \times 10^{-3} \ll 1$ となる。従って $\gamma_a \doteq GM/ab$ となり、 $\omega^2 a / \gamma_a \doteq \omega^2 a^2 b / GM = m$ となることが分かる。

¹²(1.97)式の導出については付録 D を参照されたい。

$$\begin{aligned}
\gamma(\phi) &= \frac{\cos^2 \beta (a\gamma_b \tan^2 \beta + b\gamma_a)}{\cos \beta \sqrt{a^2 \tan^2 \beta + b^2}} \\
&= \cos \beta \frac{\frac{b^2}{a} \gamma_b \tan^2 \phi + b\gamma_a}{\sqrt{b^2 \tan^2 \phi + b^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \tan^2 \phi}} \frac{\frac{b}{a \cos^2 \phi} (a\gamma_a \cos^2 \phi + b\gamma_b \sin^2 \phi)}{\frac{b}{\cos \phi}} \\
&= \frac{a\gamma_a \cos^2 \phi + b\gamma_b \sin^2 \phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}}
\end{aligned} \tag{1.98}$$

が得られる。(1.98)式は Somigliana(1929)によって初めて導かれ、Somigliana の公式と呼ばれている。

2. 高度変化を考慮した重力値の導出

前節で導いた Somigliana の公式は地球を回転楕円体とみなしたときの地球表面上での重力値を記述するものであった。本節では、高度変化を考慮した重力値の式を導く。その準備として、(1.98)式を無次元数 m 、扁平率 f (定義は後ほど示す)、 $\sin \phi$ に関する多項式の形に近似的に書き換える。まず(1.98)式を次のように書き換える。

$$\gamma(\phi) = \frac{a\gamma_a + (b\gamma_b - a\gamma_a) \sin^2 \phi}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \phi}} = \gamma_a \frac{1 + \frac{b\gamma_b - a\gamma_a}{a\gamma_a} \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \phi}} \tag{2.1}$$

(2.1)式に現れる γ_a 、 γ_b の定義式(1.94)、(1.95)式には q_0 、 q_0' が含まれている。そこで q_0 、 q_0' を級数展開する。(1.75)、(1.77)、(1.89)、(1.91)式より、

$$\begin{aligned}
q_0 &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{3}{e'^2} \right) \tan^{-1} e' - \frac{3}{e'} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{3}{e'^2} \right) \left(e' - \frac{1}{3} e'^3 + \frac{1}{5} e'^5 - \frac{1}{7} e'^7 + \dots \right) - \frac{3}{e'} \right] \\
&\approx \frac{1}{2} \left(e' - \frac{1}{3} e'^3 + \frac{1}{5} e'^5 + \frac{3}{e'} - e' + \frac{3}{5} e'^3 - \frac{3}{7} e'^5 - \frac{3}{e'} \right) = \frac{2}{15} e'^3 - \frac{4}{35} e'^5
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
q_0' &= 3 \left(1 + \frac{1}{e'^2} \right) \left(1 - \frac{1}{e'} \tan^{-1} e' \right) - 1 \\
&= 3 \left(1 + \frac{1}{e'^2} \right) \left[1 - \frac{1}{e'} \left(e' - \frac{1}{3} e'^3 + \frac{1}{5} e'^5 - \frac{1}{7} e'^7 + \dots \right) \right] - 1 \\
&\approx 3 \left(1 + \frac{1}{e'^2} \right) \left(\frac{1}{3} e'^2 - \frac{1}{5} e'^4 - \frac{1}{7} e'^6 \right) - 1 = \frac{2}{5} e'^2 - \frac{6}{35} e'^4
\end{aligned} \tag{2.3}$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} \frac{e'q'_0}{q_0} &= \frac{e' \left(\frac{2}{5}e'^2 - \frac{6}{35}e'^4 \right)}{\frac{2}{15}e'^3 - \frac{4}{35}e'^5} = \frac{\frac{2}{5} - \frac{6}{35}e'^2}{\frac{2}{15} \left(1 - \frac{6}{7}e'^2 \right)} \approx \frac{15}{2} \left(\frac{2}{5} - \frac{6}{35}e'^2 \right) \left(1 + \frac{6}{7}e'^2 \right) \\ &\approx 3 + \frac{9}{7}e'^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

となるので、(1.94)、(1.95)式は近似的に次のように表される。

$$\gamma_a \approx \frac{GM}{ab} \left[1 - m - \frac{m}{6} \left(3 + \frac{9}{7}e'^2 \right) \right] \approx \frac{GM}{ab} \left(1 - \frac{3}{2}m - \frac{3}{14}e'^2 m \right) \quad (2.5)$$

$$\gamma_b = \frac{GM}{a^2} \left[1 + \frac{m}{3} \left(3 + \frac{9}{7}e'^2 \right) \right] = \frac{GM}{a^2} \left(1 + m + \frac{3}{7}e'^2 m \right) \quad (2.6)$$

ここで扁平率

$$f = \frac{a-b}{a} \quad (2.7)$$

を導入すると、第二離心率 e' の二乗は f によって次のように表される。

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} - 1 = \frac{1}{(1-f)^2} - 1 \quad (2.8)$$

地球の場合、 $f \sim 1/298.25 \ll 1$ であるので、(2.8)式の右辺は近似的に次のように書き換えられる。

$$e'^2 = (1 + 2f + 3f^2 + \dots) - 1 \approx 2f + 3f^2 \quad (2.9)$$

(1)(4.16)式を (2.5)、(2.6)式に適用すると、

$$\gamma_a \approx \frac{GM}{ab} \left[1 - \frac{3}{2}m - \frac{3}{14}m(2f + 3f^2) \right] \quad (2.10)$$

$$\gamma_b \approx \frac{GM}{a^2} \left[1 + m + \frac{3}{7}m(2f + 3f^2) \right] \quad (2.11)$$

(2.9)、(2.10)、(2.11)式より

$$\begin{aligned} \frac{b\gamma_b - a\gamma_a}{a\gamma_a} &\approx \frac{b \frac{GM}{a^2} \left[1 + m + \frac{3}{7}m(2f + 3f^2)\right]}{a \frac{GM}{ab} \left[1 - \frac{3}{2}m - \frac{3}{14}m(2f + 3f^2)\right]} - 1 \\ &= \frac{b^2}{a^2} \frac{1 + m + \frac{3}{7}m(2f + 3f^2)}{1 - \frac{3}{2}m - \frac{3}{14}m(2f + 3f^2)} - 1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\approx (1-f)^2 \frac{1 + m + \frac{3}{7}m(2f + 3f^2)}{1 - \frac{3}{2}m - \frac{3}{14}m(2f + 3f^2)} - 1$$

$$\approx -2f + \frac{5}{2}m + f^2 - \frac{26}{7}fm + \frac{15}{4}m^2$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 - \frac{b}{a}\right) = [1 + (1-f)][1 - (1-f)] = 2f - f^2 \quad (2.13)$$

となるので、(2.1)式は次のように書き換えられる。

$\gamma(\phi)$

$$\begin{aligned} &\approx \gamma_a \left(1 + \frac{b\gamma_b - a\gamma_a}{a\gamma_a} \sin^2 \phi\right) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \phi + \frac{3}{8} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \phi\right)^2\right] \\ &\approx \gamma_a \left[1 + \left(-2f + \frac{5}{2}m + f^2 - \frac{26}{7}fm + \frac{15}{4}m^2\right) \sin^2 \phi\right] \left[1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (2f - f^2) \sin^2 \phi + \frac{3}{8} (2f - f^2)^2 \sin^4 \phi\right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\approx \gamma_a \left[1 + \left(-f + \frac{5}{2}m + \frac{1}{2}f^2 - \frac{26}{7}fm + \frac{15}{4}m^2\right) \sin^2 \phi\right]$$

$$+ \left(-\frac{1}{2}f^2 + \frac{5}{2}fm\right) \sin^4 \phi$$

次に測地緯度 ϕ 、標高(等ポテンシャル面からの距離) h における重力値 γ_h を求める。 $h=0$ の周りでの γ_h のテーラー展開を考えると、

$$\gamma_h \approx \gamma(\phi) + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \Big|_{h=0} h + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \Big|_{h=0} h^2 \quad (2.15)$$

となる。 γ の一次導関数は Bruns の公式により、次のように与えられる。

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} \Big|_{h=0} = -\gamma \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right) - 2\omega^2 \quad (2.16)$$

ここで M 、 N はそれぞれ子午線曲率半径、卯酉線曲率半径であり、

$$M = \frac{a^2}{b(1 + e'^2 \cos^2 \phi)^{3/2}} \quad (2.17)$$

$$N = \frac{a^2}{b(1 + e'^2 \cos^2 \phi)^{1/2}} \quad (2.18)$$

と表される¹³。(2.17)、(2.18)式より

$$\frac{1}{M} = \frac{b}{a^2} (1 + e'^2 \cos^2 \phi)^{3/2} \approx \frac{b}{a^2} \left(1 + \frac{3}{2} e'^2 \cos^2 \phi\right) \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{N} = \frac{b}{a^2} (1 + e'^2 \cos^2 \phi)^{1/2} \approx \frac{b}{a^2} \left(1 + \frac{1}{2} e'^2 \cos^2 \phi\right) \quad (2.20)$$

となるので、

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right|_{h=0} &\approx -\gamma \left[\frac{b}{a^2} \left(1 + \frac{3}{2} e'^2 \cos^2 \phi\right) + \frac{b}{a^2} \left(1 + \frac{1}{2} e'^2 \cos^2 \phi\right) \right] - 2\omega^2 \\ &= -\gamma \frac{2b}{a^2} [1 + e'^2 \cos^2 \phi] - 2\omega^2 \\ &\approx -\gamma \frac{2b}{a^2} [1 + 2f \cos^2 \phi] - 2\omega^2 \\ &= -\frac{2\gamma}{a} (1-f)[1 + 2f - 2f \sin^2 \phi] - 2\omega^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

となる。ここで(1.92)、(1.94)、(2.14)式を用いて(2.21)式の右辺第2項を書き換えると、

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right|_{h=0} &= -\frac{2\gamma}{a} (1-f)[1 + 2f - 2f \sin^2 \phi] - \frac{2m}{a} \gamma_a \\ &\approx -\frac{2\gamma}{a} (1-f)[1 + 2f - 2f \sin^2 \phi] \\ &\quad - \frac{2m}{a} \gamma \left[1 + \left(-f + \frac{5}{2}m + \frac{1}{2}f^2 - \frac{26}{7}fm + \frac{15}{4}m^2 \right) \sin^2 \phi \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{2}f^2 + \frac{5}{2}fm \right) \sin^4 \phi \right]^{-1} \\ &\approx -\frac{2\gamma}{a} (1-f)[1 + 2f - 2f \sin^2 \phi] - \frac{2m}{a} \gamma \\ &\approx -\frac{2\gamma}{a} (1+f+m-2f \sin^2 \phi) \end{aligned} \quad (2.22)$$

が得られる。さらに地球が球形で近似できるものとする、(2.22)式より

$$\left. \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \right|_{h=0} \approx \left. \frac{\partial^2 \gamma}{\partial a^2} \right|_{h=0} = \frac{\partial}{\partial a} \left(\left. \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right|_{h=0} \right) \approx \frac{\partial}{\partial a} \left(-\frac{2\gamma}{a} \right) = -\frac{2}{a} \left. \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right|_{h=0} + \frac{4\gamma}{a^2} = \frac{6\gamma}{a^2} \quad (2.23)$$

が得られる。(2.14)、(2.22)、(2.23)式を(2.15)式に適用し、f、m、h/aの3次以上の項を無視すると、

¹³(2.16)、(2.17)、(2.18)式の導出については、付録Eを参照されたい。

$$\begin{aligned}
\gamma_h &\approx \gamma - \frac{\gamma}{a} \left[2(1+f+m-2f\sin^2\phi)h - \frac{3}{a}h^2 \right] \\
&\approx \gamma - \frac{\gamma_a}{a} \left[1 + \left(-f + \frac{5}{2}m + \frac{1}{2}f^2 - \frac{26}{7}fm + \frac{15}{4}m^2 \right) \sin^2\phi \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{1}{2}f^2 + \frac{5}{2}fm \right) \sin^4\phi \right] \left[2(1+f+m-2f\sin^2\phi)h - \frac{3}{a}h^2 \right] \\
&\quad \left. - \frac{3}{a}h^2 \right] \\
&\approx \gamma - \frac{\gamma_a}{a} \left[1 + \left(-f + \frac{5}{2}m \right) \sin^2\phi \right] \left[2(1+f+m-2f\sin^2\phi)h - \frac{3}{a}h^2 \right] \\
&\approx \gamma - \frac{2\gamma_a}{a} \left[1 + f + m + \left(-3f + \frac{5}{2}m \right) \sin^2\phi \right] h + \frac{3\gamma_a}{a^2} h^2
\end{aligned} \tag{2.24}$$

が得られる。

3. 大気補正の式の導出

前節までは、地球には大気が存在しないものとして重力値に関する議論を進めてきた。大気の存在も考慮してより厳密に考えると、地球表面上における重力は固体地球部分からの引力と大気からの引力の和によって決まることになる(即ち前節までの議論では重力値を過大評価していたことになる)。本節では大気の大気への影響を補正するモデル式の導出を行う。本節では簡単の為、Moritz(1980)に従い、地球は半径 a の球形で近似出来、大気構造は鉛直 1 次元的である(水平方向の空間変動が無視できる)ものとして議論を進める。

とある点 P を考え、その点の標高を h とする。このとき点 P に上向きの引力を及ぼすのは、点 P よりも高度の高い気層に存在する大気質量 $M(h)$ である。大気引力による重力値の減少分(大気補正)を $\delta\gamma_a$ とすると、

$$\delta\gamma_a = -\frac{GM(h)}{(a+h)^2} \tag{3.1}$$

と表される。標高 z における大気密度を $\rho(z)$ とすると、点 P より上に存在する大気質量 $M(h)$ は

$$M(h) = 4\pi \int_h^\infty \rho(z)z^2 dz \tag{3.2}$$

と表される。(3.1)式に(3.2)式を代入すると、大気補正の一般的な表式として

$$\delta\gamma_a = -\frac{4\pi G}{(a+h)^2} \int_h^\infty \rho(z)(a+z)^2 dz \tag{3.3}$$

が得られる。

以下では Eshagh(2008)同様、大気密度の具体的なモデルとして、べき乗型モデル

$$\rho(z) = \rho_0 \left(\frac{a}{a+z} \right)^\mu \quad (3.4)$$

および指数関数型モデル

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\alpha z} \quad (3.5)$$

について考える。但し ρ_0 は $z=0$ における大気密度であり、 $\mu > 3$ 、 $\alpha > 0$ であるとする。また $|\alpha z| \ll 1$ となる高度について考えるものとする。

