

物理実験Ⅲレポート

「山越え水平二次元水流における跳水現象の理論的・実験的考察」

所属：理学部地球物理学科3年

学籍番号：22030143

氏名：山下 達也

共同実験者：伊藤 和也

(学籍番号22030056)

目次

1. 序論	3
1. 1 本稿の目標	3
1. 2 跳水の物理学的定義	3
1. 3 山越え水流における跳水のモデル・理論の概説	6
2. 跳水理論の導出と解釈	12
2. 1 浅水方程式系の導出	12
2. 2 Long による跳水の原理説明	14
(I) 定常状態(subcritical flow と supercritical flow)	14
(II) 非定常状態(跳水現象の発生)	21
2. 3 Houghton と Kasahara の山越え水流モデル	30
(I) ボア<bore>の発生について	30
(II) 希薄波の理論(Riemann 問題)	31
(III) Houghton、Kasaharaモデルの導出	35
2. 4 Longの理論と Houghton、Kasaharaモデルの食い違い	41
3. 山越え気流理論の導出と解釈	44
3. 1 Long の式の導出	44
3. 2 二次元山越え気流の線形論	48
3. 3 Smith の解(よどみ層と碎波)	55
4. 実験結果とその考察	58
4. 1 実験目的・実験装置及びその方法	58
4. 2 実験データ・グラフとその考察	59
4. 3 実験で確認された事実とその考察	65
4. 4 実験中に起こったトラブルとその解決策	68
5. 結論	70
6. 謝辞	70
7. 参照した論文、文献並びに電子文書	70

1. 序論

1. 1 本稿の目標

河川などで川床の勾配が緩やかになると、その下流域で水面が急に跳ね上がることがある。或いは、洗面台などで水道の蛇口をひねって水を出すと、その落下点を中心に水はほぼ円形に薄く広がるが、ある半径のところでは水面が急激に跳ね上がる現象がしばしば確認される。このように水などの流体の表面が急激に上昇するような現象は「跳水」(はねみず・ちょうすい) <hydraulic jump>、或いは単純に「ジャンプ」と呼ばれている。「跳水現象」は、水平な水流が障害物(山)を越えるときにも、その下流側で発生することがある。

本レポートでは、そうした山を越える水平二次元水流で「跳水」が起きる為の条件を室内実験によって調べることを第一の目的としている。また、水ではなく空気(大気)が山を越える場合、水流の場合と比較してどのように異なり、どのような類似点が存在するのかについて理論的に解析することを第二の目的としている。更に、室内実験の結果が、今までに提唱された山越え水流の理論・モデルとどこまで一致しているのかを確かめることを第三の目的として掲げている。

1. 2 跳水の物理学的定義

前節では自然現象としての「跳水」について言及したが、ここでは物理学的、特に気象学的・水理学的観点から「跳水」を定義する。

水流における「跳水現象」は、「水面の不連続的な上昇」として視覚的に確認されるが、このときそれと同時に、跳水の前後での流速にもまた不連続が生じている。更に、跳水の前後では水の力学的エネルギーもまた不連続に変化しており、下流側で力学的エネルギーが減少している。水理学では、そういった意味で跳水現象を「短区間で力学的エネルギーの損失を生じさせる現象」と捉えることが多い。実際水理学に於て、跳水現象はダム等から流れ出る高速水流の力学的エネルギーを損失させる方法として、きわめて重要な現象である。

一方、気象学では主に大気中の「跳水現象」を扱うことが多い。大気の場合、流速ベクトルを接線として滑らかに結んだ曲線、すなわち「流線<stream line>」の鉛直方向への急激な上昇」として跳水現象を捉える。また、山越え気流の「跳水現象」はいわゆる「おろし風」に付随して発生する現象であり、地表面での風速の不連続境界線として直感的に認識される。或いは、上昇気流による雲の発生として確認される。図1、図2はそれぞれ気象庁MT-SATによる

