逆 Laplace 変換についての処方箋

半無限媒質中の熱伝導問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (0 < x < \infty, 0 < t < \infty) \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} - u(0,t) = 0, \qquad (0 < t < \infty) \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0 \qquad (0 \leq t < \infty) \tag{3}$$

において Laplace 変換を適用すると, 温度 $u(x,t)$ の Laplace 変換 $U(x,s)$ は

$$\begin{aligned} U(x,s) &= \int_0^\infty u(x,t)e^{-st}dt \\ &= u_0\left[-\frac{e^{-\sqrt{s}x}}{s(\sqrt{s}+1)} + \frac{1}{s}\right] \\ &= u_0\left[-\frac{e^{-\sqrt{s}x}}{s} + \frac{e^{-\sqrt{s}x}}{\sqrt{s}} - \frac{e^{-\sqrt{s}x}}{\sqrt{s}+1} + \frac{1}{s}\right] \end{aligned} \tag{4}$$

となる. (4) に逆 Laplace 変換の公式

$$\mathcal{L}^{-1}[F(x,s)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} F(x,s)e^{st}ds \tag{5}$$

を適用すれば, $u(x,t)$ を求めることができる. しかしこの場合 (5) の右辺の積分を複素解析を利用して計算すると, 分岐点を考慮せねばならず, 非常に面倒である. そこで本文書では複素積分を介さずに逆 Laplace 変換を計算し, $u(x,t)$ を求める方法を紹介する[1].

いま $u(x,t)$ を求めるのに必要なのは, (4) より以下の量である.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\sqrt{s}x}}{s}\right], \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\sqrt{s}x}}{\sqrt{s}}\right], \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\sqrt{s}x}}{\sqrt{s}+1}\right], \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]. \tag{6}$$

(6) のうち, $\mathcal{L}^{-1}[1/s]$ は容易に求められる. 積分

$$\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s} \tag{7}$$

が成り立つことに着目すると, Laplace 変換の定義より

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1 \tag{8}$$

[1] この方法は以下のウェブ資料に掲載されていた. 資料作成者の Paul DuChateau 氏には大いに感謝し申し上げる.
http://www.math.colostate.edu/ pauld/M545/L Transform.pdf

が得られる. その他の 3 つの逆 Laplace 変換を求めるには, 以下の公式が有用である[2)].

$$\mathcal{L}^{-1}[F(\sqrt{s})] = \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_0^\infty z e^{-\frac{z^2}{4t}} f(z) dz. \tag{9}$$

但し

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \tag{10}$$

である.

3 つの逆 Laplace 変換を求める第一歩として, delta 関数

$$f(t) = \delta(t-a) \qquad\qquad (a > 0) \tag{11}$$

の Laplace 変換 $F(s)$ を求めよう. このとき

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \delta(t-a) dt = e^{-as} \tag{12}$$

となる. 従って (9), (12) より

$$\mathcal{L}^{-1}[F(\sqrt{s})] = \mathcal{L}^{-1}[e^{-a\sqrt{s}}] = \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_0^\infty z e^{-\frac{z^2}{4t}} \delta(z-a) dz = \frac{a}{\sqrt{4\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}},$$

すなわち

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-a\sqrt{s}}] = \frac{a}{\sqrt{4\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}} \tag{13}$$

となる. (13) で $a = x$ から $a = \infty$ まで積分すると,

$$\int_x^\infty \mathcal{L}^{-1}[e^{-a\sqrt{s}}] da = \int_x^\infty \frac{a}{\sqrt{4\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}} da \tag{14}$$

となる. (14) の左辺を書き換えると

$$\int_x^\infty \mathcal{L}^{-1}[e^{-a\sqrt{s}}] da = \mathcal{L}^{-1}\left[\int_x^\infty e^{-a\sqrt{s}} da\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\right] \tag{15}$$

となる. 但し, 計算の過程で逆 Laplace 変換と a に関する積分の順序を入れ替えても計算結果が変わらないことを利用した. 一方 (14) の右辺は

$$\int_x^\infty \frac{a}{\sqrt{4\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}} da = \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \left[-2t e^{-\frac{a^2}{4t}}\right]_{a=x}^{a=\infty} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \tag{16}$$

となる. 従って (15), (16) より

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \tag{17}$$

が得られる.