先ずべき乗型モデルについて考える。(3.4)式を(3.3)式に代入すると、

$$\begin{aligned} \delta\gamma_a &= -\frac{4\pi G}{(a+h)^2} \int_h^\infty \rho_0 \left(\frac{a}{a+z} \right)^\mu (a+z)^2 dz \\ &= -\frac{4\pi\rho_0 G a^\mu}{(a+h)^2} \int_h^\infty (a+z)^{2-\mu} dz \\ &= -\frac{4\pi\rho_0 G a^\mu}{(a+h)^2(3-\mu)} [(a+z)^{3-\mu}]_h^\infty \\ &= -\frac{4\pi\rho_0 G a^\mu}{\mu-3} (a+h)^{1-\mu} \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる。地球表面の起伏はたかだか 10km オーダーであり、地球半径(約 6400km)に比べて十分小さいので、 $h \ll a$ が成り立つ。このとき(3.6)式の右边を $h/a=0$ の周りでテーラー展開し、 h/a の 3 次以上の項は十分小さいものとして無視すると、

$$\begin{aligned} \delta\gamma_a &= -\frac{4\pi\rho_0 G a^\mu}{\mu-3} a^{1-\mu} \left(1 + \frac{h}{a} \right)^{1-\mu} \\ &\approx -\frac{4\pi\rho_0 G a}{\mu-3} \left\{ 1 - (\mu-1) \frac{h}{a} + \frac{1}{2} \mu(\mu-1) \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる。いま $\mu > 3$ であるので、定数項は負、 h/a の係数は正、 $(h/a)^2$ の係数は負となる。従って、 p_0 、 p_1 、 p_2 を実数とすると、(3.7)式は形式的に

$$\delta\gamma_a \approx -p_0^2 + p_1^2 \frac{h}{a} - p_2^2 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \quad (3.8)$$

と表される。

次に指数関数型モデルについて考える。(3.5)式を(3.3)式に代入し、部分積分を実行すると、

$$\begin{aligned}
\delta\gamma_a &= -\frac{4\pi G}{(a+h)^2} \int_h^\infty \rho_0 e^{-az} (a+z)^2 dz \\
&= -\frac{4\pi\rho_0 G}{(a+h)^2} \left\{ \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-az} (a+z)^2 \right]_h^\infty + \frac{2}{\alpha} \int_h^\infty e^{-az} (a+z) dz \right\} \\
&= -\frac{4\pi\rho_0 G}{(a+h)^2} \left\{ \frac{1}{\alpha} e^{-ah} (a+h)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{\alpha} \left\{ \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-az} (a+z) \right]_h^\infty + \frac{1}{\alpha} \int_h^\infty e^{-az} dz \right\} \right\} \quad (3.9) \\
&= -\frac{4\pi\rho_0 G}{(a+h)^2} \left\{ \frac{1}{\alpha} (a+h)^2 + \frac{2}{\alpha^2} (a+h) + \frac{2}{\alpha^3} \right\} e^{-ah} \\
&= -4\pi\rho_0 G \left\{ \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2 a} \frac{1}{1+\frac{h}{a}} + \frac{2}{\alpha^3 a^2} \frac{1}{\left(1+\frac{h}{a}\right)^2} \right\} e^{-ah}
\end{aligned}$$

となる。先に述べた通り $h \ll a$ が成り立ち、また仮定より $|\alpha h| \ll 1$ が成り立つ。このとき (3.9) 式の右辺の各関数を $h/a=0$ 、及び $\alpha h=0$ の周りでテーラー展開し、 h/a 、 αh の 3 次以上の項は十分小さいものとして無視すると、

$$\begin{aligned}
\delta\gamma_a &\approx -4\pi\rho_0 G \left\{ \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2 a} \left(1 - \frac{h}{a} + \frac{h^2}{a^2} \right) + \frac{2}{\alpha^3 a^2} \left(1 - 2\frac{h}{a} + 3\frac{h^2}{a^2} \right) \right\} \left(1 - \alpha h + \frac{\alpha^2 h^2}{2} \right) \\
&= -4\pi\rho_0 G \left\{ \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2 a} + \frac{2}{\alpha^3 a^2} \right) - \frac{2}{\alpha^3 a^3} (\alpha a + 2) h + \frac{2}{\alpha^3 a^4} (\alpha a + 3) h^2 \right\} \left(1 - \alpha h + \frac{\alpha^2 h^2}{2} \right) \\
&\approx -4\pi\rho_0 G \left\{ \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2 a} + \frac{2}{\alpha^3 a^2} - \left(1 + \frac{2}{\alpha a} + \frac{2}{\alpha^2 a^2} \right) h + \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{2}{a} + \frac{2}{\alpha a^2} \right) h^2 - \frac{2}{\alpha^3 a^3} (\alpha a + 2) h + \frac{2}{\alpha^2 a^3} (\alpha a + 2) h^2 + \frac{2}{\alpha^3 a^4} (\alpha a + 3) h^2 \right\} \\
&= -4\pi\rho_0 G \left\{ \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2 a} + \frac{2}{\alpha^3 a^2} - \left(1 + \frac{2}{\alpha a} + \frac{4}{\alpha^2 a^2} + \frac{4}{\alpha^3 a^3} \right) h + \left(\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{a} + \frac{3}{\alpha a^2} + \frac{6}{\alpha^2 a^3} + \frac{6}{\alpha^3 a^4} \right) h^2 \right\} \quad (3.10)
\end{aligned}$$

となる。いま $\alpha > 0$ であるので、定数項は負、 h の係数は正、 h^2 の係数は負となる。従って、

e_0 、 e_1 、 e_2 を実数とすると、べき乗型の場合と同様、(3.10)式は形式的に

$$\delta\gamma_a \approx -e_0^2 + e_1^2 \frac{h}{a} - e_2^2 \left(\frac{h}{a}\right)^2 \quad (3.11)$$

と表される。

4. ブーゲー平板補正式の導出

Somigliana の公式で記述される正規重力は、地球が回転楕円体であるとみなして導かれたものであるものの、実際の地球表面には地形(起伏)が存在している。理論的にその地点での重力値を推定したい場合には、地球回転楕円体面(ジオイド面を近似する等ポテンシャル面)と実際の地球表面の間にある地殻質量からの引力の寄与を正規重力に加える必要がある。逆に地点間の重力値を同じ条件で比較したい場合には、地形の重力値への影響を差し引いてジオイド面における重力値に換算する必要がある。本節では、地形の重力値への影響を考慮する単純な手法であるブーゲー平板補正(Bouguer plate correction)を導出する¹⁴。

ブーゲー平板補正の式を導出するにあたり、次の2つの仮定を置く。

- (1) 対象とする地点の周囲は平坦とみなせるとする。即ち地表面とジオイド面は平行であり、両面の間には厚さ h の無限に広い平板状の物質(ブーゲー平板)があるとみなせる。
- (2) ブーゲー平板を構成する物質の密度は一定であり、その値を ρ とする。

ブーゲー平板補正の式を求めるには、平板のなすポテンシャルを算出し、そこから平板による引力を計算すればよい。平板のなすポテンシャルを求める前の準備として、半径 a 、厚さ b 、密度 ρ の一様な円柱状物体のなすポテンシャルを求める。円柱の中心に z 軸をとり、円柱の底面を $z=0$ とする。また z 軸上の $z=c(c>b)$ にある点 P を考え、点 P でのポテンシャルを U_p とする。円柱内の微小質量 ρdv と点 P との距離を L とすると、

$$U_p = G \iiint \frac{\rho}{L} dv = G \iiint \frac{\rho}{L} dx dy dz \quad (4.1)$$

と表される。いま円柱形の物体を考えているので、以下のように円柱座標を導入すると計算上便利である。

$$x = s \cos \alpha \quad (4.2)$$

$$y = s \sin \alpha \quad (4.3)$$

このとき L および微小体積要素 $dx dy dz$ は次のように表される。

$$L = \sqrt{s^2 + (c - z)^2} \quad (4.4)$$

¹⁴ 地形の影響をより高精度に考える手法としては、プリズムモデルなどが挙げられる(Nagy, 1966)。プリズムモデルによる地形補正式の導出については、次節を参照されたい。

$$dx dy dz = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, \alpha, z)} ds d\alpha dz = s ds d\alpha dz \quad (4.5)$$

(4.4)、(4.5)式を(4.1)式に適用すると、

$$\begin{aligned} U_p &= G \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^b \frac{\rho s}{\sqrt{s^2 + (c-z)^2}} dz ds d\alpha \\ &= 2\pi G\rho \int_0^a \int_0^b \frac{s}{\sqrt{s^2 + (c-z)^2}} dz ds \\ &= 2\pi G\rho \int_0^b \left[\sqrt{s^2 + (c-z)^2} \right]_0^a dz \\ &= 2\pi G\rho \int_0^b (-c+z) dz + 2\pi G\rho \int_0^b \sqrt{a^2 + (z-c)^2} dz \end{aligned} \quad (4.6)$$

となる。(4.6)式の右辺第1項を I_1 、第2項を I_2 とする。このとき I_1 は

$$I_1 = 2\pi G\rho \left[\frac{(z-c)^2}{2} \right]_0^b = \pi G\rho \{(b-c)^2 - c^2\} \quad (4.7)$$

となる。一方 I_2 については、先ず $(z-c)/a = \xi$ なる変数変換を行うと、

$$\begin{aligned} I_2 &= 2\pi G\rho a \int_0^b \sqrt{1 + \frac{(z-c)^2}{a^2}} dz = 2\pi G\rho a^2 \int_{-\frac{c}{a}}^{\frac{b-c}{a}} \sqrt{1 + \xi^2} d\xi \\ &= \pi G\rho a^2 \int_{-\frac{c}{a}}^{\frac{b-c}{a}} \left(\sqrt{1 + \xi^2} + \frac{1 + \xi^2}{\sqrt{1 + \xi^2}} \right) d\xi \\ &= \pi G\rho a^2 \int_{-\frac{c}{a}}^{\frac{b-c}{a}} \left(\sqrt{1 + \xi^2} + \frac{\xi^2}{\sqrt{1 + \xi^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \right) d\xi \\ &= \pi G\rho a^2 \left[\xi \sqrt{1 + \xi^2} \right]_{-\frac{c}{a}}^{\frac{b-c}{a}} + \pi G\rho a^2 \int_{-\frac{c}{a}}^{\frac{b-c}{a}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

となる。更に(4.8)式の右辺第2項において、 $\xi = \tan \theta$ なる変数変換を行うと、

$$\begin{aligned}
I_2 &= \pi G \rho a^2 \left[\xi \sqrt{1 + \xi^2} \right]_{-\frac{c}{a}}^{\frac{b-c}{a}} + \pi G \rho a^2 \int_{\tan^{-1}(-\frac{c}{a})}^{\tan^{-1}(\frac{b-c}{a})} \frac{d\theta}{\cos \theta} \\
&= \pi G \rho a^2 \left[\xi \sqrt{1 + \xi^2} \right]_{-\frac{c}{a}}^{\frac{b-c}{a}} + \pi G \rho a^2 \int_{\tan^{-1}(-\frac{c}{a})}^{\tan^{-1}(\frac{b-c}{a})} \frac{d\theta}{\cos \theta} \\
&= \pi G \rho a^2 \left[\xi \sqrt{1 + \xi^2} \right]_{-\frac{c}{a}}^{\frac{b-c}{a}} + \pi G \rho a^2 \int_{\tan^{-1}(-\frac{c}{a})}^{\tan^{-1}(\frac{b-c}{a})} \frac{\cos \theta d\theta}{1 - \sin^2 \theta} \\
&= \pi G \rho a^2 \left[\xi \sqrt{1 + \xi^2} \right]_{-\frac{c}{a}}^{\frac{b-c}{a}} + \frac{1}{2} \pi G \rho a^2 \int_{\tan^{-1}(-\frac{c}{a})}^{\tan^{-1}(\frac{b-c}{a})} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta + 1} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta - 1} \right) d\theta \tag{4.9} \\
&= \pi G \rho a^2 \left[\xi \sqrt{1 + \xi^2} \right]_{-\frac{c}{a}}^{\frac{b-c}{a}} + \frac{1}{2} \pi G \rho a^2 \left[\ln \left(\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right) \right]_{\tan^{-1}(-\frac{c}{a})}^{\tan^{-1}(\frac{b-c}{a})} \\
&= \pi G \rho (b - c) \sqrt{a^2 + (b - c)^2} + \pi G \rho c \sqrt{a^2 + c^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \pi G \rho a^2 \left[\ln \left(\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right) \right]_{\tan^{-1}(-\frac{c}{a})}^{\tan^{-1}(\frac{b-c}{a})}
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\sin(\tan^{-1} A) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + 1}} \tag{4.10}$$

及び

$$\begin{aligned}
\ln \left(\frac{1 + \sin(\tan^{-1} A)}{1 - \sin(\tan^{-1} A)} \right) &= \ln \left(\frac{1 + \frac{A}{\sqrt{A^2 + 1}}}{1 - \frac{A}{\sqrt{A^2 + 1}}} \right) = \ln \left(\frac{\sqrt{A^2 + 1} + A}{\sqrt{A^2 + 1} - A} \right) \\
&= -2 \ln \left(\sqrt{A^2 + 1} - A \right)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

が成り立つことに着目すると、

$$\begin{aligned}
I_2 &= \pi G\rho(b-c)\sqrt{a^2+(b-c)^2} + \pi G\rho c\sqrt{a^2+c^2} \\
&\quad - \pi G\rho a^2 \ln\left(\sqrt{\left(\frac{b-c}{a}\right)^2+1} - \frac{b-c}{a}\right) + \pi G\rho a^2 \ln\left(\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2+1} + \frac{c}{a}\right) \\
&= \pi G\rho\left\{(b-c)\sqrt{a^2+(b-c)^2} + c\sqrt{a^2+c^2}\right. \\
&\quad \left. - a^2 \ln\left(c-b + \sqrt{(b-c)^2+a^2}\right) + a^2 \ln\left(c + \sqrt{c^2+a^2}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

となる。(4.7)、(4.12)式を(4.6)式に適用すると、

$$\begin{aligned}
U_p &= \pi G\rho\left\{(b-c)^2 - c^2 + (b-c)\sqrt{a^2+(b-c)^2} + c\sqrt{a^2+c^2}\right. \\
&\quad \left. - a^2 \ln\left(c-b + \sqrt{(b-c)^2+a^2}\right) + a^2 \ln\left(c + \sqrt{c^2+a^2}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

が得られる。

次に円柱による引力 A_p を求める。(4.13)式より

$$\begin{aligned}
A_p &= -\frac{\partial U_p}{\partial c} \\
&= -\pi G\rho\left\{2(c-b) - 2c - \sqrt{a^2+(b-c)^2} - \frac{(b-c)^2}{\sqrt{a^2+(b-c)^2}} + \sqrt{a^2+c^2}\right. \\
&\quad \left. + \frac{c^2}{\sqrt{a^2+c^2}} - a^2 \frac{1 + \frac{c-b}{\sqrt{(b-c)^2+a^2}}}{c-b + \sqrt{(b-c)^2+a^2}} + a^2 \frac{1 + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}}{c + \sqrt{c^2+a^2}}\right\} \\
&= -\pi G\rho\left\{-2b - \frac{a^2+2(b-c)^2}{\sqrt{a^2+(b-c)^2}} + \frac{a^2+2c^2}{\sqrt{a^2+c^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2+(b-c)^2}}\right. \\
&\quad \left. + \frac{a^2}{\sqrt{a^2+c^2}}\right\} \\
&= 2\pi G\rho\left\{b + \sqrt{a^2+(b-c)^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right\}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