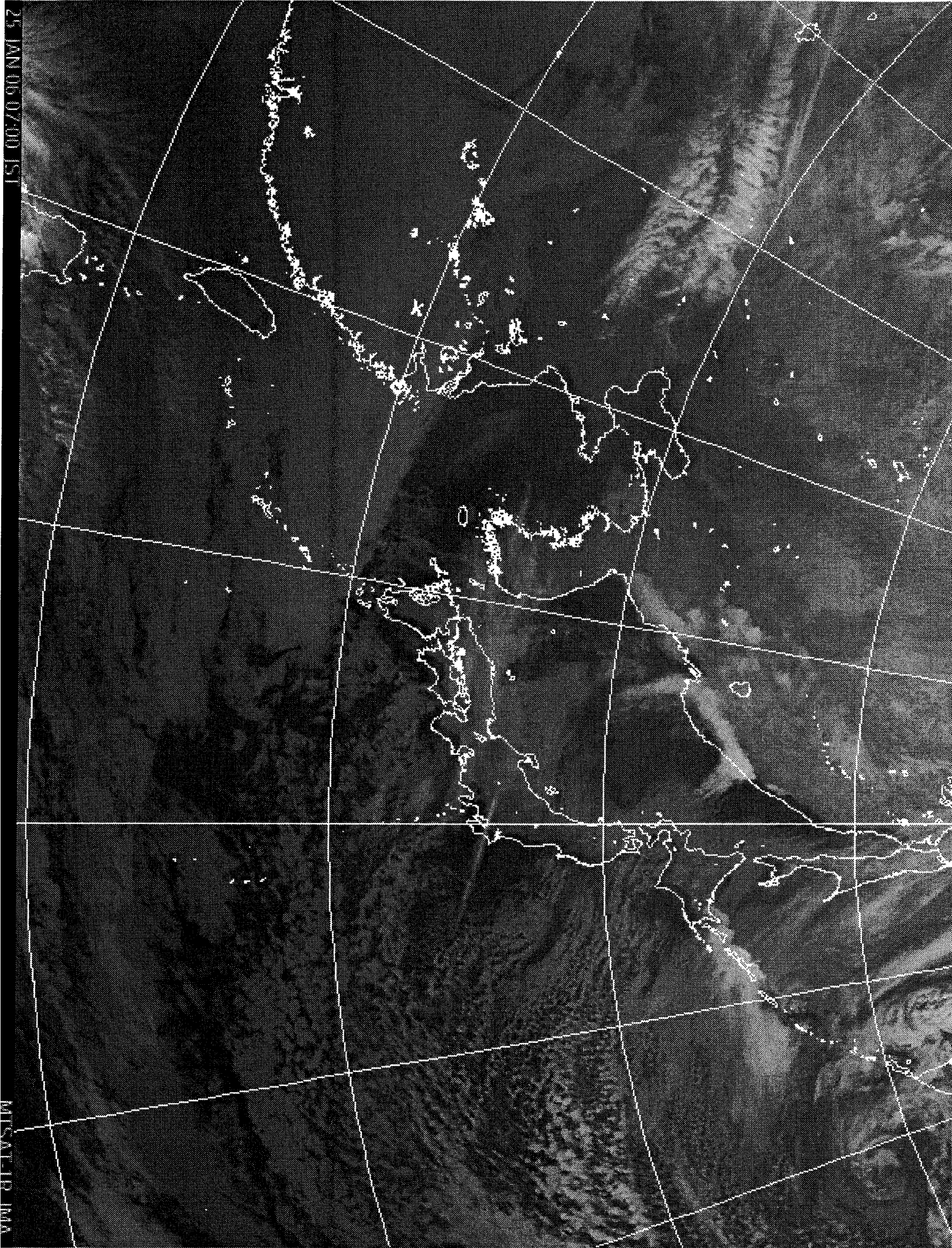


図1 跳水による雲の発生(1)

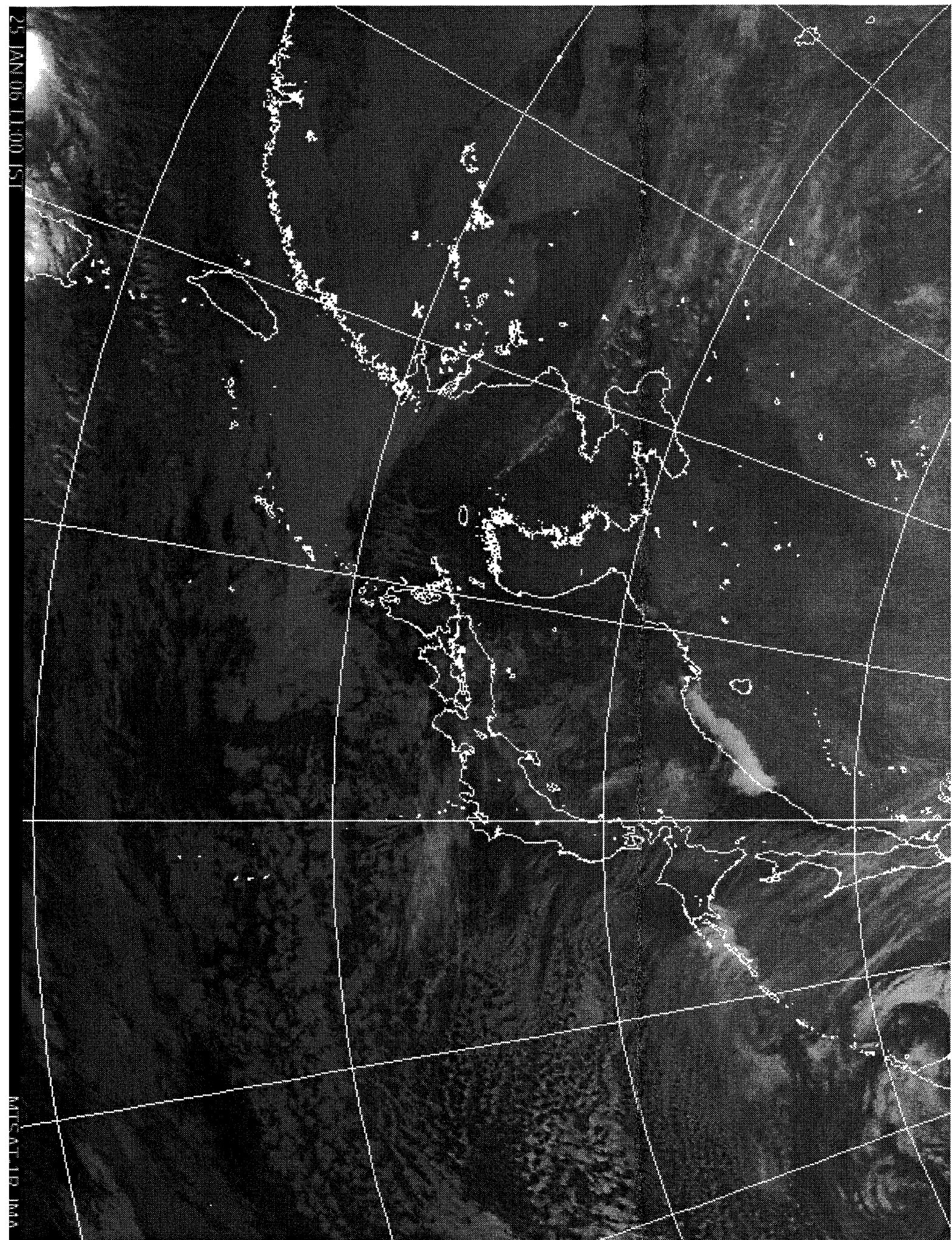


図2 跳水による雲の発生(2)

2006年1月25日午前7時、11時の気象衛星赤外画像である。ロシア沿海地方と千島列島に着目すると、その風下側（東側）に帯状の雲が確認される。沿海地方にはシホテアリニ山脈と呼ばれる2000m級の山々が1000km近くにわたって横たわっており、また千島列島にもまた1000m級の山が連なっている。帯状の雲はこれらの山脈と並行して存在しており、山脈を越えた気流がジャンプしたことによって発生したものと考えられる（実際に発生したかどうかを判断するには詳しい解析を待たねばならない）。山越え気流における「跳水現象」については、第三章で少し触れることとする。