[2)] (9) の証明については付録を参照されたい.

(17) において $x = a$ と置き直し, 再び $a = x$ から $a = \infty$ まで積分すると

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_x^\infty e^{-\frac{a^2}{4t}}da \tag{18}$$

となる. ここで $b = a/\sqrt{4t}$ なる変数変換を行なうと,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x/\sqrt{4t}}^\infty e^{-b^2}db \tag{19}$$

となる. ここで余誤差関数

$$\mathrm{erfc}(y) \equiv 1 - \mathrm{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_y^\infty e^{-b^2}db \tag{20}$$

を導入すると

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}\right] = \mathrm{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{t}}\right] \tag{21}$$

が得られる.

また (13) の両辺に e^{-ac} を掛けると

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-a(\sqrt{s}+c)}] = \frac{a}{\sqrt{4\pi t^3}}e^{-\frac{a^2}{4t}-ac} \tag{22}$$

となる. (13) の両辺を $a = x$ から $a = \infty$ まで積分すると

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\int_x^\infty e^{-a(\sqrt{s}+c)}da\right] = \int_x^\infty \frac{a}{\sqrt{4\pi t^3}}e^{-\frac{a^2}{4t}-ac}da \tag{23}$$

となる. (23) の左辺を変形すると

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\int_x^\infty e^{-a(\sqrt{s}+c)}da\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-x(\sqrt{s}+c)}}{\sqrt{s}+c}\right] \tag{24}$$

となる. 一方 (23) の右辺は $(a + 2ct)/\sqrt{4t} = v$ なる変数変換を行なうことにより

$$\begin{aligned}
\int_x^\infty \frac{a}{\sqrt{4\pi t^3}}e^{-\frac{a^2}{4t}-ac}da &= \frac{e^{c^2t}}{\sqrt{4\pi t^3}}\int_x^\infty ae^{-\frac{1}{4t}(a+2ct)^2}da \\
&= \frac{e^{c^2t}}{\sqrt{\pi t}}\int_{(x+2ct)/\sqrt{4t}}^\infty (\sqrt{4t}v - 2ct)e^{-v^2}dv \\
&= \frac{e^{c^2t}}{\sqrt{\pi t}}\left\{\sqrt{t}e^{-\frac{(x+2ct)^2}{4t}} - ct\sqrt{\pi}\mathrm{erfc}\left[\frac{x+2ct}{\sqrt{4t}}\right]\right\} \\
&= \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}-cx}}{\sqrt{\pi t}} - ce^{c^2t}\mathrm{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{t}} + c\sqrt{t}\right]
\end{aligned} \tag{25}$$

となる. 従って (23), (24), (25) より

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{\sqrt{s}+c}\right] = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} - ce^{c^2t+cx}\mathrm{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{t}} + c\sqrt{t}\right] \tag{26}$$

となる. 特に $c=1$ の場合を考えると

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{\sqrt{s}+1}\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}-e^{t+x}\mathrm{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right] \tag{27}$$

が得られる.

以上 (8), (17), (21), (27) より

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{L}^{-1}[U(x,s)] \\
&= u_0\left\{-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\sqrt{s}x}}{s}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\sqrt{s}x}}{\sqrt{s}}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\sqrt{s}x}}{\sqrt{s}+1}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]\right\} \\
&= u_0\left\{-\mathrm{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{t}}\right]+\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}-\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}+e^{t+x}\mathrm{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right]+1\right\} \\
&= u_0+u_0\left\{-\mathrm{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{t}}\right]+e^{t+x}\mathrm{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right]\right\} \qquad (28)
\end{aligned}$$

が得られる.