が得られる。特に円柱の上面 $c=b$ での引力を A_0 とすると、(4.14)式より

$$A_0 = 2\pi G\rho\left\{b + a - \sqrt{a^2+b^2}\right\} \tag{4.15}$$

となる。

最後に(4.15)式を用いて、厚さ h の無限に広いブーゲー平板による引力 A_B を求める。
(4.15)式において $b=h$ とし、 $a \rightarrow \infty$ の極限をとると、

$$\begin{aligned}
 A_B &= \lim_{a \rightarrow \infty} A_0 = \lim_{a \rightarrow \infty} 2\pi G\rho \left\{ h + a - \sqrt{a^2 + h^2} \right\} \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} 2\pi G\rho \frac{(h+a)^2 - (a^2 + h^2)}{h+a+\sqrt{a^2+h^2}} \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} 2\pi G\rho \frac{2ah}{h+a+\sqrt{a^2+h^2}} \tag{4.16} \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} 2\pi G\rho \frac{2h}{\frac{h}{a} + 1 + \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}}} = 2\pi G\rho h
 \end{aligned}$$

が得られる。 ρ として地殻の平均密度 2.67g/cm^3 を用いると、 $A_B=0.1119h \text{ mgal}$ となる。

5. 地形補正式の導出

前節では地形の重力値への影響を見積もる為、地表面は平坦であるとみなし、ジオイド面と地表面の間にある平板状の物質(ブーゲー平板)の引力を算出した。この方法は対象としている地点の周囲が平坦である場合には有効であるものの、起伏が激しい場合にはその妥当性は保証されない。Nagy(1966)は起伏の激しい地形の場合に適用できる手法として、プリズム法を提案した。プリズム法とは、地形を複数の密度一定のプリズム(直方体)で近似し、その引力によって地形の重力値への影響を評価する手法である。本節ではプリズム法による地形補正の式を導出する。但し簡単の為、1つのプリズムで地形を近似する場合について考える¹⁵。

対象となる点 P を原点にとり、プリズムの3辺が座標軸と平行になるように x 、 y 、 z 軸をとる。またプリズムの各頂点の座標を $(x_1, y_1, 0)$ 、 $(x_2, y_1, 0)$ 、 $(x_1, y_2, 0)$ 、 $(x_2, y_2, 0)$ 、 (x_1, y_1, h) 、 (x_2, y_1, h) 、 (x_1, y_2, h) 、 (x_2, y_2, h) とする。このとき点 P でのポテンシャルを U_p は

$$U_p = G\rho \int_0^h \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{5.1}$$

と表される。ここで $z=(x^2+y^2)^{1/2}\tan \theta$ なる変数変換を行うと、

$$U_p = G\rho \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \int_0^{\tan^{-1}\left(\frac{h}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)} \frac{d\theta}{\cos \theta} \right\} dx dy \tag{5.2}$$

となる。(5.2)式の θ に関する積分は(4.9)式で行なったものと基本的に同じものであるので、

¹⁵ プリズムが複数存在する場合、それらの全引力は各プリズムからの引力の重ね合わせで記述される。従って1つのプリズムからの引力の表式を求めておけば、その表式を各プリズムに適用し、その寄与を足し合わせさえすればよい。

(4.9)、(4.10)、(4.11)式の結果を利用すると、

$$\begin{aligned}
 U_p &= \frac{1}{2} G\rho \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\ln \left(\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right) \right]_0^{\tan^{-1} \left(\frac{h}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)} \right\} dx dy \\
 &= G\rho \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \ln \left(\sqrt{\frac{h^2}{x^2 + y^2} + 1} + \frac{h}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx dy \\
 &= -\frac{1}{2} G\rho \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \ln(x^2 + y^2) dx dy \\
 &\quad + G\rho \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2} + h) dx dy
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

となる。(5.3)式の右辺第1項、第2項をそれぞれ I_1 、 I_2 とする。 I_1 について、 y に関する部分積分を実行すると、

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -\frac{1}{2} G\rho \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \ln(x^2 + y^2) dx dy \\
 &= -\frac{1}{2} G\rho \int_{x_1}^{x_2} [y \ln(x^2 + y^2)]_{y_1}^{y_2} dx + G\rho \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{y^2}{x^2 + y^2} dx dy \\
 &= -\frac{1}{2} G\rho \int_{x_1}^{x_2} [y \ln(x^2 + y^2)]_{y_1}^{y_2} dx \\
 &\quad + G\rho \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} dx dy - G\rho \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} dx dy \\
 &= G\rho \int_{x_1}^{x_2} \left[-\frac{1}{2} y \ln(x^2 + y^2) + y - x \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right]_{y_1}^{y_2} dx
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

となる。また I_2 について、 y に関する部分積分を実行すると、

$$\begin{aligned}
I_2 &= G\rho \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2} + h) dx dy \\
&= G\rho \int_{x_1}^{x_2} \left[y \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2} + h) \right]_{y_1}^{y_2} dx \\
&\quad - G\rho \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} y \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2} + h} dx dy \\
&= G\rho \int_{x_1}^{x_2} \left[y \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2} + h) \right]_{y_1}^{y_2} dx \\
&\quad - G\rho \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{y^2}{x^2 + y^2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2} - h}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} dx dy \\
&= G\rho \int_{x_1}^{x_2} \left[y \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2} + h) \right]_{y_1}^{y_2} dx - G\rho \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{y^2}{x^2 + y^2} dx dy \\
&\quad + G\rho h \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{y^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} dx dy \tag{5.5} \\
&= G\rho \int_{x_1}^{x_2} \left[y \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2} + h) \right]_{y_1}^{y_2} dx \\
&\quad - G\rho \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) dx dy + G\rho h \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{y^2 dx dy}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \\
&= G\rho \int_{x_1}^{x_2} \left[y \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2} + h) - y + x \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \right]_{y_1}^{y_2} dx \\
&\quad + G\rho h \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} - G\rho h \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^2 dx dy}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \\
&= G\rho \int_{x_1}^{x_2} \left[y \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2} + h) - y + x \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \right. \\
&\quad \left. + h \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2} + y) \right]_{y_1}^{y_2} dx - G\rho h \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^2 dx dy}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}}
\end{aligned}$$

となる。ここで $r = (x^2 + y^2 + h^2)^{1/2}$ とすると、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \\
&= \frac{1}{(x^2 + y^2)r} = \frac{x^2 + z^2}{x^2 r^2 + y^2 h^2} \frac{1}{r} = \frac{r^2}{x^2 r^2 + y^2 h^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r} \right) \\
&= \frac{1}{x^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{yh}{rx}\right)^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{yh}{rx} \right) \frac{x}{h} = \frac{1}{xh} \frac{\partial}{\partial y} \tan^{-1} \left(\frac{yh}{rx} \right)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned}
I_2 &= G\rho \int_{x_1}^{x_2} \left[y \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2} + h) - y + x \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \right. \\
&\quad \left. + h \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2} + y) - x \tan^{-1}\left(\frac{yh}{rx}\right) \right]_{y_1}^{y_2} dx
\end{aligned} \tag{5.7}$$

となる。(5.3)式に(5.4)、(5.7)式を代入すると、

$$\begin{aligned}
U_p &= G\rho \int_{x_1}^{x_2} \left[-\frac{1}{2}y \ln(x^2 + y^2) + y \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2} + h) \right. \\
&\quad \left. + h \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2} + y) - x \tan^{-1}\left(\frac{yh}{rx}\right) \right]_{y_1}^{y_2} dx
\end{aligned} \tag{5.8}$$

となる。(5.8)式の積分の各項を計算すると、

$$\begin{aligned}
&\int_{x_1}^{x_2} \left[-\frac{1}{2}y \ln(x^2 + y^2) \right]_{y_1}^{y_2} dx \\
&= \left[\left[-\frac{1}{2}xy \ln(x^2 + y^2) \right]_{y_1}^{y_2} \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right]_{y_1}^{y_2} dx \\
&= \left[\left[-\frac{1}{2}xy \ln(x^2 + y^2) + xy - y^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \right]_{y_1}^{y_2} \right]_{x_1}^{x_2}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{x_1}^{x_2} \left[y \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2} + h) \right]_{y_1}^{y_2} dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} [y \ln(r + h)]_{y_1}^{y_2} dx \\
&= [xy \ln(r + h)]_{y_1}^{y_2} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{x^2 y}{r(r + h)} \right]_{y_1}^{y_2} dx \\
&= [xy \ln(r + h)]_{y_1}^{y_2} \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[-y + y \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} + \frac{x^2 y h}{(x^2 + y^2)r} \right]_{y_1}^{y_2} dx \\
&= \left[\left[xy \ln(r + h) - xy + y^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \right]_{y_1}^{y_2} \right]_{x_1}^{x_2} \\
&\quad + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{yh}{r} - y^2 \frac{\partial}{\partial x} \tan^{-1}\left(\frac{xh}{ry}\right) \right]_{y_1}^{y_2} dx \\
&= \left[\left[xy \ln(r + h) - xy + y^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + yh \ln(r + x) - y^2 \tan^{-1}\left(\frac{xh}{ry}\right) \right]_{y_1}^{y_2} \right]_{x_1}^{x_2}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{x_1}^{x_2} \left[h \ln \left(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2} + y \right) \right]_{y_1}^{y_2} dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} [h \ln(r + y)]_{y_1}^{y_2} dx \\
&= \left[[xh \ln(r + y)]_{y_1}^{y_2} \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[-h + h \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{h}\right)^2} + \frac{x^2 y h}{(x^2 + h^2)r} \right]_{y_1}^{y_2} dx \tag{5.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left[xh \ln(r + y) - xh + h^2 \tan^{-1} \left(\frac{x}{h} \right) \right]_{y_1}^{y_2} \right]_{x_1}^{x_2} \\
&\quad + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{yh}{r} - h^2 \frac{\partial}{\partial x} \tan^{-1} \left(\frac{xy}{rh} \right) \right]_{y_1}^{y_2} dx \\
&= \left[\left[xh \ln(r + y) - xh + h^2 \tan^{-1} \left(\frac{x}{h} \right) + yh \ln(r + x) - h^2 \tan^{-1} \left(\frac{xy}{rh} \right) \right]_{y_1}^{y_2} \right]_{x_1}^{x_2} \\
&\quad \int_{x_1}^{x_2} \left[-x \tan^{-1} \left(\frac{yh}{rx} \right) \right]_{y_1}^{y_2} dx \\
&= \left[\left[-\frac{x^2}{2} \tan^{-1} \left(\frac{yh}{rx} \right) \right]_{y_1}^{y_2} \right]_{x_1}^{x_2} - \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{yh}{rx}\right)^2} \frac{yh}{r^3} (r^2 + x^2) \right]_{y_1}^{y_2} dx \\
&= \left[\left[-\frac{x^2}{2} \tan^{-1} \left(\frac{yh}{rx} \right) \right]_{y_1}^{y_2} \right]_{x_1}^{x_2} - \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{yh}{r} \frac{x^2}{x^2 r^2 + y^2 h^2} (r^2 + x^2) \right]_{y_1}^{y_2} dx \\
&= \left[\left[-\frac{x^2}{2} \tan^{-1} \left(\frac{yh}{rx} \right) \right]_{y_1}^{y_2} \right]_{x_1}^{x_2} - \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{yhx^2 (x^2 + y^2) + (x^2 + h^2)}{r (x^2 + y^2)(x^2 + h^2)} \right]_{y_1}^{y_2} dx \tag{5.12} \\
&= \left[\left[-\frac{x^2}{2} \tan^{-1} \left(\frac{yh}{rx} \right) \right]_{y_1}^{y_2} \right]_{x_1}^{x_2} - \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{yh}{r} \left(\frac{x^2}{x^2 + h^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) \right]_{y_1}^{y_2} dx \\
&= \left[\left[-\frac{x^2}{2} \tan^{-1} \left(\frac{yh}{rx} \right) \right]_{y_1}^{y_2} \right]_{x_1}^{x_2} - \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{yh}{r} \left(2 - \frac{h^2}{x^2 + h^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) \right]_{y_1}^{y_2} dx \\
&= \left[\left[-\frac{x^2}{2} \tan^{-1} \left(\frac{yh}{rx} \right) - yh \ln(r + x) + \frac{h^2}{2} \tan^{-1} \left(\frac{xy}{rh} \right) + \frac{y^2}{2} \tan^{-1} \left(\frac{xh}{ry} \right) \right]_{y_1}^{y_2} \right]_{x_1}^{x_2}
\end{aligned}$$

となる。(5.9)、(5.10)、(5.11)、(5.12)式を(5.8)式に適用すると、

$$\begin{aligned}
U_p &= G\rho \left[\left[-\frac{1}{2}xy \ln(x^2 + y^2) + xy - y^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + xy \ln(r+h) - xy \right. \right. \\
&\quad + y^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + yh \ln(r+x) - y^2 \tan^{-1}\left(\frac{xh}{ry}\right) + xh \ln(r+y) - xh \\
&\quad + h^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{h}\right) + yh \ln(r+x) - h^2 \tan^{-1}\left(\frac{xy}{rh}\right) - \frac{x^2}{2} \tan^{-1}\left(\frac{yh}{rx}\right) \\
&\quad \left. \left. - yh \ln(r+x) + \frac{h^2}{2} \tan^{-1}\left(\frac{xy}{rh}\right) + \frac{y^2}{2} \tan^{-1}\left(\frac{xh}{ry}\right) \right]_{y_1}^{y_2} \right]_{x_1}^{x_2} \tag{5.13} \\
&= G\rho \left[\left[-\frac{1}{2}xy \ln(x^2 + y^2) + xy \ln(r+h) + yh \ln(r+x) + xh \ln(r+y) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{x^2}{2} \tan^{-1}\left(\frac{yh}{rx}\right) - \frac{y^2}{2} \tan^{-1}\left(\frac{xh}{ry}\right) - \frac{h^2}{2} \tan^{-1}\left(\frac{xy}{rh}\right) \right]_{y_1}^{y_2} \right]_{x_1}^{x_2}
\end{aligned}$$

となる。プリズムからの引力を A_T とすると、(5.13)式より

$$\begin{aligned}
A_T &= -\frac{\partial U_p}{\partial h} \\
&= -G\rho \left[\left[xy \frac{1 + \frac{h}{r}}{(r+h)} + y \ln(r+x) + \frac{yh^2}{(r+x)r} + x \ln(r+y) + \frac{xh^2}{(r+y)r} \right. \right. \\
&\quad - \frac{x^3y}{2r} \frac{x^2 + y^2}{r^2x^2 + y^2h^2} - \frac{xy^3}{2r} \frac{x^2 + y^2}{r^2y^2 + x^2h^2} + \frac{xyh^2}{2r} \frac{r^2 + h^2}{r^2h^2 + x^2y^2} \\
&\quad \left. \left. - h \tan^{-1}\left(\frac{xy}{rh}\right) \right]_{y_1}^{y_2} \right]_{x_1}^{x_2} \tag{5.14} \\
&= -G\rho \left[\left[x \ln(r+y) + y \ln(r+x) - h \tan^{-1}\left(\frac{xy}{rh}\right) \right. \right. \\
&\quad + \frac{xy}{r} + \frac{yh^2}{(r+x)r} + \frac{xh^2}{(r+y)r} \\
&\quad \left. \left. - \frac{x^3y}{2r} \frac{x^2 + y^2}{r^2x^2 + y^2h^2} - \frac{xy^3}{2r} \frac{x^2 + y^2}{r^2y^2 + x^2h^2} + \frac{xyh^2}{2r} \frac{r^2 + h^2}{r^2h^2 + x^2y^2} \right]_{y_1}^{y_2} \right]_{x_1}^{x_2}
\end{aligned}$$