1. 3 山越え水流における跳水のモデル・理論の概説

本節では、十分長い長方形水路に一つの障害物が存在するときの水流中で発生する跳水やその他の諸現象に関するモデル・理論を紹介し、そこで得られた結果のみを提示する。ここで提示された数式の導出やモデルに関する物理的解釈等については、次の第二章に譲ることとする。

本文書では最も単純なケースを考えるため、以後特に断りが無い限り以下のことが仮定されているものとする。

- (1) 長方形水路の底面は障害物の無い部分では水平面であるものとする。また、水路の幅は一定であり、さらに流体層の厚さは水路の長さに対して十分小さいものとする。
- (2) 障害物から十分遠いところでは、流れが一様であり、鉛直成分を持たないものとする。
- (3) 障害物の形状は二次元的であり、流れ全体も二次元的であるものとする。つまり、水路の側壁と平行な方向を x 方向、水路の側壁の法線方向を y 方向、鉛直方向を z 方向とすると、障害物の形状、水の流れは y の値に依存せず、流速の y 成分は存在しない。従って、流体運動を調べるに当たっては、任意の xz -平面を一つ考えるだけでよい。
- (4) 長方形水路を流れる水流は至るところ層流（流体粒子が不規則に混合することのないような流れ）であり、乱流は発生していないものとする。
- (5) 水は非粘性流体とみなせ、水と水路の側壁・底面及び障害物の間には摩擦は発生しないものとする。
- (6) 水は非圧縮流体とみなせ、至るところで密度が一定であるものとする。
- (7) 障害物（山）の形状はあまり複雑でないものとする。具体的に述べると、以下の二つに集約される。第一に山のピークはただ一つだけで、しかもあまり鋭くないものとする。第二に、山は至るところなだらかで、曲率は小さいものとする。
- (8) 障害物付近の水の流速に関して、鉛直成分は水平成分に比べてはるかに

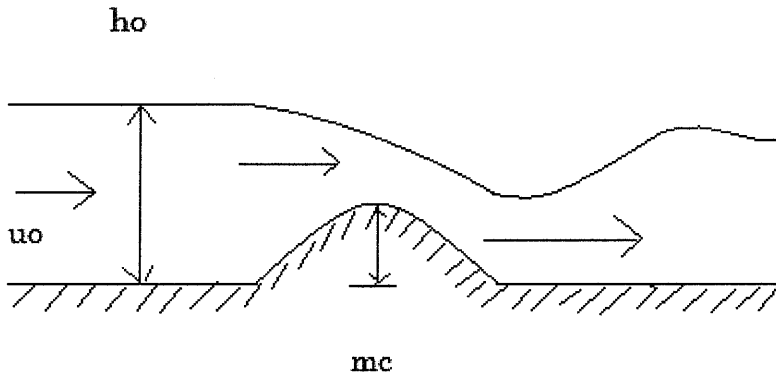


図3 山の下流で起きる跳水のイラスト

小さく、これを無視出来るものとする。

(9) 流体の自由表面はその上で吹く風と相互作用せず、コリオリ力の作用も無視できるものとする。

以上の仮定を前提とした上で、跳水のモデル・理論について概観してみる。

山を越える水流の振る舞いについて、実験・理論の両面から本格的な考察を初めて行なったのは Robert.R.Long である (1953年・1954年)。Long は跳水の発生条件を支配する物理量が、「無次元化された山の高さ」 M_c と「一般流に対するフルード数〈Froude number〉」 F_0 の二つであることを導いた。但し、一般流とは、「障害物から十分上流側の擾乱の発生していない流れ」のことを指すものとする。これら二つの物理量 M_c 、 F_0 は以下のように定義される。

$$M_c \equiv \frac{m_c}{h_0} \quad (1.3.1)$$

$$F_0 \equiv \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}} \quad (1.3.2)$$

ここで、 m_c は「水平河床面から山の頂上までの高さ」、 h_0 は「障害物の上流での流体層の厚さ」、 u_0 は「障害物の上流での水平流速」をそれぞれ表す。従って、より精確に言い直すと、 M_c は「上流側の流体層の厚さに対する山の頂上までの高さの比」、 F_0 は「上流側の流体層における外部重力波の伝播速度 $\sqrt{gh_0}$ に対する上流側の流速の比」ということになる。

Long は M_c を横軸、 F_0 を縦軸とする平面を考え、跳水の起こる領域と起こらない領域とを分ける曲線を見出した。この曲線は臨界曲線〈critical curve〉と呼ばれ、次式で与えられる。