付録 : (9) の証明

本付録では (9) の証明を行なう[3]. (9) の右辺を

$$g(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_0^\infty z e^{-\frac{z^2}{4t}} f(z) dz \tag{A.1}$$

と置く. このとき $\mathcal{L}[g(t)] = F(\sqrt{s})$ を示せば, (9) を証明したことになる. Laplace 変換の定義より

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} \int_0^\infty z e^{-\frac{z^2}{4t}} f(z) dz \right] dt \\ &= \int_0^\infty \frac{z}{\sqrt{\pi}} f(z) \left[\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{4t^3}} e^{-\frac{z^2}{4t} - st} dt \right] dz \end{aligned} \tag{A.2}$$

となる. ここで $\tau = z/\sqrt{4t}$ なる変数変換を行なうと, $d\tau = -z dt/(2\sqrt{4t^3})$ であるので,

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f(z) \left[\int_0^\infty e^{-\tau^2 - \frac{z^2 s}{4\tau^2}} d\tau \right] dz \tag{A.3}$$

となる. ここで

$$I \equiv \int_0^\infty e^{-\tau^2 - \frac{\alpha^2}{\tau^2}} d\tau \tag{A.4}$$

と置き, I の計算を行なう. (A.4) の被積分関数が

$$e^{-\tau^2 - \frac{\alpha^2}{\tau^2}} = e^{-2\alpha} e^{-\left(\tau - \frac{\alpha}{\tau}\right)^2} = e^{2\alpha} e^{-\left(\tau + \frac{\alpha}{\tau}\right)^2} \tag{A.5}$$

と書き換えられること, そして

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\mathrm{erf}\left(\tau + \frac{\alpha}{\tau} \right) \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\alpha}{\tau^2} \right) e^{-\left(\tau + \frac{\alpha}{\tau}\right)^2}, \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\mathrm{erf}\left(\tau - \frac{\alpha}{\tau} \right) \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{\alpha}{\tau^2} \right) e^{-\left(\tau - \frac{\alpha}{\tau}\right)^2} \tag{A.7}$$

が成立することに着目すると,

$$e^{-\tau^2 - \frac{\alpha^2}{\tau^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left\{ e^{2\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathrm{erf}\left(\tau + \frac{\alpha}{\tau} \right) \right] + e^{-2\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathrm{erf}\left(\tau - \frac{\alpha}{\tau} \right) \right] \right\} \tag{A.8}$$

と表される. (A.8) を (A.4) に代入すると,

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \int_0^\infty \left\{ e^{2\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathrm{erf}\left(\tau + \frac{\alpha}{\tau} \right) \right] + e^{-2\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathrm{erf}\left(\tau - \frac{\alpha}{\tau} \right) \right] \right\} d\tau \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left[e^{2\alpha} \mathrm{erf}\left(\tau + \frac{\alpha}{\tau} \right) + e^{-2\alpha} \mathrm{erf}\left(\tau - \frac{\alpha}{\tau} \right) \right]_{\tau=0}^{\tau=\infty} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left\{ e^{2\alpha} [\mathrm{erf}(\infty) - \mathrm{erf}(\infty)] + e^{-2\alpha} [\mathrm{erf}(\infty) - \mathrm{erf}(-\infty)] \right\} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\alpha} \end{aligned} \tag{A.9}$$

[3](9) の証明については以下の 2 つのウェブ資料を参考にした.
http://www.math.colostate.edu/ pauld/M545/L Transform.pdf
http://www.math.sfu.ca/ cbm/aands/page_304.htm

となる. (A.9) において $\alpha = z\sqrt{s}/2$ とすると,

$$\int_0^\infty e^{-\tau^2 - \frac{z^2 s}{4\tau^2}} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-z\sqrt{s}} \tag{A.10}$$

が得られる. (A.10) を (A.3) に代入すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g(t)] &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f(z) \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-z\sqrt{s}} \right] dz \\ &= \int_0^\infty f(z) e^{-z\sqrt{s}} dz \\ &= F(\sqrt{s}) \end{aligned} \tag{A.11}$$

が得られ, (9) を証明することが出来た.