となる。ここで(5.14)式の右辺第4～9項を変形すると、

$$\begin{aligned}
& -G\rho \left[\frac{xy}{r} + \frac{yh^2}{(r+x)r} + \frac{xh^2}{(r+y)r} \right. \\
& \left. - \frac{x^3y}{2r} \frac{x^2+y^2}{r^2x^2+y^2h^2} - \frac{xy^3}{2r} \frac{x^2+y^2}{r^2y^2+x^2h^2} + \frac{xyh^2}{2r} \frac{r^2+h^2}{r^2h^2+x^2y^2} \right]_{y_1}^{y_2} \Big|_{x_1}^{x_2} \\
& = -G\rho \left[\frac{xy}{r} + \frac{yh^2(r-x)}{(r^2-x^2)r} + \frac{xh^2(r-y)}{(r^2-y^2)r} \right. \\
& \left. - \frac{x^3y}{2r} \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)(x^2+h^2)} - \frac{xy^3}{2r} \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)(y^2+h^2)} \right. \\
& \left. + \frac{xyh^2}{2r} \frac{(x^2+h^2)+(y^2+h^2)}{(x^2+h^2)(y^2+h^2)} \right]_{y_1}^{y_2} \Big|_{x_1}^{x_2} \\
& = -G\rho \left[\frac{xy}{r} + \frac{yh^2(r-x)}{(y^2+h^2)r} + \frac{xh^2(r-y)}{(x^2+h^2)r} \right. \\
& \left. - \frac{x^3y}{2r} \frac{1}{(x^2+h^2)} - \frac{xy^3}{2r} \frac{1}{(y^2+h^2)} + \frac{xyh^2}{2r} \left(\frac{1}{x^2+h^2} + \frac{1}{y^2+h^2} \right) \right]_{y_1}^{y_2} \Big|_{x_1}^{x_2} \tag{5.15} \\
& = -G\rho \left[\frac{xy}{r} + \frac{yh^2}{y^2+h^2} - \frac{xyh^2}{(y^2+h^2)r} + \frac{xh^2}{x^2+h^2} - \frac{xyh^2}{(x^2+h^2)r} \right. \\
& \left. - \frac{x^3y}{2r} \frac{1}{(x^2+h^2)} - \frac{xy^3}{2r} \frac{1}{(y^2+h^2)} + \frac{xyh^2}{2r} \left(\frac{1}{x^2+h^2} + \frac{1}{y^2+h^2} \right) \right]_{y_1}^{y_2} \Big|_{x_1}^{x_2} \\
& = -G\rho \left[\frac{xy}{r} + \frac{xh^2}{x^2+h^2} + \frac{yh^2}{y^2+h^2} - \frac{xyh^2+x^3y}{2(x^2+h^2)r} - \frac{xyh^2+xy^3}{2(y^2+h^2)r} \right]_{y_1}^{y_2} \Big|_{x_1}^{x_2} \\
& = -G\rho \left[\frac{xy}{r} + \frac{xh^2}{x^2+h^2} + \frac{yh^2}{y^2+h^2} - \frac{xy}{2r} - \frac{xy}{2r} \right]_{y_1}^{y_2} \Big|_{x_1}^{x_2} \\
& = -G\rho \left[\frac{xh^2}{x^2+h^2} + \frac{yh^2}{y^2+h^2} \right]_{y_1}^{y_2} \Big|_{x_1}^{x_2} = 0
\end{aligned}$$

となる。従って(5.14)式は最終的に以下のような形で書ける。

$$A_T = -G\rho \left[x \ln(r+y) + y \ln(r+x) - h \tan^{-1} \left(\frac{xy}{rh} \right) \right]_{y_1}^{y_2} \Big|_{x_1}^{x_2} \tag{5.16}$$

付録 A : (1.21)、(1.83)式の導出

先ず(1.83)式の導出を行う。ポテンシャル $W(u, \beta, \lambda)$ の勾配 ∇W は、任意の微小変位ベクトルを $d\mathbf{r}$ 、それに対応する W の微小変化を dW とすると、以下の式によって定義される。

$$\nabla W \cdot d\mathbf{r} = dW \quad (\text{A.1})$$

楕円座標系 (u, β, λ) における基本ベクトルを $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\lambda$ 、スケールファクターを h_u, h_β, h_λ とすると、微小変位ベクトル $d\mathbf{r}$ は次のように表される。

$$d\mathbf{r} = h_u du \mathbf{e}_u + h_\beta d\beta \mathbf{e}_\beta + h_\lambda d\lambda \mathbf{e}_\lambda \quad (\text{A.2})$$

また W の微小変化 dW は

$$dW = \frac{\partial W}{\partial u} du + \frac{\partial W}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial W}{\partial \lambda} d\lambda \quad (\text{A.3})$$

と表される。勾配 ∇W の u, β, λ 方向の成分をそれぞれ $\gamma_u, \gamma_\beta, \gamma_\lambda$ とすると、

$$\nabla W = \gamma_u \mathbf{e}_u + \gamma_\beta \mathbf{e}_\beta + \gamma_\lambda \mathbf{e}_\lambda \quad (\text{A.4})$$

となる。楕円座標系は直交座標系であり、異なる基本ベクトルの内積がゼロになることに注意して(A.1)式の左辺を書き下すと、

$$\begin{aligned} \nabla W \cdot d\mathbf{r} &= (\gamma_u \mathbf{e}_u + \gamma_\beta \mathbf{e}_\beta + \gamma_\lambda \mathbf{e}_\lambda) \cdot (h_u du \mathbf{e}_u + h_\beta d\beta \mathbf{e}_\beta + h_\lambda d\lambda \mathbf{e}_\lambda) \\ &= \gamma_u h_u du + \gamma_\beta h_\beta d\beta + \gamma_\lambda h_\lambda d\lambda \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

となる。従って(A.1)、(A.3)、(A.5)式より

$$\left(\gamma_u h_u - \frac{\partial W}{\partial u} \right) du + \left(\gamma_\beta h_\beta - \frac{\partial W}{\partial \beta} \right) d\beta + \left(\gamma_\lambda h_\lambda - \frac{\partial W}{\partial \lambda} \right) d\lambda = 0 \quad (\text{A.6})$$

となる。(A.6)式は任意の微小変位 $du, d\beta, d\lambda$ について恒等的に成り立つので、各微小変位に対する係数は全てゼロとならなければならない。以上より、

$$\gamma_u = \frac{1}{h_u} \frac{\partial W}{\partial u}, \gamma_\beta = \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial W}{\partial \beta}, \gamma_\lambda = \frac{1}{h_\lambda} \frac{\partial W}{\partial \lambda} \quad (\text{A.7})$$

が得られ、(1.83)式が導かれる。

次に(1.21)式の導出を行う。 W のラプラシアン $\nabla^2 W$ とは、 ∇W の発散 $\nabla \cdot \nabla W$ のことを指す。そこで先ずラプラシアンを求める為の準備として、楕円座標系における任意のベクトル \mathbf{A} の発散 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ の具体的な表式を導く。発散は次式によって定義される。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\Delta V} \iint \mathbf{A} \cdot n dS \quad (\text{A.8})$$

ここで ΔV は微小体積、 \mathbf{n} は微小体積要素表面における外向き単位法線ベクトルであり、面積分は微小体積要素表面について行うものとする。楕円座標系において、座標を $u \rightarrow u + \Delta u, \beta \rightarrow \beta + \Delta \beta, \lambda \rightarrow \lambda + \Delta \lambda$ とずらすことで作られる微小体積要素 ΔV について考える。このとき

$$\Delta V = h_u \Delta u h_\beta \Delta \beta h_\lambda \Delta \lambda = h_u h_\beta h_\lambda \Delta u \Delta \beta \Delta \lambda \quad (\text{A.9})$$

と表される。次に微小体積要素表面での面積分について考える。楕円座標系における \mathbf{A} の各成分を A_u 、 A_β 、 A_λ とする。このとき \mathbf{n} が u 、 β 、 λ の座標曲線と平行な面において、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ はそれぞれ A_u 、 A_β 、 A_λ となる。微小体積要素の各面の面積は微小であるので、面積分の被積分関数 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ は面の中心における値で評価することができる。このとき面積分は

$$\begin{aligned}
& \iint \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \\
&= [A_u h_\beta h_\lambda] \left(u + \Delta u, \beta + \frac{\Delta \beta}{2}, \lambda + \frac{\Delta \lambda}{2} \right) \Delta \beta \Delta \lambda \\
&- [A_u h_\beta h_\lambda] \left(u, \beta + \frac{\Delta \beta}{2}, \lambda + \frac{\Delta \lambda}{2} \right) \Delta \beta \Delta \lambda \\
&+ [A_\beta h_u h_\lambda] \left(u + \frac{\Delta u}{2}, \beta + \Delta \beta, \lambda + \frac{\Delta \lambda}{2} \right) \Delta u \Delta \lambda \quad (\text{A.10}) \\
&- [A_\beta h_u h_\lambda] \left(u + \frac{\Delta u}{2}, \beta, \lambda + \frac{\Delta \lambda}{2} \right) \Delta u \Delta \lambda \\
&+ [A_\lambda h_u h_\beta] \left(u + \frac{\Delta u}{2}, \beta + \frac{\Delta \beta}{2}, \lambda + \Delta \lambda \right) \Delta u \Delta \beta \\
&- [A_\lambda h_u h_\beta] \left(u + \frac{\Delta u}{2}, \beta + \frac{\Delta \beta}{2}, \lambda \right) \Delta u \Delta \beta
\end{aligned}$$

となる。ここで(A.10)式の右辺の各項を (u, β, λ) の周りにテーラー展開し、2次以上の項を十分小さいものとして無視すると、

$$\begin{aligned}
& \iint \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \\
& \approx \left\{ A_u h_\beta h_\lambda + \frac{\partial(A_u h_\beta h_\lambda)}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial(A_u h_\beta h_\lambda) \Delta \beta}{\partial \beta} \frac{\Delta \beta}{2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial(A_u h_\beta h_\lambda) \Delta \lambda}{\partial \lambda} \frac{\Delta \lambda}{2} \right\} \Delta \beta \Delta \lambda \\
& - \left\{ A_u h_\beta h_\lambda + \frac{\partial(A_u h_\beta h_\lambda) \Delta \beta}{\partial \beta} \frac{\Delta \beta}{2} + \frac{\partial(A_u h_\beta h_\lambda) \Delta \lambda}{\partial \lambda} \frac{\Delta \lambda}{2} \right\} \Delta \beta \Delta \lambda \\
& + \left\{ A_\beta h_u h_\lambda + \frac{\partial(A_\beta h_u h_\lambda) \Delta u}{\partial u} \frac{\Delta u}{2} + \frac{\partial(A_\beta h_u h_\lambda) \Delta \beta}{\partial \beta} \Delta \beta \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial(A_\beta h_u h_\lambda) \Delta \lambda}{\partial \lambda} \frac{\Delta \lambda}{2} \right\} \Delta u \Delta \lambda \tag{A.11} \\
& - \left\{ A_\beta h_u h_\lambda + \frac{\partial(A_\beta h_u h_\lambda) \Delta u}{\partial u} \frac{\Delta u}{2} + \frac{\partial(A_\beta h_u h_\lambda) \Delta \lambda}{\partial \lambda} \frac{\Delta \lambda}{2} \right\} \Delta u \Delta \lambda \\
& + \left\{ A_\lambda h_u h_\beta + \frac{\partial(A_\lambda h_u h_\beta) \Delta u}{\partial u} \frac{\Delta u}{2} + \frac{\partial(A_\lambda h_u h_\beta) \Delta \beta}{\partial \beta} \frac{\Delta \beta}{2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial(A_\lambda h_u h_\beta) \Delta \lambda}{\partial \lambda} \Delta \lambda \right\} \Delta u \Delta \beta \\
& - \left\{ A_\lambda h_u h_\beta + \frac{\partial(A_\lambda h_u h_\beta) \Delta u}{\partial u} \frac{\Delta u}{2} + \frac{\partial(A_\lambda h_u h_\beta) \Delta \beta}{\partial \beta} \frac{\Delta \beta}{2} \right\} \Delta u \Delta \beta \\
& = \left\{ \frac{\partial(A_u h_\beta h_\lambda)}{\partial u} + \frac{\partial(A_\beta h_u h_\lambda)}{\partial \beta} + \frac{\partial(A_\lambda h_u h_\beta)}{\partial \lambda} \right\} \Delta u \Delta \beta \Delta \lambda
\end{aligned}$$

となる。(A.9)、(A.11)式を(A.8)式に適用すると、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_\beta h_\lambda} \left\{ \frac{\partial(A_u h_\beta h_\lambda)}{\partial u} + \frac{\partial(A_\beta h_u h_\lambda)}{\partial \beta} + \frac{\partial(A_\lambda h_u h_\beta)}{\partial \lambda} \right\} \tag{A.12}$$

となり、発散の具体的な表式が得られる。

最後に以上の結果を用いて W のラプラシアン of の具体的な表式を導く。(A.12)式において $\mathbf{A} = \nabla W$ とし、(A.7)式を適用すると、

$$\nabla^2 W = \frac{1}{h_u h_\beta h_\lambda} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_\beta h_\lambda}{h_u} \frac{\partial W}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{h_u h_\lambda}{h_\beta} \frac{\partial W}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{h_u h_\beta}{h_\lambda} \frac{\partial W}{\partial \lambda} \right) \right\} \tag{A.13}$$

となり、(1.21)式が導かれる。

付録 B : ルジャンドル関数、ルジャンドル陪関数に関する諸公式の導出

本付録ではルジャンドル微分方程式(2)(B.8)から出発し、本文書で用いたルジャンドル関数、ルジャンドル陪関数に関する諸公式の導出を行う。本付録の構成については、以下の通

りである。

- ・ 第一種ルジャンドル関数 P_n の導出
- ・ P_n の漸化式の導出
- ・ P_n の導関数 P_n' の P_n による級数展開式の導出
- ・ 第二種ルジャンドル関数 Q_n の導出
- ・ Q_n の積分表示式の導出
- ・ Q_n の積分表示式から得られる別表式の導出
- ・ ルジャンドル陪関数の導出

なお本付録を作成するに当たっては、主に寺沢(2005)、蓬田(2011)を参照した。

B. 1 第一種ルジャンドル関数 P_n の導出

本節では先ずルジャンドル微分方程式(1.50)において、特別な場合として $m=0$ の場合を考える。即ち

$$(1-t^2)g''(t) - 2tg'(t) + n(n+1)g(t) = 0 \quad (\text{B.1})$$

の解を求める。解の形としてべき級数を仮定し、

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \quad (\text{B.2})$$

と置く。このとき

$$g'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} t^k \quad (\text{B.3})$$

$$g''(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) c_{k+1} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) c_{k+2} t^k \quad (\text{B.4})$$