$$M_c = 1 + \frac{1}{2}F_0^2 - \frac{3}{2}F_0^{\frac{2}{3}} \quad (1.3.3)$$

無次元化された山の高さ M_c が (1. 3. 3) の曲線上の値よりも小さくなると、水の流れは定常状態となり、跳水は発生しない。一方、この曲線上の値よ

山越え水流のレジーム図

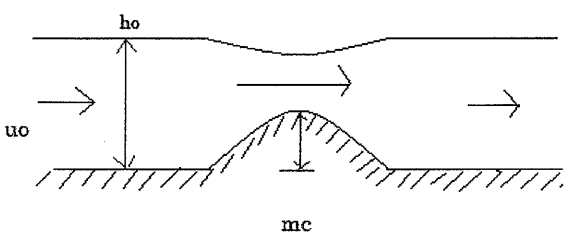
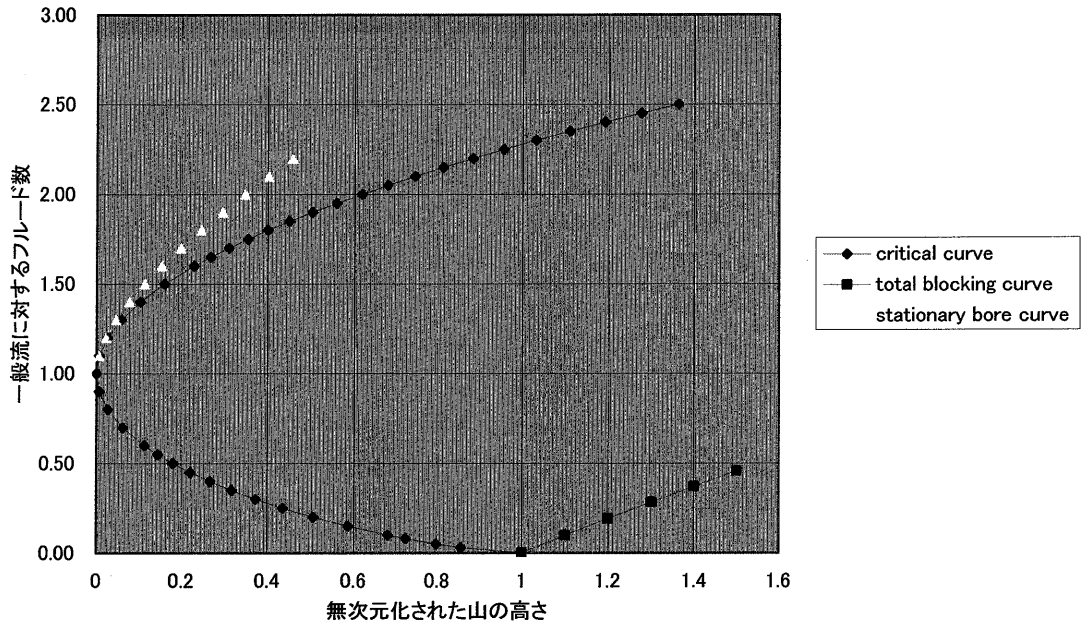


図5 subcritical の状態のイラスト

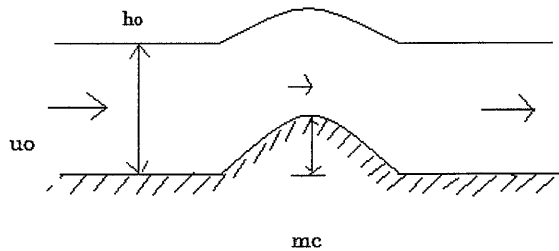


図6 supercritical の状態のイラスト

りも M_c が大きくなると、非定常な流れとなり跳水現象を生じる。

また Long は、定常状態についても大きく二つの状態に分類出来ることを示した。 F_0 が 1 より小さいとき、山の上で流れは増速し、水面は窪む (図5)。一方、 F_0 が 1 より大きいとき、山の上で流れは減速し、水面は盛り上がる (図6)。前者は subcritical flow と呼ばれ、後者は supercritical flow と呼ばれる。

前節で述べたように、非定常状態で生じる「跳水」は水深及び流速の不連続面であるが、Long はこれが「局所的な意味での supercritical flow から subcritical flow への不連続的な遷移」であることを指摘した。逆に、

supercritical flow から subcritical flow へ連続的に変化することが出来ないことについても指摘されている。

その後、D.D.Houghton と A.Kasahara は、非定常時の山越え水流の振る舞いを包括的に記述する連立方程式を導いた (1968 年)。この方程式モデルでは、「跳水」以外に山の上流側で不連続面「ボア」<bore>が発生することと、「跳水」のさらに下流側で「膨張波」(又は希薄波) <rarefaction wave>が発生することを考慮している。「ボア」は流れを溯って進む不連続面であり、「膨張波」は跳水後の水深から一般流の水深へ連続的に変化するような現象である。ボアや跳水などの不連続については、それより以前に Stoker (1957 年) らによって詳しい議論がなされていたが、山越え水流にこれを初めて適用したのは彼らであった。

Houghton と Kasahara は、跳水現象が山から離れた場所で発生して下流側に進行していく場合と、山の麓で発生してその場所に留まる場合の二つのケースについてモデルを構築した。

跳水の不連続面が下流側に移動していく場合、一般流の水深 h_0 及び流速 u_0 が既知であるとして、水の流れは十個の変数に関する十個の連立方程式で記述できる。それらの変数とは即ち、ボアの上流への進行速度 C_L 、ボアの後面(下流側)の水深 h_A 、ボアの後面の流速 u_A 、山の頂上の水深 h_c 、山の頂上の流速 u_c 、跳水の前面(上流側)の水深 h_B 、跳水前面の流速 u_B 、跳水の下流への進行速度 C_R 、跳水後面の水深 h_D 、跳水後面の流速 u_D の十個である。そしてこれらの変数は以下の連立方程式を満足する。

$$C_L = \frac{h_0 u_0 - h_A u_A}{h_0 - h_A} \quad (1.3.4)$$

$$C_L = u_0 - \sqrt{\frac{gh_A}{h_0} \left(\frac{h_A + h_0}{2} \right)} \quad (1.3.5)$$

$$\frac{u_c^2}{2g} + h_c + m_c = \frac{u_A^2}{2g} + h_A = \frac{u_B^2}{2g} + h_B \quad (1.3.6)$$

$$h_c u_c = h_A u_A = h_B u_B \quad (1.3.7)$$

$$u_c = \sqrt{gh_c} \quad (1.3.8)$$

$$C_R = \frac{h_B u_B - h_D u_D}{h_B - h_D} \quad (1.3.9)$$

$$C_R = u_B - \sqrt{\frac{gh_D}{h_B} \left(\frac{h_D + h_B}{2} \right)} \quad (1.3.10)$$