となるので、(B.2)、(B.3)、(B.4)式を(B.1)式に代入すると、

$$\begin{aligned} 0 &= (1-t^2) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) c_{k+2} t^k - 2t \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} t^k \\ &\quad + n(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) c_{k+2} t^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k-1) k c_k t^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} k c_k t^k \\ &\quad + n(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

となる。ここで(B.5)式が成り立つ為には、各べき t^k の係数が全てゼロにならなければならない。このとき

$$\begin{aligned} &(k+1)(k+2) c_{k+2} - (k-1) k c_k - 2k c_k + n(n+1) c_k \\ &= (k+1)(k+2) c_{k+2} + \{n(n+1) - k(k+1)\} c_k = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

とならなければならない。(B.6)式を c_{k+2} について整理すると、

$$c_{k+2} = -\frac{\{n(n+1) - k(k+1)\}}{(k+1)(k+2)}c_k = -\frac{(k+n+1)(n-k)}{(k+1)(k+2)}c_k \quad (\text{B.7})$$

となり、べき級数解の係数に関する漸化式が得られる。(B.7)式よりべき級数の収束性を調べると、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{k+2}}{c_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+n+1)(k-n)}{(k+1)(k+2)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{n+1}{k}\right)\left(1 - \frac{n}{k}\right)}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{2}{k}\right)} = 1 \quad (\text{B.8})$$

となる。即ち、解がべきの無限級数であるとすれば、 $t = \pm 1$ で発散してしまうことになる。解の発散を回避する為には、ある k において(B.7)式の右辺の係数がゼロとなり、解が多項式となればよい。このことから $n=k$ または $n=-k-1$ であれば良いことが分かる。即ち解が発散しない為には少なくとも n は整数でなければならない。また $n(n+1)$ は $n \rightarrow -n-1$ なる変換に対して不変であるので、 n を正の整数に限定しても一般性は失われない。また(B.7)式はある係数とそれよりも次数が 2 小さい係数の関係式であるので、次数が偶数である係数の関係式は次数が奇数である係数の関係式と独立である。従って、 n が偶数である場合、次数が偶数の項は有限で打ち切られるものの、次数が奇数の項は無限に続いてしまうことになる。また n が奇数である場合、次数が奇数の項は有限で打ち切られるものの、次数が偶数の項は無限に続いてしまうことになる。この問題を回避する為には、 n が偶数(奇数)の場合に次数が奇数(偶数)の係数は全てゼロであれば良い。以上をまとめると、解が発散しない為の条件は次のいずれかとなる。

(i) n (および k)が偶数かつ $c_1=c_3=\dots=0$

(ii) n (および k)が奇数かつ $c_0=c_2=\dots=0$

先ず (i) の場合について(B.7)式より c_k の具体的表式を求める。 $k \geq n$ の場合には $c_{k+2}=0$ となる。一方 $k < n$ の場合は、

$$\begin{aligned} c_k &= -\frac{(n+k-1)(n-k+2)}{(k-1)k}c_{k-2} \\ &= (-1)^2 \frac{(n+k-1)(n+k-3)(n-k+2)(n-k+4)}{(k-3)(k-2)(k-1)k}c_{k-4} \\ &= (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{(n+k-1)(n+k-3)\dots(n+1)(n-k+2)(n-k+4)\dots n}{k!}c_0 \\ &= \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}(n+k)!}{k!n!} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{2^{\frac{k}{2}}\left(\frac{n+k}{2}\right)!} \frac{2^{\frac{k}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!}c_0 \\ &= \frac{\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2}{n!} (-1)^{\frac{n}{2}}c_0(-1)^r \frac{(2n-2r)!}{(n-r)!r!(n-2r)!} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

となる。但し式変形の最後で $k=n-2r$ と置いた。次に (ii) の場合について c_k の具体的表式

を求める。 $k \geq n$ の場合には $c_{k+2}=0$ となる。一方 $k < n$ の場合は、

$$\begin{aligned}
c_k &= -\frac{(n+k-1)(n-k+2)}{(k-1)k}c_{k-2} \\
&= (-1)^2 \frac{(n+k-1)(n+k-3)(n-k+2)(n-k+4)}{(k-3)(k-2)(k-1)k}c_{k-4} \\
&= (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{(n+k-1)(n+k-3)\cdots(n+2)(n-k+2)\cdots(n-1)}{k!}c_1 \\
&= \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}(n+k)!}{k!} \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{n!} \frac{2^{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{2^{\frac{k+1}{2}}\left(\frac{n+k}{2}\right)!} \frac{1}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!}c_0 \\
&= \frac{\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2}{2(n!)} (-1)^{\frac{n-1}{2}}c_1(-1)^r \frac{(2n-2r)!}{(n-r)!r!(n-2r)!}
\end{aligned} \tag{B.10}$$

となる。但し式変形の最後で $k=n-2r$ と置いた。正の整数 n に対応する解を $P_n(t)$ とし、その比例係数を A_n とすると、(B.9)、(B.10)式より

$$P_n(t) = A_n \sum_{r=0}^{2r \leq n} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{(n-r)!r!(n-2r)!} t^{n-2r} \tag{B.11}$$

となる。(B.11)式は n 次の多項式であり、ルジャンドル多項式とも呼ばれる。一般にルジャンドル多項式の比例係数 A_n は $P_n(1)=1$ となるように規格化される。以下 A_n を定める為、(B.11)式の右辺を書き換える。 $(t^2-1)^n$ という関数の二項展開を考えると、

$$(t^2-1)^n = \sum_{r=0}^n \frac{n!}{(n-r)!r!} t^{2(n-r)} (-1)^r \tag{B.12}$$

となる。(B.12)の両辺を t で n 回微分すると、 $2(n-r) \geq n$ 、即ち $2r \leq n$ となる項だけ残り、

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t^2-1)^n &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \sum_{r=0}^n \frac{n!}{(n-r)!r!} t^{2(n-r)} (-1)^r \\
&= \sum_{r=0}^{2r \leq n} (-1)^r \frac{n!}{(n-r)!r!} \frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!} t^{n-2r}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

となる。(B.13)式を用いると、(B.11)式は次のように書き換えられる。

$$P_n(t) = \frac{A_n}{n!} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t^2-1)^n \tag{B.14}$$

(B.14)式で $t=1$ とすると、

$$P_n(1) = \frac{A_n}{n!} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t+1)^n (t-1)^n \Big|_{t=1} = 1 \tag{B.15}$$

となる。(B.15)式の中辺において、値がゼロとならないのは $(t-1)$ を含まない項、即ち $(t+1)^n$ に比例する項のみであるので、

$$P_n(1) = \frac{A_n}{n!} n! (t+1)^n|_{t=1} = A_n 2^n = 1, \quad A_n = \frac{1}{2^n} \quad (\text{B.16})$$

となる。(B.16)式を(B.11)、(B.14)式に適用すると、

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{2r \leq n} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{(n-r)! r! (n-2r)!} t^{n-2r} \quad (\text{B.17})$$

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dt} \right)^n (t^2 - 1)^n \quad (\text{B.18})$$

が得られる。(B.18)式はロドリゲスの公式と呼ばれる。

B. 2 ルジャンドル多項式 P_n の漸化式の導出

本付録の後の節において、次数の異なるルジャンドル多項式どうしの漸化式が必要となる。そこで本節では次の3つのルジャンドル多項式の漸化式を導出しておく。

$$P'_n(t) = nP_{n-1}(t) + tP'_{n-1}(t) \quad (\text{B.19})$$

$$P'_n(t) - P'_{n-2}(t) = (2n-1)P_{n-1}(t) \quad (\text{B.20})$$

$$(t^2 - 1)P'_n(t) = nP_n(t) - nP_{n-1}(t) \quad (\text{B.21})$$

先ず(B.19)式の導出を行う。(B.17)式より

$$P'_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{2r \leq n-1} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{(n-r)! r! (n-2r-1)!} t^{n-2r-1} \quad (\text{B.22})$$

$$nP_{n-1}(t) = \frac{n}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{2r \leq n-1} (-1)^r \frac{(2n-2r-2)!}{(n-r-1)! r! (n-2r-1)!} t^{n-2r-1} \quad (\text{B.23})$$

$$tP'_{n-1}(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{2r \leq n-1} (-1)^r \frac{(2n-2r-2)!}{(n-r-1)! r! (n-2r-2)!} t^{n-2r-1} \quad (\text{B.24})$$

となる。(B.23)、(B.24)式の辺々を加えると、

$$\begin{aligned} & nP_{n-1}(t) + tP'_{n-1}(t) \\ &= \frac{n}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{2r \leq n-1} (-1)^r \frac{(2n-2r-2)!}{(n-r-1)! r! (n-2r-1)!} t^{n-2r-1} \\ & \quad + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{2r \leq n-1} (-1)^r \frac{(2n-2r-2)!}{(n-r-1)! r! (n-2r-2)!} t^{n-2r-1} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{2r \leq n-1} (-1)^r \frac{(2n-2r-2)!}{(n-r-1)! r! (n-2r-1)!} (n+n-2r-1) t^{n-2r-1} \quad (\text{B.25}) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{2r \leq n-1} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{(2n-2r)(n-r-1)! r! (n-2r-1)!} t^{n-2r-1} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{2r \leq n} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{(n-r)! r! (n-2r-1)!} t^{n-2r-1} \end{aligned}$$

となる。(B.22)、(B.25)式より(B.19)式が得られる。

次に(B.20)式を導く。(B.17)式より、

$$P'_{n-2}(t) = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{r=0}^{2r \leq n-3} (-1)^r \frac{(2n-2r-4)!}{(n-r-2)! r! (n-2r-3)!} t^{n-2r-3} \quad (\text{B.26})$$

となる。(B.22)、(B.26)式より、

$$\begin{aligned} & P'_n(t) - P'_{n-2}(t) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{2r \leq n-1} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{(n-r)! r! (n-2r-1)!} t^{n-2r-1} \\ &\quad - \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{r=0}^{2r \leq n-3} (-1)^r \frac{(2n-2r-4)!}{(n-r-2)! r! (n-2r-3)!} t^{n-2r-3} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{2r \leq n-1} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{(n-r)! r! (n-2r-1)!} t^{n-2r-1} \\ &\quad - \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{r=1}^{2r \leq n-1} (-1)^{r-1} \frac{(2n-2r-2)!}{(n-r-1)! (r-1)! (n-2r-1)!} t^{n-2r-1} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{2r \leq n-1} (-1)^r \frac{(2n-2r)(2n-2r-1)(2n-2r-2)!}{(n-r)(n-r-1)! r! (n-2r-1)!} t^{n-2r-1} \\ &\quad + \frac{4}{2^n} \sum_{r=0}^{2r \leq n-1} (-1)^r \frac{r(2n-2r-2)!}{(n-r-1)! r! (n-2r-1)!} t^{n-2r-1} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{2r \leq n-1} \left\{ \frac{(2n-2r)(2n-2r-1)}{n-r} \right. \\ &\quad \left. + 4r \right\} (-1)^r \frac{(2n-2r-2)!}{(n-r-1)! r! (n-2r-1)!} t^{n-2r-1} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{2r \leq n-1} (4n-2)(-1)^r \frac{(2n-2r-2)!}{(n-r-1)! r! (n-2r-1)!} t^{n-2r-1} \\ &= (2n-1) \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{2r \leq n-1} (-1)^r \frac{(2n-2r-2)!}{(n-r-1)! r! (n-2r-1)!} t^{n-2r-1} \\ &= (2n-1)P_{n-1}(t) \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

となり、(B.20)式が導かれる。

最後に(B.21)式を導く。(B.20)式において $n \rightarrow n+1$ と置き換え、両辺に t を掛けると、

$$tP'_{n+1}(t) - tP'_{n-1}(t) = (2n+1)tP_n(t) \quad (\text{B.28})$$

となる。(B.19)式において $n \rightarrow n+1$ と置き換えると、

$$P'_{n+1}(t) = (n+1)P_n(t) + tP'_n(t) \quad (\text{B.29})$$

となる。(B.19)、(B.29)式を用いて、(B.28)式の P'_{n+1} 、 P'_{n-1} を消去すると、

$$t\{(n+1)P_n(t) + tP'_n(t)\} - \{P'_n(t) - nP_{n-1}(t)\} = (2n+1)tP_n(t) \quad (\text{B.30})$$

となる。(B.30)式を整理すると、

$$(t^2 - 1)P'_n(t) = ntP_n(t) - nP_{n-1}(t) \quad (\text{B.31})$$

となり、(B.21)式が得られる。

B. 3 P'_n のルジャンドル多項式展開の導出

本付録の後の節において、 P'_n のルジャンドル多項式展開が必要となる。そこで本節では、先ずルジャンドル多項式の直交性

$$\int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t)dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \quad (\text{B.32})$$

を導き、それを利用して P'_n のルジャンドル多項式展開を導く。

ロドリゲスの公式(B.18)を用いると、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t)dt &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2^m m!} \left(\frac{d}{dt}\right)^m (t^2-1)^m \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t^2-1)^n dt \\ &= \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 \left(\frac{d}{dt}\right)^m (t^2-1)^m \frac{1}{2^n} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t^2-1)^n dt \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

となる。 $m < n (m \neq n)$ の場合を考える。(B.33)において部分積分を一度実行すると、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t)dt &= \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^m (t^2-1)^m \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} (t^2-1)^n \right]_{-1}^1 \\ &\quad - \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} (t^2-1)^m \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} (t^2-1)^n dt \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

となる。(B.34)式の右辺第1項について、

$$(t^2-1)^n = (t+1)^n (t-1)^n \quad (\text{B.35})$$

となるので、これを t で k 回 ($k < n$) 微分して現れる全ての項に $(t+1)$ と $(t-1)$ の項が含まれる。従って

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k (t^2-1)^n \Big|_{t=\pm 1} = 0 \quad (\text{B.36})$$

が成り立つ。(B.36)式を用いて(B.34)式の右辺において繰り返し部分積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t)dt &= -\frac{1}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} (t^2-1)^m \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} (t^2-1)^n dt \\ &= (-1)^2 \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+2} (t^2-1)^m \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-2} (t^2-1)^n dt \\ &= (-1)^m \frac{(2m)!}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-m} (t^2-1)^n dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

となる。一方、 $m=n$ の場合、

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 P_n(t)P_n(t)dt \\
&= -\frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 \left(\frac{d}{dt}\right)^{n+1} (t^2-1)^n \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} (t^2-1)^n dt \\
&= (-1)^2 \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 \left(\frac{d}{dt}\right)^{n+2} (t^2-1)^n \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-2} (t^2-1)^n dt \quad (\text{B.38}) \\
&= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (t^2-1)^n dt \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt
\end{aligned}$$

となる。ここで(B.35)式が成り立つことに着目し、(B.38)式において繰り返し部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 P_n(t)P_n(t)dt \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (1+t)^n(1-t)^n dt \quad (\text{B.39}) \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left\{ \left[\frac{1}{n+1} (1+t)^{n+1}(1-t)^n \right]_{-1}^1 \right. \\
&\quad \left. + \int_{-1}^1 \frac{n}{n+1} (1+t)^{n+1}(1-t)^{n-1} dt \right\} \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \int_{-1}^1 (1+t)^{2n} dt = \frac{1}{2^{2n}} \left[\frac{(1+t)^{2n+1}}{2n+1} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{2n+1}
\end{aligned}$$