$$u_D - 2\sqrt{gh_D} = u_0 - 2\sqrt{gh_0} \quad (1.3.11)$$

但し、 m_c は先に述べた山の頂上の高さである。

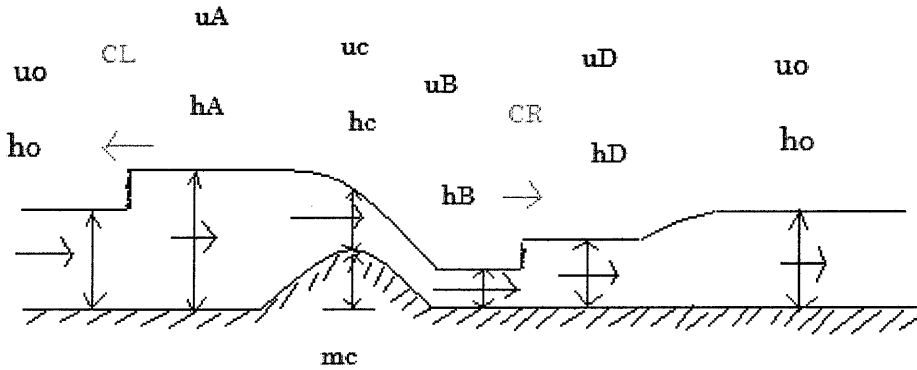


図7 Houghton・Kasahara モデルのイラスト (hydraulic jump の場合)

一方跳水の不連続面が山の麓に留まる場合 (lee jump と呼ばれる)、 h_o と u_o が与えられるものとして、全部で十二個の変数が必要となる。この場合の変数は、ボアの上流への進行速度 CL 、ボア後面の水深 h_A 、ボア後面の流速 u_A 、山頂の水深 h_c 、山頂の流速 u_c 、麓で発生するジャンプの上流側での水深 h_- 及び流速 u_- 、ジャンプの下流側での水深 h_+ 及び流速 u_+ 、ジャンプの留まる山の高さ m^* 、跳水後面の水深 h_D 、跳水後面の流速 u_D の十二個である。ジャンプが下流側に移動する場合の連立方程式のうち、(1. 3. 4)、(1. 3. 5)、(1. 3. 8)、(1. 3. 11) はこの場合についてそのまま適用できる。残りの式は、今の場合以下のように置き換えられる。

$$\frac{u_c^2}{2g} + h_c + m_c = \frac{u_A^2}{2g} + h_A = \frac{u_+^2}{2g} + h_+ + m^* \quad (1. 3. 12)$$

$$h_D u_D = h_+ u_+ \quad (1. 3. 13)$$

$$h_c u_c = h_A u_A = h_- u_- \quad (1. 3. 14)$$

$$C_R = 0 = \frac{h_- u_- - h_+ u_+}{h_- - h_+} \quad (1. 3. 15)$$

$$C_R = 0 = u_- - \sqrt{\frac{gh_+}{h_-} \left(\frac{h_+ + h_-}{2} \right)} \quad (1. 3. 16)$$

Houghton と Kasahara は、上流側の水流が山によって完全に堰止められた場合のフルード数 F_0 と山の高さ M_c の関係を連立方程式から導き出した。その関係式は以下のように与えられる。

$$F_0 = \frac{M_c - 1}{M_c} \sqrt{M_c \frac{1 + M_c}{2}} \quad (1. 3. 17)$$

後に Baines と Davies の二人はボアが停留する条件を F_0 と M_c によって表現した。その関係式は次のように表せる (1980年)。

$$M_c = \frac{(8F_0^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + 1}{16F_0^2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2}F_0^{\frac{2}{3}} \quad (1.3.18)$$

また、跳水が留まるときの F_0 と M_c の関係は $CL = 0$ とすれば得られるが、これを F_0 と M_c のみによって表現することは難しい。実際、この条件式を F_0 と M_c のみで表現することに成功した文献に未だ出会ってはいない。

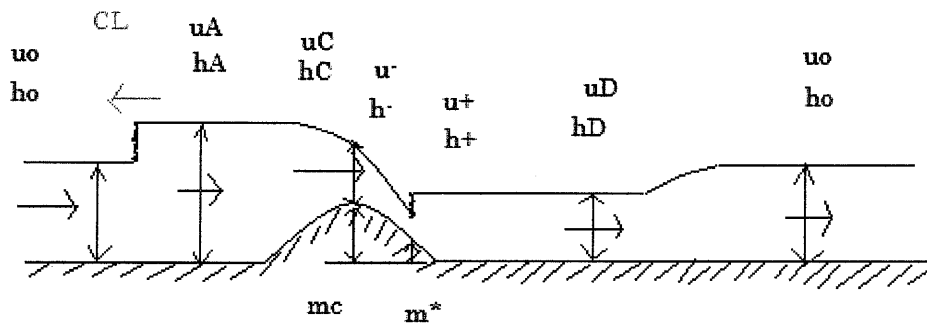


図8 Houghton・Kasahara モデルのイラスト (lee jump の場合)

2. 跳水理論の導出と解釈

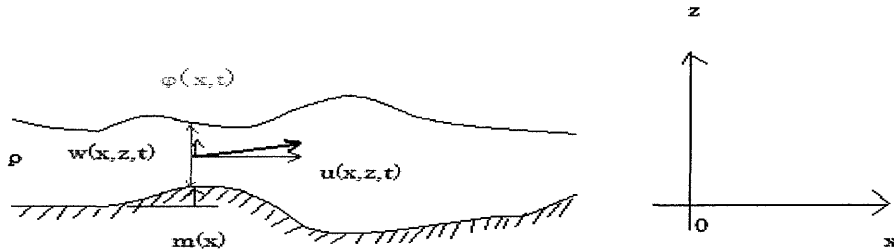


図9 浅水方程式のイラスト

2. 1 浅水方程式系の導出

本文書で考えている長方形水路での山越え水流の場合、流体は水路の方向に十分長く広がっており、流体層の厚さが流体の水平方向の広がり比べてはるかに小さい。この場合、流体の運動は「浅水方程式系」と呼ばれる二つの方程式によって記述することが可能である。そこで、本節では浅水方程式の導出を簡潔に行う。

いま、水路の側壁と平行な方向を x 方向、水路の側壁の法線方向を y 方向、鉛直上向きを z 方向とする。また、流体層の厚さを $\phi(x,t)$ 、水路水平床を $z=0$ 、障害物の高さを $z=m(x)$ とする。そして、前節の仮定 (3) より y 方向の流速は存在しないので、流速は x 方向・ z 方向の二つを考え、それぞれ $u(x,z,t)$ 、 $w(x,z,t)$ とする (図9)。

重力、圧力傾度力が働いている流体の一般的な運動方程式は、以下のように記述される。

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.1.1)$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad (2.1.2)$$

但し、 p は水中の圧力、 ρ は水の密度、 g は重力加速度をそれぞれ表している。いま、流体層の厚さは十分小さいので、水粒子は鉛直方向にあまり激しく運動しないものと考えられる。そこで静水圧平衡を仮定すると、 $\frac{dw}{dt} \cong 0$ となり、(2.