となる。(B.37)、(B.39)式をまとめて表記すると、(B.32)式が得られる。

以下、 P'_n のルジャンドル多項式展開を求める。 P'_n は $n-1$ 次の多項式となるので、

$$P'_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k P_k(t) \quad (\text{B.40})$$

と表される。(B.40)式の両辺に P_m を掛け、 $t=-1$ から $t=1$ まで積分すると、(B.32)式より、

$$C_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 P'_n(t)P_k(t)dt \quad (\text{B.41})$$

となる。また $n > k$ であることに注意すると、(B.37)式を導いたのと同様の手続きによって次式が得られる。

$$\int_{-1}^1 P_n(t)P_k'(t)dt = (-1)^{k+1} \frac{(2k)!}{2^{n+k}n!k!} \int_{-1}^1 \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-k-1} (t^2-1)^n dt = 0 \quad (\text{B.42})$$

(B.41)、(B.42)式より

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \{P_n'(t)P_k(t) + P_n(t)P_k'(t)\}dt = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d}{dt} \{P_n(t)P_k(t)\}dt \\ &= \frac{2k+1}{2} [P_n(t)P_k(t)]_{-1}^1 \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

となる。定義より $P_n(1)=1$ 、 $P_k(1)=1$ であるので、 $P_n(1)P_k(1)=1$ である。また n が偶数ならば $P_n(-1)=1$ 、 n が奇数ならば $P_n(-1)=-1$ となる。従って $n-k$ が偶数ならば $P_n(-1)P_k(-1)=1$ 、 $n-k$ が奇数ならば $P_n(-1)P_k(-1)=-1$ となる。以上より $n-k$ が偶数の場合には C_k がゼロとなるので、

$$\begin{aligned} P_n'(t) &= (2n-1)P_{n-1}(t) + (2n-5)P_{n-3}(t) + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (2n-4m-1)P_{n-2m-1}(t) \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

が得られる。

B. 4 第二種ルジャンドル関数 Q_n の導出

B. 1～3節では、ルジャンドル微分方程式の基本解のうち、 $t=\pm 1$ で発散しない第一種ルジャンドル関数(ルジャンドル多項式) P_n とその関連公式を導いた。本節ではもう 1 つの基本解として、 $|t|>1$ で収束する第二種ルジャンドル関数 Q_n の具体的表式を導く。

(B.1)式において $t=1/z$ なる変数変換を行うと、

$$\frac{dg(z)}{dt} = \frac{dz}{dt} \frac{dg(z)}{dz} = -\frac{1}{t^2} \frac{dg(z)}{dz} = -z^2 \frac{dg(z)}{dz} \quad (\text{B.45})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2g(z)}{dt^2} &= \frac{dz}{dt} \frac{d}{dz} \left(\frac{dg(z)}{dt} \right) = -z^2 \frac{d}{dz} \left(-z^2 \frac{dg(z)}{dz} \right) \\ &= z^2 \left\{ 2z \frac{dg(z)}{dz} + \frac{d^2g(z)}{dz^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

となるので、

$$(z^2-1)z^2 \frac{d^2g(z)}{dz^2} - 2z^3 \frac{dg(z)}{dz} + n(n+1)g(z) = 0 \quad (\text{B.47})$$

となる。ここで(B.47)式は $z=0$ に確定特異点を持つので、 λ を定数として、べき級数解

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\lambda} \quad (\text{B.48})$$

を仮定する。(B.48)式を(B.47)式に代入し、各べきの項の係数がゼロになるよう係数を定める。先ず最低次 z^λ の項の係数を取り出すと、

$$-\lambda(\lambda-1) + n(n+1) = -(\lambda+n)(\lambda-n-1) = 0 \quad (\text{B.49})$$

となる。即ち $\lambda=-n$ または $\lambda=n+1$ となることが分かる。 $\lambda=-n$ の場合について係数の漸化式を求めると、(B.7)式と同じ形式となる。従って $\lambda=-n$ の場合の解はルジャンドル多項式 P_n に対応する。そこで以下では $\lambda=n+1$ の場合について詳細に調べる。このとき(B.48)式を(B.47)式に代入すると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+n+1)(k+n) z^{k+n+3} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+n+1)(k+n) z^{k+n+1} \\ + 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+n+1) z^{k+n+3} + n(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+n+1} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

となる。(B.50)式において最低次の項 z^{n+1} の係数を取り出すと、

$$-n(n+1)c_0 + n(n+1)c_0 = 0 \quad (\text{B.51})$$

となり、自動的にゼロとなる。次に z^{n+2} の係数を取り出すと、

$$-(n+1)(n+2)c_1 + n(n+1)c_1 = -2(n+1)c_1 = 0 \quad (\text{B.52})$$

となる。従って

$$c_1 = 0 \quad (\text{B.53})$$

が得られる。さらに z^{k+n+3} ($k \geq 0$) の係数を取り出すと、

$$\begin{aligned} (k+n+1)(k+n)c_k - (k+n+3)(k+n+2)c_{k+2} + 2(k+n+1)c_k \\ + n(n+1)c_{k+2} \\ = (k+n+1)(k+n+2)c_k - (k+2)(k+2n+3)c_{k+2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

となる。(B.54)式を c_{k+2} について整理すると、

$$c_{k+2} = \frac{(k+n+1)(k+n+2)}{(k+2)(k+2n+3)} c_k \quad (\text{B.55})$$

となる。(B.53)、(B.55)式より、

$$c_1 = c_3 = c_5 = \dots = 0 \quad (\text{B.56})$$

となる。即ち k が奇数である係数は全てゼロとなり、 k が偶数である係数のみが生き残る。そこで(B.55)式において $k=2m$ と置くと、

$$\begin{aligned}
c_{2m} &= \frac{(2m+n-1)(2m+n)}{2m(2m+2n+1)} c_{2m-2} \\
&= \frac{(2m+n-3)(2m+n-2)(2m+n-1)(2m+n)}{2^2 m(m-1)(2m+2n+1)(2m+2n-1)} c_{2m-4} \\
&= \frac{(2m+n)!}{n!} \frac{1}{2^m m!} \frac{(2n+1)!}{(2m+2n+1)!} \frac{(n+m)!}{n!} c_0 \\
&= \frac{(n+m)!(2m+n)!(2n+1)!}{(n!)^2 m! (2m+2n+1)!} c_0
\end{aligned} \tag{B.57}$$

となる。(B.48)、(B.57)式より

$$Q_n(t) = c_0 t^{-n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!(2m+n)!(2n+1)!}{(n!)^2 m! (2m+2n+1)!} t^{-2m} \tag{B.58}$$

が得られる。

(B.58)に現れる係数 c_0 は、慣例的には第二種ルジャンドル関数もまたルジャンドル多項式と同じ漸化式を満たすように定められている。そこで以下では慣例に従って c_0 を定める。ここでは(B.19)式に対応する漸化式

$$Q'_n(t) = nQ_{n-1}(t) + tQ'_{n-1}(t) \tag{B.59}$$

が成り立つように c_0 を定める¹⁶。 c_0 が n の関数であることに注意して $c_0(n)$ と表すこととする。このとき(B.58)式より

$$Q'_n(t) = c_0(n) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!(2m+n)!(2n+1)!(-2m-n-1)}{(n!)^2 m! (2m+2n+1)!} t^{-2m-n-2} \tag{B.60}$$

$$\begin{aligned}
&nQ_{n-1}(t) + tQ'_{n-1}(t) \\
&= nc_0(n-1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m-1)!(2m+n-1)!(2n-1)!}{[(n-1)!]^2 m! (2m+2n-1)!} t^{-2m-n-2} \\
&+ c_0(n-1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m-1)!(2m+n-1)!(2n-1)!}{[(n-1)!]^2 m! (2m+2n-1)!} t^{-2m-n-2} \\
&= c_0(n-1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)!(2m+n)!(2n+1)!n^2(-n-2m-1)}{(n!)^2 m! (2m+2n+1)! 2n(2n+1)} t^{-2m-n-2}
\end{aligned} \tag{B.61}$$

となる。(B.59)、(B.60)、(B.61)式より、

$$c_0(n) = \frac{n}{2n+1} c_0(n-1) \tag{B.62}$$

となる。 c_0 に関する漸化式(B.62)を解くと、

$$c_0(n) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} c_0(0) \tag{B.63}$$

となる。ここで $c_0(0)$ は n に依らない任意の定数であり、慣例的には簡単の為に 1 とする。

¹⁶ 勿論、(2)(B.20)、(2)(B.21)式から c_0 を決めても良い。いずれの場合も同様の結果が得られる。

以上より、

$$Q_n(t) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n+m)! (2m+n)! (2n+1)!}{(n!)^2 m! (2m+2n+1)!} t^{-2m-n-1} \quad (\text{B.64})$$

が得られる。

B. 5 Q_n の積分表示式の導出

本節では、 P_n が基本解であることを出発点として Q_n の積分表示式を導出する。ルジャンドル微分方程式(B.1)の基本解の一つが P_n であることが分かっているものとして、もう一つの基本解が

$$g(t) = P_n(t)w(t) \quad (\text{B.65})$$

と表されると仮定する。このとき

$$g'(t) = P_n'(t)w(t) + P_n(t)w'(t) \quad (\text{B.66})$$

$$g''(t) = P_n''(t)w(t) + 2P_n'(t)w'(t) + P_n(t)w''(t) \quad (\text{B.67})$$

となる。(B.65)、(B.66)、(B.67)式を(B.1)式に代入すると、

$$\begin{aligned} & (1-t^2)\{P_n''(t)w(t) + 2P_n'(t)w'(t) + P_n(t)w''(t)\} \\ & \quad - 2t\{P_n'(t)w(t) + P_n(t)w'(t)\} + n(n+1)P_n(t)w(t) \\ & = \{(1-t^2)P_n''(t) - 2tP_n'(t) + n(n+1)P_n(t)\}w(t) \\ & \quad + (1-t^2)\{2P_n'(t)w'(t) + P_n(t)w''(t)\} - 2tP_n(t)w'(t) \\ & = (1-t^2)\{2P_n'(t)w'(t) + P_n(t)w''(t)\} - 2tP_n(t)w'(t) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

となる。(B.68)式の両辺を $(1-t^2)w'(t)P_n(t)$ で割ると、

$$\frac{w''(t)}{w'(t)} = \frac{d}{dt} \{\ln w'(t)\} = \frac{2t}{1-t^2} - 2 \frac{P_n'(t)}{P_n(t)} = \frac{d}{dt} \{-\ln(t^2-1) - 2 \ln P_n(t)\} = 0 \quad (\text{B.69})$$

となる。(B.69)式を $t=0$ から t まで積分すると、積分定数を C として

$$w'(t) = \frac{C}{(t^2-1)P_n^2(t)} \quad (\text{B.70})$$

となる。さらに(B.70)式を $t=\infty$ から t まで積分すると、

$$w(t) = w(\infty) + C \int_{\infty}^t \frac{ds}{(s^2-1)P_n^2(s)} \quad (\text{B.71})$$

となる。ここで(B.64)式より $Q_n(\infty)=0$ であるので、 $w(\infty)=0$ とならなければならない。従って

$$Q_n(t) = P_n(t)w(t) = CP_n(t) \int_{\infty}^t \frac{ds}{(s^2-1)P_n^2(s)} \quad (\text{B.72})$$

が得られる。以下、積分定数 C を定める。ルジャンドル多項式(B.17)および第二種ルジャンドル関数のべき級数表示式(B.64)式をそれぞれ陽に書き下すと、以下のようになる。

$$P_n(t) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \left\{ t^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} t^{n-2} + \dots \right\} = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} t^n \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right\} \quad (\text{B.73})$$

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!} \frac{1}{t^{n+1}} \left\{ 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} \frac{1}{t^2} + \dots \right\} \\ &= \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!} \frac{1}{t^{n+1}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.74})$$

(B.73)式を(B.72)に適用すると、

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= C \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} \frac{1}{t^n} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right\} \int_{\infty}^t \frac{ds}{s^2 \left(1 - \frac{1}{s^2}\right) s^{2n} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \right\}^2} \\ &= C \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} \frac{1}{t^n} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right\} \int_{\infty}^t \frac{\left\{ 1 + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \right\}^3 ds}{s^{2n+2}} \\ &= C \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} \frac{1}{t^n} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right\} \int_{\infty}^t \{s^{-2n-2} + O(s^{-2n-4})\} ds \\ &= C \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} \frac{1}{t^n} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right\} \left\{ -\frac{1}{2n+1} t^{-2n-1} + O(t^{-2n-3}) \right\} \\ &= -C \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!} \frac{1}{t^{n+1}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

となる。(B.74)、(B.75)式を比較すると、 $C=-1$ となる。従って

$$Q_n(t) = -P_n(t) \int_{\infty}^t \frac{ds}{(s^2-1)P_n^2(s)} \quad (\text{B.76})$$

が得られる。

B. 6. Q_n の積分表示式から得られる別表式の導出

前節で得られた Q_n の積分表示式において、積分を陽に計算することで別の表式を得ることが出来る。以下ではそのことを示す。なおこの節の導出の流れは寺沢(2005)を参考にしてゐる。

P_n は n 次の多項式であり、互いに異なる n 個の零点を持つ¹⁷。そこで P_n の零点をそれぞれ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ と表すと、(B.73)式より

$$P_n(t) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} (t - \alpha_1) \cdots (t - \alpha_n) \quad (\text{B.77})$$

と表される。このとき(B.112)式の被積分関数は

¹⁷ P_n が互いに異なる n 個の零点を持つことの導出については、寺沢(2005)の 10.7 節に詳細に記述されているので、そちらを参照されたい。

$$\frac{1}{(s^2-1)P_n^2(s)} = \left[\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \right]^2 \frac{1}{(s-1)(s+1)(s-\alpha_1)^2 \cdots (s-\alpha_n)^2} \quad (\text{B.78})$$

と書ける。(B.78)式の右辺において部分分数分解を行うと、

$$\frac{1}{(s^2-1)P_n^2(s)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{(s-\alpha_j)^2} + \sum_{j=1}^n \frac{D_j}{s-\alpha_j} \quad (\text{B.79})$$

と表される。但し A、B、C_j、D_j は係数である。(B.79)式の両辺に s-1 を掛け、s=1 とすると、{P_n(1)}²=1 より A=1/2 となる。同様に(B.79)式の両辺に s+1 を掛け、s=-1 とすると、{P_n(-1)}²=1 より B=-1/2 となる。さらに(B.79)式の両辺に (s-α_k)² を掛け、s=α_k とすると、

$$C_k = \left[\frac{(s-\alpha_k)^2}{(s^2-1)P_n^2(s)} \right]_{s=\alpha_k} \quad (\text{B.80})$$