1. 2) は以下のように書き換えられる。

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.1.3)$$

大気圧を圧力の基準値 $p=0$ とすると、自由表面 $z = \phi + m$ で $p=0$ となる。い

ま水は非圧縮性流体とみなせて、密度 ρ が至るところ一定となるので、(2. 1. 3) は容易に積分することが出来て、

$$p = \rho g(\phi + m - z) \quad (2. 1. 4)$$

となる。(2. 1. 4) を x について偏微分すると、

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial(\phi + m)}{\partial x} \quad (2. 1. 5)$$

となるので、 $\phi = \phi(x, t)$ 、 $m = m(x)$ より x 方向の加速度 du/dt は z に依存しないことが分かる。従って、(2. 1. 1) は、

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2. 1. 6)$$

と書き換えられる。

一方、前節の仮定(6)より、水は非圧縮性流体とみなせるので、今の場合の連続の式は、以下のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2. 1. 7)$$

いま、(2. 1. 7) 式を z について m から $\phi + m$ まで積分すると、

$$\int_m^{\phi+m} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dz + w(x, \phi + m, t) - w(x, m, t) = 0 \quad (2. 1. 8)$$

となる。自由表面における流速の鉛直成分 $w(x, \phi + m, t)$ は、水面変位 $z = \phi + m$ のラグランジュ時間微分と考えることが出来るので、

$$w(x, \phi + m, t) = \frac{d(\phi(x, t) + m(x))}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u(x, \phi + m, t) \cdot \frac{\partial(\phi + m)}{\partial x} \quad (2. 1. 9)$$

が成り立つ。また水路床において、流体粒子の流速の鉛直成分 $w(x, m, t)$ について、

$$w(x, m, t) = \frac{dm}{dt} = u(x, m, t) \cdot \frac{\partial m}{\partial x} \quad (2. 1. 10)$$

が成立する。(2. 1. 9) 及び (2. 1. 10) を (2. 1. 8) に代入すると、

$$0 = \int_m^{\phi+m} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dz + \frac{\partial \phi}{\partial t} + u(x, \phi + m, t) \cdot \frac{\partial(\phi + m)}{\partial x} - u(x, m, t) \cdot \frac{\partial m}{\partial x} \quad (2. 1. 11)$$

を得る。ここで、 $u(x, z, t)$ を z に関して積分したものを $U(x, z, t)$ とすると、 $\phi = \phi(x, t)$ 、 $m = m(x)$ であることから、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_m^{\phi+m} u \, dz \right) &= \frac{d}{dx} \{U(x, \phi+m, t) - U(x, m, t)\} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \{U(x, \phi+m, t)\} + \frac{\partial \{U(x, \phi+m, t)\}}{\partial(\phi+m)} \cdot \left\{ \frac{\partial(\phi+m)}{\partial x} \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \{U(x, m, t)\} - \frac{\partial \{U(x, m, t)\}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \{U(x, \phi+m, t) - U(x, m, t)\} + \frac{\partial \{U(x, \phi+m, t)\}}{\partial(\phi+m)} \cdot \left\{ \frac{\partial(\phi+m)}{\partial x} \right\} - \frac{\partial \{U(x, m, t)\}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial x} \\
&= \int_m^{\phi+m} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dz + \{u(x, \phi+m, t)\} \cdot \left\{ \frac{\partial(\phi+m)}{\partial x} \right\} - \{u(x, m, t)\} \cdot \left\{ \frac{\partial m}{\partial x} \right\}
\end{aligned} \tag{2. 1. 12}$$

が成り立つので、(2. 1. 12) と (2. 1. 11) との差をとると、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_m^{\phi+m} u \, dz \right\} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{2. 1. 13}$$

となる。先ほど示したとおり $\frac{du}{dt}$ は z に依存しないので、ある時刻で全ての場所において u が z に独立ならば、どの時刻でも u は z に独立となる。そこで、時刻 $t=0$ において、流体運動が完全静止状態から始まったものとする、その後常に u は z に依存しないことになるので、(2. 1. 13) の積分は容易に計算されて、

$$\frac{\partial \{u\phi\}}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{2. 1. 14}$$

となる。

以上、浅水流に関する運動方程式 (2. 1. 6)、及び連続の式 (2. 1. 14) を導くことが出来た。次節以降、この方程式系をもとに山越え水流を議論する。

2. 2 Long による跳水の原理説明

(I) 定常状態 (subcritical flow と supercritical flow)

この節では、Long が示した跳水の原理に焦点を当て、それに係る数式の導出と、それらの物理的解釈に傾注する。

まず、跳水の発生しない定常状態について考える。流れが至るところ定常であるとき、オイラー時間微分の項はゼロとなる。従って、この場合の運動方程式 (2. 1. 6) と連続の式 (2. 1. 14) は以下の形で書ける。

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = -g \cdot \left\{ \frac{\partial(\phi + m)}{\partial x} \right\} \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial\{u\phi\}}{\partial x} = 0 \quad (2.2.2)$$

(2.2.1) 式の左辺に着目すると、 $u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right)$ と変形することが出来るので、(2.2.1) 式は更に次のように書き改められる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{u^2}{2} + g(\phi + m) \right\} = 0 \quad (2.2.3)$$

(2.2.3) 式を積分すると、H を定数として、

$$\frac{u^2}{2g} + \phi + m = H \quad (2.2.4)$$

となる。水理学では H のことを全水頭<total head>と呼ぶ。水頭とは流体の単位体積重量当たりのエネルギーのことを言う。一方、(2.2.2) 式も同様に積分すると、

$$u\phi = Q \quad (Q \text{ は定数}) \quad (2.2.5)$$

と書ける。Q に水路幅を乗じると、水路での単位時間当たりの流量となる。

(2.2.4) 式及び (2.2.5) 式から、定常・非定常を分ける臨界曲線 (1.3.3) を求めることが出来る。その導出を行ってみる。

流れが完全な定常状態であるとき、(2.2.4) 及び (2.2.5) は至る所で成り立つ。従って、山から十分遠い一般流の状態でも勿論二式は成立する。よって、二式を一般場の状態と任意の場所での状態について適用すると、

$$\frac{u_0^2}{2g} + h_0 = \frac{u^2}{2g} + \phi + m = H \quad (2.2.6)$$

$$u_0 h_0 = u\phi = Q \quad (2.2.7)$$

となる。(2.2.7) 式を (2.2.6) 式に代入して、 ϕ を消去すると、

$$\frac{u_0^2}{2g} + h_0 = \frac{u^2}{2g} + \frac{u_0 h_0}{u} + m \quad (2.2.8)$$

と書ける。ここで、両辺に $\frac{u}{u_0 h_0}$ を掛けると、

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u_0^2}{gh_0} \right) \cdot \left(\frac{u}{u_0} \right) + \left(\frac{u}{u_0} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u_0^2}{gh_0} \right) \cdot \left(\frac{u^3}{u_0^3} \right) + 1 + \left(\frac{u}{u_0} \right) \cdot \left(\frac{m}{h_0} \right) \quad (2.2.9)$$

となる。いま、「無次元化された山の高さ」M・「無次元化された流速」U を以下のように定義する。

$$M \equiv \frac{m}{h_0} \quad (2.2.10)$$

$$U \equiv \frac{u}{u_0} \quad (2.2.11)$$

このとき、 M 、 U 、そして(1.3.2)で導入したフルード数 F_0 の三つを用いて(2.2.9)を書き換えると、

$$\frac{1}{2}F_0^2U + U = \frac{1}{2}F_0^2U^3 + 1 + U \cdot M$$

すなわち、

$$\frac{1}{2}F_0^2U^3 + \left\{ M - \frac{1}{2}F_0^2 - 1 \right\}U + 1 = 0 \quad (2.2.12)$$

という関係が得られる。いま、一般場を与えておいて、山の周辺の流れがどの

ように振舞うのかということを考えているので、 $F_0 = \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}}$ は固定された定数と

考えることが出来る。従って、(2.2.12)式は二つの変数 M と U との関係式となっている。この関係式から、 M のとりうる範囲を考えてみる。

いま、 M が U の関数であると考え、 $M(U)$ を U について微分してみると、

$$\frac{3}{2}F_0^2U^2 + \left\{ M - \frac{1}{2}F_0^2 - 1 \right\} + \left(\frac{dM}{dU} \right) \cdot U = 0$$

となる。この式の両辺に U を掛け、(2.2.12)との差をとると、

$$F_0^2U^3 + \left(\frac{dM}{dU} \right) \cdot U^2 - 1 = 0$$

両辺を U^2 で割ると、

$$\frac{dM}{dU} = -F_0^2U + \frac{1}{U^2} \quad (2.2.13)$$

が得られる。(2.2.13)をもう一度 U について微分すると、

$$\frac{d^2M}{dU^2} = -F_0^2 - \frac{2}{U^3} \quad (2.2.14)$$

となる。(2.2.13)式で、 $\frac{dM}{dU} = 0$ とすると、 $U = F_0^{-\frac{2}{3}}$ となる。そこで、(2.

1. 14) に $U = F_0^{-\frac{2}{3}}$ を代入すると、

$$\left. \frac{d^2M}{dU^2} \right|_{U=F_0^{-\frac{2}{3}}} = -3F_0^2 < 0 \quad (2.2.15)$$

となる。よって、 $U = F_0^{-\frac{2}{3}}$ において M は極大値（最大値）をとる。このときの M の値を M_{\max} とすると、(2. 2. 12) より、

$$\frac{1}{2} + \left\{ M_{\max} - \frac{1}{2} F_0^2 - 1 \right\} F_0^{-\frac{2}{3}} + 1 = 0$$

すなわち、

$$M_{\max} = 1 + \frac{1}{2} F_0^2 - \frac{3}{2} F_0^{\frac{2}{3}} \quad (2. 2. 16)$$

を得る。 $M > 0$ であることは明らかなので、定常状態であるときには、

$$0 < M < M_{\max} \quad (2. 2. 17)$$

が成立しなければならない。流れ全体が定常となる為には、山頂 $M = M_c$ で (2. 2. 17) が満たされていけばよい。よって、定常状態が実現される最大の山頂高度 M_c は、

$$M_c = 1 + \frac{1}{2} F_0^2 - \frac{3}{2} F_0^{\frac{2}{3}} \quad (2. 2. 18)$$

と表され、これより大きい M_c の値となるとき、流れは非定常となる。かくして定常・非定常を分ける曲線、臨界曲線が得られた。

次に、定常状態には **subcritical flow** と **supercritical flow** の二つの異なる状態が存在することを示す。

1. 3節で述べたように、**subcritical flow** とは山の高さが大きくなると流体層の厚さは小さくなり、逆に流速は大きくなるような流れのことであり、**supercritical flow** とは山の高さが大きくなると流体層の厚さは大きくなり、流速は小さくなるような流れのことである。そこで、先ず無次元化された山の高さ M と流速 U の関係について調べる。

先ず、 $M=0$ となる U の値を調べる。(2. 2. 12) で $M=0$ とすると、

$$\frac{1}{2} F_0^2 U^3 - \left\{ \frac{1}{2} F_0^2 + 1 \right\} U + 1 = 0 \quad (2. 2. 19)$$