と定まる。D_j については、具体的な表式を得るには少々工夫を要する。(B.79)式の両辺に (s-α_k)² を掛けると、

$$\begin{aligned} \frac{(s-\alpha_k)^2}{(s^2-1)P_n^2(s)} &= C_k + D_k(s-\alpha_k) \\ &+ (s-\alpha_k)^2 \left\{ \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \sum_{j=1}^{n, j \neq k} \frac{C_j}{(s-\alpha_j)^2} + \sum_{j=1}^{n, j \neq k} \frac{D_j}{s-\alpha_j} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.81})$$

となる。(B.81)の両辺を s で微分すると、

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds} \left\{ \frac{(s-\alpha_k)^2}{(s^2-1)P_n^2(s)} \right\} \\ &= D_k + \frac{d}{ds} \left[(s-\alpha_k)^2 \left\{ \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \sum_{j=1}^{n, j \neq k} \frac{C_j}{(s-\alpha_j)^2} + \sum_{j=1}^{n, j \neq k} \frac{D_j}{s-\alpha_j} \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.82})$$

となる。(B.82)式の右辺第 2 項は (s-α_k) に比例するので、s=α_k とするとゼロとなる。従って

$$D_k = \left[\frac{d}{ds} \left\{ \frac{(s-\alpha_k)^2}{(s^2-1)P_n^2(s)} \right\} \right]_{s=\alpha_k} \quad (\text{B.83})$$

と定まる。ここで

$$P_n(s) = (s-\alpha_k)\psi_k(s) \quad (\text{B.84})$$

と置くと、

$$\begin{aligned} D_k &= -\frac{2\alpha_k}{(\alpha_k^2-1)^2\psi_k^2(\alpha_k)} - \frac{2\psi_k'(\alpha_k)}{(\alpha_k^2-1)\psi_k^3(\alpha_k)} \\ &= \frac{2}{(\alpha_k^2-1)^2\psi_k^3(\alpha_k)} \{(1-\alpha_k)\psi_k'(\alpha_k) - \alpha_k\psi_k(\alpha_k)\} \end{aligned} \quad (\text{B.85})$$

となる。一方、(B.84)式をルジャンドル微分方程式(B.1)に代入すると、

$$(1-t^2)\{(t-\alpha_k)\psi_k''(t)+2\psi_k'(t)\}-2t\{(t-\alpha_k)\psi_k'(t)+\psi_k(t)\}+n(n-1)(t-\alpha_k)\psi_k(t)=0 \quad (\text{B.86})$$

となる。(B.86)式において $t=\alpha_k$ と置くと、

$$(1-\alpha_k)\psi_k'(\alpha_k)-\alpha_k\psi_k(\alpha_k)=0 \quad (\text{B.87})$$

となるので、(B.85)式より $D_k=0$ が得られる。以上より

$$\frac{1}{(s^2-1)P_n^2(s)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right)+\sum_{j=1}^n\frac{C_j}{(s-\alpha_j)^2} \quad (\text{B.88})$$

となる。(B.88)式を(B.76)式に適用すると、

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= -P_n(t) \int_{\infty}^t \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{(s-\alpha_j)^2} \right\} ds \\ &= \frac{1}{2} P_n(t) \ln \left(\frac{t+1}{t-1} \right) + P_n(t) \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{s-\alpha_j} \end{aligned} \quad (\text{B.89})$$

が得られる。

(B.89)式の右辺第 2 項は変形を行うことでルジャンドル多項式でのみ展開することが出来る。以下では

$$Q_n(t) = \frac{1}{2} P_n(t) \ln \left(\frac{t+1}{t-1} \right) + W_{n-1}(t) \quad (\text{B.90})$$

と置き、 W_{n-1} の具体的表式を求める。(B.90)式より

$$\frac{dQ_n(t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dP_n(t)}{dt} \ln \left(\frac{t+1}{t-1} \right) - \frac{P_n(t)}{t^2-1} + \frac{dW_{n-1}(t)}{dt} \quad (\text{B.91})$$

$$\frac{d^2Q_n(t)}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2P_n(t)}{dt^2} \ln \left(\frac{t+1}{t-1} \right) - \frac{2}{t^2-1} \frac{dP_n(t)}{dt} + \frac{2tP_n(t)}{(t^2-1)^2} + \frac{d^2W_{n-1}(t)}{dt^2} \quad (\text{B.92})$$

となる。(B.90)、(B.91)、(B.92)式をルジャンドル微分方程式(B.1)に代入すると、

$$\begin{aligned} (1-t^2) & \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2P_n(t)}{dt^2} \ln \left(\frac{t+1}{t-1} \right) - \frac{2}{t^2-1} \frac{dP_n(t)}{dt} + \frac{2tP_n(t)}{(t^2-1)^2} + \frac{d^2W_{n-1}(t)}{dt^2} \right\} \\ & - 2t \left\{ \frac{1}{2} \frac{dP_n(t)}{dt} \ln \left(\frac{t+1}{t-1} \right) - \frac{P_n(t)}{t^2-1} + \frac{dW_{n-1}(t)}{dt} \right\} \\ & + n(n+1) \left\{ \frac{1}{2} P_n(t) \ln \left(\frac{t+1}{t-1} \right) + W_{n-1}(t) \right\} \\ & = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+1}{t-1} \right) \left\{ (1-t^2) \frac{d^2P_n(t)}{dt^2} - 2t \frac{dP_n(t)}{dt} + n(n+1)P_n(t) \right\} + 2 \frac{dP_n(t)}{dt} \\ & \quad + (1-t^2) \frac{d^2W_{n-1}(t)}{dt^2} - 2t \frac{dW_{n-1}(t)}{dt} + n(n+1)W_{n-1}(t) \\ & = 2 \frac{dP_n(t)}{dt} - \frac{d}{dt} \left\{ (t^2-1) \frac{dW_{n-1}(t)}{dt} \right\} + n(n+1)W_{n-1}(t) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.93})$$

となる。(B.44)式より、(B.93)式の左辺第1項は P_{n-1} 、 P_{n-3} 、 P_{n-5} 、...によって展開されるので、 W_{n-1} が以下のようにルジャンドル多項式展開できると仮定する。

$$W_{n-1}(t) = A_1 P_{n-1}(t) + A_3 P_{n-3}(t) + A_5 P_{n-5}(t) + \cdots = \sum_{m=0}^{m \leq \frac{n-1}{2}} A_{2m+1} P_{n-2m-1} \quad (\text{B.94})$$

(B.93)式に(B.44)、(B.94)式を代入すると、

$$\begin{aligned} 2 \sum_{m=0}^{m \leq \frac{n-1}{2}} (2n-4m-1) P_{n-2m-1}(t) - \frac{d}{dt} \left\{ (t^2-1) \sum_{m=0}^{m \leq \frac{n-1}{2}} A_{2m+1} \frac{dP_{n-2m-1}}{dt} \right\} \\ + n(n+1) \sum_{m=0}^{m \leq \frac{n-1}{2}} A_{2m+1} P_{n-2m-1} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.95})$$

となる。(B.95)式の左辺第2項をルジャンドル多項式の漸化式(B.19)、(B.20)、(B.21)式を用いて書き換えると、

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dt} \left\{ (t^2-1) \sum_{m=0}^{m \leq \frac{n-1}{2}} A_{2m+1} \frac{dP_{n-2m-1}}{dt} \right\} \\ & = -\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{m=0}^{m \leq \frac{n-1}{2}} A_{2m+1} [(n-2m-1)tP_{n-2m-1} - (n-2m-1)P_{n-2m-2}] \right\} \\ & = -\sum_{m=0}^{m \leq \frac{n-1}{2}} A_{2m+1} (n-2m-1) \left\{ P_{n-2m-1} + t \frac{dP_{n-2m-1}}{dt} - \frac{dP_{n-2m-2}}{dt} \right\} \\ & = -\sum_{m=0}^{m \leq \frac{n-1}{2}} A_{2m+1} (n-2m-1) \left\{ P_{n-2m-1} + \frac{dP_{n-2m}}{dt} - (n-2m)P_{n-2m-1} \right. \\ & \quad \left. - \frac{dP_{n-2m-2}}{dt} \right\} \\ & = -\sum_{m=0}^{m \leq \frac{n-1}{2}} A_{2m+1} (n-2m-1) \left\{ P_{n-2m-1} + \frac{dP_{n-2m}}{dt} - (n-2m)P_{n-2m-1} \right. \\ & \quad \left. - \frac{dP_{n-2m-2}}{dt} \right\} \\ & = -\sum_{m=0}^{m \leq \frac{n-1}{2}} A_{2m+1} (n-2m-1)(n-2m) P_{n-2m-1} \end{aligned} \quad (\text{B.96})$$

となる。(B.96)式を(B.95)式に適用すると、

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{m=0}^{m \leq \frac{n-1}{2}} (2n - 4m - 1) P_{n-2m-1} \\
& - \sum_{m=0}^{m \leq \frac{n-1}{2}} A_{2m+1} (n - 2m - 1)(n - 2m) P_{n-2m-1} \\
& + n(n+1) \sum_{m=0}^{m \leq \frac{n-1}{2}} A_{2m+1} P_{n-2m-1} \\
& = 2 \sum_{m=0}^{m \leq \frac{n-1}{2}} \{(2n - 4m - 1) + (2m + 1)(n - m)A_{2m+1}\} P_{n-2m-1} = 0
\end{aligned} \tag{B.97}$$

となる。(B.97)式が任意の n について成り立つ為には、

$$A_{2m+1} = -\frac{2n - 4m - 1}{(2m + 1)(n - m)} \tag{B.98}$$

でなければならない。(B.90)、(B.94)、(B.98)式より

$$Q_n(t) = \frac{1}{2} P_n(t) \ln \left(\frac{t+1}{t-1} \right) - \sum_{m=0}^{m \leq \frac{n-1}{2}} \frac{2n - 4m - 1}{(2m + 1)(n - m)} P_{n-2m-1} \tag{B.99}$$

が得られる。

本節の終わりに、(B.99)式より(1.71)、(1.72)式を導出しておく。(B.99)式において $n=0, 1$ の場合を考えると、

$$Q_0(t) = \frac{1}{2} P_0(t) \ln \left(\frac{t+1}{t-1} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+1}{t-1} \right) \tag{B.100}$$

$$\begin{aligned}
Q_2(t) &= \frac{1}{2} P_2(t) \ln \left(\frac{t+1}{t-1} \right) - \frac{3}{2} P_1(t) \\
&= \frac{1}{4} (3t^2 - 1) \ln \left(\frac{t+1}{t-1} \right) - \frac{3}{2} t
\end{aligned} \tag{B.101}$$

となる。ここで

$$p = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+1}{t-1} \right) \tag{B.102}$$

と置くと、

$$\frac{t+1}{t-1} = e^{2p}, t = \frac{e^{2p} + 1}{e^{2p} - 1} = \frac{e^p + e^{-p}}{e^p - e^{-p}} = \coth p, p = \coth^{-1} t \tag{B.103}$$

となるので、

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+1}{t-1} \right) = \coth^{-1} t \quad (\text{B.104})$$

と書き換えられる。(B.104)式を(B.100)、(B.101)式に適用すると、

$$Q_0(t) = \coth^{-1} t \quad (\text{B.105})$$

$$Q_2(t) = \frac{1}{2} (3t^2 - 1) \coth^{-1} t - \frac{3}{2} t \quad (\text{B.106})$$

となる。ここで

$$\cot it = \frac{\cos it}{\sin it} = \frac{\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})}{\frac{1}{2i}(-e^t + e^{-t})} = i \coth t \quad (\text{B.107})$$

より

$$\coth^{-1} t = -i \cot^{-1} it = -i \tan^{-1} \left(\frac{1}{it} \right) \quad (\text{B.108})$$

となるので、(B.105)、(B.106)式は

$$Q_0(t) = -i \tan^{-1} \left(\frac{1}{it} \right) \quad (\text{B.109})$$

$$Q_2(t) = -i \frac{1}{2} (3t^2 - 1) \tan^{-1} \left(\frac{1}{it} \right) - \frac{3}{2} t \quad (\text{B.110})$$

となる。さらに $t=iu/E$ と置くと、

$$Q_0 \left(i \frac{u}{E} \right) = -i \tan^{-1} \left(\frac{E}{u} \right) \quad (\text{B.111})$$

$$Q_2(t) = \frac{i}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{u^2}{E^2} \right) \tan^{-1} \left(\frac{E}{u} \right) - 3 \frac{u}{E} \right] \quad (\text{B.112})$$

となり、(1.71)、(1.72)式が導かれる。

B. 7. ルジャンドル陪関数の導出

付録 B では、ここまでルジャンドル微分方程式において $m=0$ という特別の場合について考えてきた。本節では $m \neq 0$ の場合について考える。(1.50)式において

$$g(t) = (1 - t^2)^\alpha h(t) \quad (\text{B.113})$$

と置くと、

$$g'(t) = -2at(1 - t^2)^{\alpha-1} h(t) + (1 - t^2)^\alpha h'(t) \quad (\text{B.114})$$

$$g''(t) = -2\alpha(1 - t^2)^{\alpha-1} h(t) + 4\alpha(\alpha - 1)t^2(1 - t^2)^{\alpha-2} h(t) - 4at(1 - t^2)^{\alpha-1} h'(t) + (1 - t^2)^\alpha h''(t) \quad (\text{B.115})$$

となるので、

$$\begin{aligned}
0 &= (1-t^2)^2\{-2\alpha(1-t^2)^{\alpha-1}h(t) + 4\alpha(\alpha-1)t^2(1-t^2)^{\alpha-2}h(t) \\
&\quad - 4\alpha t(1-t^2)^{\alpha-1}h'(t) + (1-t^2)^\alpha h''(t)\} \\
&\quad - 2t\{-2\alpha t(1-t^2)^{\alpha-1}h(t) + (1-t^2)^\alpha h'(t)\} \\
&\quad + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right\}(1-t^2)^\alpha h(t)
\end{aligned} \tag{B.116}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-t^2)^{\alpha+1}h''(t) - 2(2\alpha+1)t(1-t^2)^\alpha h'(t) \\
&\quad + \{[-2\alpha+n(n+1)](1-t^2)^\alpha + [4\alpha^2t^2 - m^2](1-t^2)^{\alpha-1}\}h(t)
\end{aligned}$$

となる。ここで $\alpha = m/2$ と置くと、

$$(1-t^2)^2h''(t) - 2(m+1)th'(t) + [n(n+1) - m(m+1)]h(t) = 0 \tag{B.117}$$

となる。一方、 $m=0$ の場合のルジャンドル微分方程式(B.1)式の両辺を m 回微分すると、

$$\begin{aligned}
&\frac{d^m}{dt^m}\{(1-t^2)g''(t)\} - 2\frac{d^m}{dt^m}\{tg'(t)\} + n(n+1)\frac{d^m g(t)}{dt^m} \\
&= (1-t^2)\frac{d^{m+2}g(t)}{dt^{m+2}} - 2mt\frac{d^{m+1}g(t)}{dt^{m+1}} - m(m-1)\frac{d^m g(t)}{dt^m} - 2t\frac{d^{m+1}g(t)}{dt^{m+1}} \\
&\quad - 2m\frac{d^m g(t)}{dt^m}n(n+1)\frac{d^m g(t)}{dt^m}
\end{aligned} \tag{B.118}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-t^2)\frac{d^{m+2}g(t)}{dt^{m+2}} - 2(m+1)t\frac{d^{m+1}g(t)}{dt^{m+1}} \\
&\quad + [n(n+1) - m(m+1)]\frac{d^m g(t)}{dt^m} = 0
\end{aligned}$$

となる。(B.118)式において

$$\frac{d^m g(t)}{dt^m} = G(t) \tag{B.119}$$

と置くと、

$$(1-t^2)\frac{d^2G(t)}{dt^2} - 2(m+1)t\frac{dG(t)}{dt} + [n(n+1) - m(m+1)]G(t) = 0 \tag{B.120}$$

となる。(B.117)、(B.120)式を比較すると、 $h(t)$ と $G(t)$ は同じ方程式を満たすことが分かる。

このことから、ルジャンドル微分方程式の2つの特別解は

$$P_n^m(t) \equiv (1-t^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_n(t)}{dt^m} \tag{B.121}$$

と

$$Q_n^m(t) \equiv (1-t^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m Q_n(t)}{dt^m} \tag{B.122}$$

となる。(B.121)、(B.122)式はそれぞれ第1種、第2種ルジャンドル陪関数と呼ばれる。

付録 C : (1.77)、(1.78)式の導出

本節では(1.77)、(1.78)式の導出を行う。先ず

$$f(t) = \tan^{-1} x \quad (\text{C.1})$$

と置き、両辺を x で微分し、 $x=0$ の周りでテーラー展開すると、

$$f'(t) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad (\text{C.2})$$

となる。(C.2)式の両辺を x で積分すると、

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad (\text{C.3})$$

となる。(C.3)式において $t=E/u$ と置くと、(1.77)式が導かれる。次に

$$g(t) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{3}{x^2}\right) \tan^{-1} x - \frac{3}{x} \right] \quad (\text{C.4})$$

と置き、(C.1)、(C.3)式を適用すると、

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{3}{x^2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} - \frac{3}{x} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k-1} - \frac{3}{x} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + \frac{3}{x} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k-1} - \frac{3}{x} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k-1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} - 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+3} x^{2k+1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \{2k+3 - 3(2k+1)\}}{(2k+1)(2k+3)} x^{2k+1} \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{(2k+1)(2k+3)} x^{2k+1} \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{(2k+1)(2k+3)} x^{2k+1} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

となる。(C.5)式において $t=E/u$ と置くと、(1.78)式が導かれる。

付録 D : (1.97)式の導出

本節では(1.97)式を導出する。地心直交座標系(x,y,z)を考える。自転軸を z 軸とし、回転楕円体上のある点 P の y 座標がゼロとなるように x 軸、 y 軸をとる(図 2)。点 P の座標を $(x_1, 0, z_1)$ とすると、

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{a^2 - x_1^2}}{x_1} \quad (\text{D.1})$$

となる。また回転楕円体の xz 平面における断面は長半径 a 、短半径 b の楕円となるので、

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{b^2} = 1 \quad (\text{D.2})$$

となる。(D.2)式より点 P における楕円の接線の傾きは

$$\frac{dz_1}{dx_1} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 z_1} \quad (\text{D.3})$$

となる。点 P における楕円の法線の傾き $\tan \phi$ と接線の傾きの積は -1 となることから、

$$\tan \phi = -\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^{-1} = \frac{a^2 z_1}{b^2 x_1} \quad (\text{D.4})$$

となる。回転楕円体はまた長半径 a の球を z 軸方向に b/a 倍に縮小したものであることに着目すると、

$$\frac{\sqrt{a^2 - x_1^2}}{z_1} = \frac{a}{b} \quad (\text{D.5})$$

なる関係が成り立つ。(D.1)、(D.3)、(D.5)式より

$$\tan \phi = \frac{a}{b} \tan \beta \quad (\text{D.6})$$

となり、(1.97)式が導かれる。

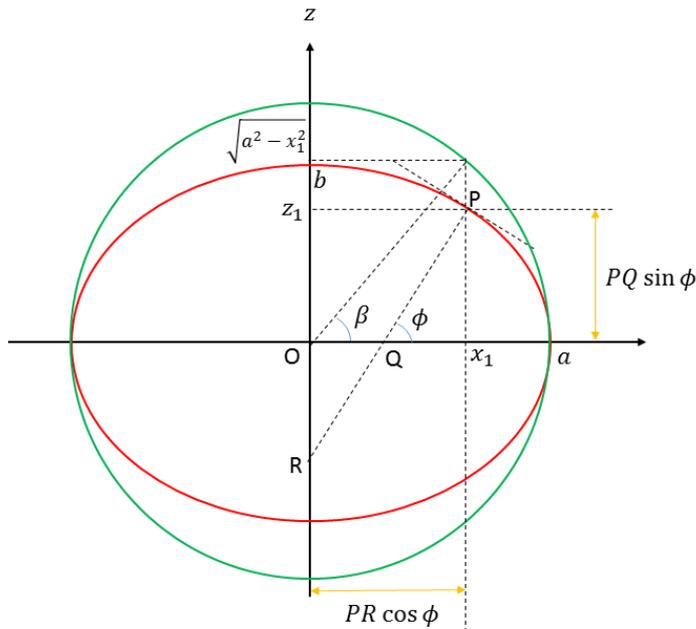


図 2 : 更成緯度 β と測地緯度 ϕ の幾何学的関係。

付録 E : (2.16)、(2.17)、(2.18)式の導出

本節では(2.16)、(2.17)、(2.18)式の導出を行う。なお導出に当たっては Heiskanen and Moritz(1967)および小牧(2014)を参照した。

先ず(2.16)式を導く。地上($h=0$)のとある等ポテンシャル面 $W=W_0$ 上の点 P に着目し、点 P を原点とし、等ポテンシャル面と直交する方向に z 軸、等ポテンシャル面の接平面上に xy 平面をとる。ここでは子午線の方に x 軸、卯酉線の方に y 軸をとることにする。このとき一般化されたポアソン方程式(1.14)を書き下すと、

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 2\omega^2 \quad (\text{E.1})$$

但し地上の等ポテンシャル面を考えているので、 $\rho=0$ としたことに留意されたい。一方、 z が x 、 y の関数であるとみなし、 $W(x,y,z)=W_0$ の両辺を x で偏微分すると、

$$\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (\text{E.2})$$

となる。さらに(E.2)式の両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

となる。点 P において、 x 軸は等ポテンシャル面の接線となっているので、 $dz/dx=0$ となる。また点 P において、 z 軸は等ポテンシャル面と直交しているので、従って点 P において、

$$\left. \frac{\partial W}{\partial z} \right|_{h=0} = \frac{\partial W}{\partial h} = -\gamma \quad (\text{E.4})$$

となる。従って点 P において(E.3)式は

$$\left. \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right|_{h=0} = \gamma \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{h=0} \quad (\text{E.5})$$

となる。ここで点 P での子午線の曲率半径を M とすると、

$$\left. \frac{d^2 z}{dx^2} \right|_{h=0} = \frac{1}{M} \quad (\text{E.6})$$

が成り立つので、

$$\left. \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right|_{h=0} = \frac{\gamma}{M} \quad (\text{E.7})$$

となる。また同様に $W(x,y,z)=W_0$ の両辺を y で偏微分し、点 P での卯酉線の曲率半径を N とすると、

$$\left. \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right|_{h=0} = \frac{\gamma}{N} \quad (\text{E.8})$$

となる。(E.4)、(E.7)、(E.8)式を(E.1)式に適用すると、

$$\left. \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right|_{h=0} = -\gamma \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) - 2\omega^2 \quad (\text{E.9})$$

となり、(2.16)式が導かれる。

次に(2.17)式を導く。付録 D と同様、地心直交座標系(x,y,z)を考え、自転軸を z 軸とし、回転楕円体上のある点 P の y 座標がゼロとなるように x 軸、y 軸をとる(図 2 を参照されたい)。点 P の座標を(x₁,0,z₁)とし、これらを測地緯度 φ と第二離心率 e' で表すことを考える。点 P における楕円体の法線と x 軸、y 軸との交点をそれぞれ Q、R とする。このとき

$$x_1 = PR \cos \phi \quad (\text{E.10})$$

$$z_1 = PQ \sin \phi \quad (\text{E.11})$$

と表される。点 P における楕円の接線の傾きは(D.3)式で表されるので、この式に(E.10)、(E.11)式を適用すると、

$$\frac{dz_1}{dx_1} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 z_1} = -\frac{b^2 PR \cos \phi}{a^2 PQ \sin \phi} \quad (\text{E.12})$$

となる。一方、幾何学的な考察により点 P における楕円体の接線の傾きは cos φ / sin φ と表されるので、(E.12)式より

$$PR = \frac{a^2}{b^2} PQ \quad (\text{E.13})$$

となる。(E.10)、(E.11)、(E.13)式を楕円の式(D.2)に代入すると、

$$\begin{aligned} & \frac{PR^2 \cos^2 \phi}{a^2} + \frac{PQ^2 \sin^2 \phi}{b^2} \\ &= \frac{a^2 PQ^2 \cos^2 \phi}{b^4} + \frac{PQ^2 \sin^2 \phi}{b^2} \\ &= \frac{PQ^2}{b^2} \left(\frac{a^2}{b^2} \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \right) \\ &= \frac{PQ^2}{b^2} \left\{ 1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \cos^2 \phi \right\} \\ &= \frac{PQ^2}{b^2} (1 + e'^2 \cos^2 \phi) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

となる。(E.14)式を PQ について解くと、

$$PQ = \frac{b}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \phi}} \quad (\text{E.15})$$

となる。(E.10)、(E.11)式に(E.13)、(E.15)式を適用すると、

$$x_1 = \frac{a^2 \cos \phi}{b \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \phi}} \quad (\text{E.16})$$

$$z_1 = \frac{b \sin \phi}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \phi}} \quad (\text{E.17})$$

が得られる。ここで点 P における子午線の曲率 K_m について考える。子午線の弧長を s 、点 P の位置ベクトルを \mathbf{x} 、点 P における子午線に対する単位接線ベクトル、単位法線ベクトルをそれぞれ \mathbf{x}' 、 \mathbf{n} とする。このとき $K_m = d\mathbf{x}'/ds \cdot \mathbf{n}$ と表される。いま

$$\mathbf{x}' = (\sin \phi, -\cos \phi) \quad (\text{E.18})$$

$$\mathbf{n} = (\cos \phi, \sin \phi) \quad (\text{E.19})$$

と表されるので、

$$\frac{d\mathbf{x}'}{ds} = \frac{d\mathbf{x}'}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} = (\cos \phi, \sin \phi) \frac{d\phi}{ds} = \mathbf{n} \frac{d\phi}{ds} \quad (\text{E.20})$$

となる。ここで

$$\frac{ds}{d\phi} = \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\phi} \right| = \left\{ \left(\frac{dx_1}{d\phi} \right)^2 + \left(\frac{dz_1}{d\phi} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{E.21})$$

であり、

$$\frac{dx_1}{d\phi} = \frac{d}{d\phi} \left\{ \frac{a^2 \cos \phi}{b \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \phi}} \right\} = -\frac{a^2 \sin \phi}{b(1 + e'^2 \cos^2 \phi)^{3/2}} \quad (\text{E.22})$$

$$\frac{dz_1}{d\phi} = \frac{d}{d\phi} \left\{ \frac{b \sin \phi}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \phi}} \right\} = \frac{a^2 \cos \phi}{b(1 + e'^2 \cos^2 \phi)^{3/2}} \quad (\text{E.23})$$

となるので、

$$\frac{d\phi}{ds} = \left(\frac{ds}{d\phi} \right)^{-1} \left\{ \left(\frac{dx_1}{d\phi} \right)^2 + \left(\frac{dz_1}{d\phi} \right)^2 \right\}^{-1/2} = \frac{b(1 + e'^2 \cos^2 \phi)^{3/2}}{a^2} \quad (\text{E.24})$$

となる。(E.20)、(E.24)式より

$$K_m = \mathbf{n} \frac{d\phi}{ds} \cdot \mathbf{n} = \frac{b(1 + e'^2 \cos^2 \phi)^{3/2}}{a^2} \quad (\text{E.25})$$

となる。曲率半径は曲率の逆数で与えられるので、

$$M = \frac{1}{K_m} = \frac{a^2}{b(1 + e'^2 \cos^2 \phi)^{3/2}} \quad (\text{E.26})$$

となり、(2.17)式が得られる。

最後に(2.18)式を導く。点 P を通る卯酉線と、点 P で接し、自転軸に垂直な平面と回転楕円面が交わることで作られる円(平行圏)を考える。卯酉線、平行圏の曲率をそれぞれ K_n 、

K とする。このとき両者の間に成り立つ関係式(ムーニエの定理と呼ばれる)を求める。弧長を s 、卯酉線を $\mathbf{x}(s)$ 、平行圏を $\mathbf{x}_c(s)$ で表すものとする。また点 P において、卯酉線に対する単位接線ベクトル、単位法線ベクトルをそれぞれ \mathbf{x}' 、 \mathbf{n} 、平行圏に対する単位接線ベクトルを \mathbf{x}'_c とする。このとき

$$K_n = \frac{d\mathbf{x}'}{ds} \cdot \mathbf{n} = \frac{d}{ds}(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{x}' \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\mathbf{x}'_c \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d}{ds}(\mathbf{x}'_c \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{x}'_c \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}'_c}{ds} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{E.27})$$

となる。ここで

$$K = \left| \frac{d\mathbf{x}'_c}{ds} \right| \quad (\text{E.28})$$

となることに注意すると、

$$K_n = \left| \frac{d\mathbf{x}'_c}{ds} \right| |\mathbf{n}| \cos \theta = K \cos \theta \quad (\text{E.29})$$

となる。いま平行圏は円であり、その半径は幾何学的な考察により $PQ \cos \theta$ であることが分かる。従って平行圏の曲率は半径の逆数 $1/(PQ \cos \theta)$ となる。このことから

$$K_n = \frac{1}{PQ} = \frac{b \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \phi}}{a^2} \quad (\text{E.30})$$

$$N = \frac{1}{K_n} = \frac{a^2 \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \phi}}{b} \quad (\text{E.31})$$

となり、(2.18)式が導かれる。

参考文献

- Eshagh, M., 2008: Spherical Harmonics Expansion of the Atmospheric Gravitational Potential Based on Exponential and Power Models of Atmosphere, Artificial Satellites, 43, 25 – 43
- Heiskanen, W. A., and Moritz, H., 1967: Physical Geodesy, W.H. Freeman and Company, 364pp.
- Moritz, H., 1980: Advanced Physical Geodesy, Abacus Press, 500pp.
- Nagy, D. 1966: The prism method for terrain corections using digital computers, pure and applied geophysics, 63, 31 – 39
- Somigliana, C., 1929: Teoria generale del campo gravitazion ale dell' ellisoide di rotazione, Mem. Soc. Astron. Ital., IV
- 小牧 和雄, 2014: 測量のための幾何学と位置決定の方法、東洋書店、516pp.

- 寺沢 寛一, 2005: 自然科学者のための数学概論(増訂版)、岩波書店、711pp.
- 福島 登志夫, 2009: シリーズ現代の天文学 13 天体の位置と運動、日本評論社、258pp.
- 蓬田 清, 2011: 演習形式で学ぶ特殊関数・積分変換入門、共立出版、294pp.