となり、 U についての三次方程式が得られる。ここで、一般流の状態 ($U=1$) は山から十分遠い所 ($M=0$) で実現されることを考えると、 $U=1$ は (2. 2. 19) の解とも言える。実際、 $U=1$ を代入すると、左辺はゼロとなっていることが分かる。そこで、 $(U-1)$ という因子が現れるように (2. 2. 19) の左辺を因数分解すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} F_0^2 (U^3 - U) - U + 1 \\ &= \frac{1}{2} F_0^2 U(U+1)(U-1) - (U-1) = (U-1) \left\{ \frac{1}{2} F_0^2 U(U+1) - 1 \right\} \end{aligned} \quad (2. 2. 20)$$

となる。ここで、二次方程式 $\frac{1}{2}F_0^2 U(U+1) - 1 = 0$ を解くと、

$$U = \frac{-F_0^2 \pm \sqrt{F_0^4 + 8F_0^2}}{2F_0^2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8}{F_0^2}} \quad (2.2.21)$$

となる。いま、 $U > 0$ を想定しているので、(2.2.21) の $U < 0$ となる一方の解は棄却され、(2.2.20) の $U > 0$ となる解は、

$$U = 1, \quad -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8}{F_0^2}} \quad (2.2.22)$$

と求まる。ここで、 $U = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8}{F_0^2}}$ は、 $F_0 < 1$ で 1 より大きく、 $F_0 > 1$ で 1

よりも小さくなるので、(2.2.22) の二つの解の大小は F_0 が 1 より大きい
いか小さいかによって決まる。よって、 M を縦軸、 U を横軸にとってグラフを
描いた場合、 $F_0 < 1$ と $F_0 > 1$ の二つの場合が考えられる。

先に $F_0 < 1$ の場合を考える (図 10)。初め山の上流側の $M=0$ のところでは
 $U=1$ である。定常状態の場合の流れは連続的であるから、 M の値が連続的に変
化すると U も連続的に変化する。従って M が大きくなると、 U も一般流の状態
から連続的に推移し、値が大きくなる。流れが山頂 $M=M_c (< M_{max})$ に到達し、
山を下るとき、 M は連続的に小さくなり、 U もそれに伴って連続的に小さくな
る。そして山を過ぎて $M=0$ となると、再び一般場の状態に戻る。すなわち、
グラフの上では、曲線 $M=M(U)$ に沿って $U=1$ の状態に戻ることになる。こ
のことから、 $F_0 < 1$ の場合には山の上で水流は増速することが分かる。

ところで、グラフから分かるように、一つの M に対して U は $U = (F_0)^{-2}$ の
左右で二つの値をとることが可能である。このことから、もう一つの U が物理
的に存在出来るのではないかという疑念が生じて来る。しかしいま述べたよう
に、一般流 ($M=0$) で $U=1$ となることと、流れの連続性から、 $U > (F_0)^{-2}$
を満たす U は実現されないことが分かる。

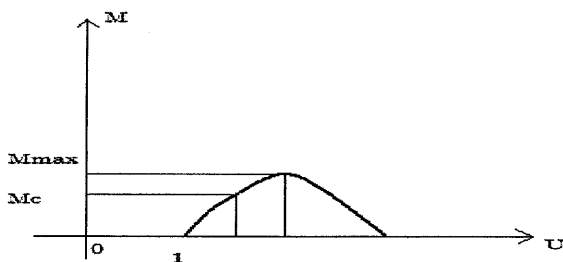


図 10 subcritical の MU グラフ

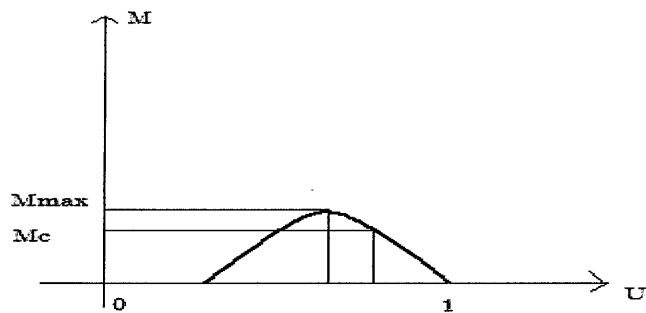


図 1 1 supercritical の MU グラフ

次に $F_0 > 1$ の場合を考える (図 1 1)。この場合も上流の一般流の状態を起点にして流速を調べる。グラフより、 M がゼロから大きくなっていくと、 U は 1 から小さくなっていくことが分かる。また、流れが山を登りきって下り始めるとき、 M の減少と共に U は増加する。そして、山を過ぎると再び一般流の状態に戻る。この場合も一つの M に対して二つの U の値が可能であるが、 $U < (F_0)^{-1/2}$ を満たす U の値が実現されないことは明らかである。以上のことから、この $F_0 > 1$ の場合には山の上で減速していることが分かる。

このように、定常状態には $F_0 < 1$ の状態 (subcritical flow) と $F_0 > 1$ の状態 (supercritical flow) の二つの場合が存在することが示される。次に、subcritical flow のとき山の上で水面は凹み、supercritical flow のとき山の上で水面が盛り上がることを導く。

ここでは、 ϕ と m の関係について調べる。(2. 2. 5) を用いて、(2. 2. 3) から u を消去すると、

$$0 = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{u^2}{2g} + \phi + m \right\} = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{Q^2}{2g\phi^2} + \phi + m \right\} \quad (2. 2. 23)$$

となる。いま、 Q が定数であることに注意して微分を実行し、 Q を再び u に戻すと、

$$\begin{aligned} 0 &= - \left(\frac{Q^2}{g\phi^3} \right) \cdot \left(\frac{d\phi}{dx} \right) + \left(\frac{d\phi}{dx} \right) + \left(\frac{dm}{dx} \right) \\ &= \left(1 - \frac{Q^2}{g\phi^3} \right) \cdot \left(\frac{d\phi}{dx} \right) + \left(\frac{dm}{dx} \right) = \left(1 - \frac{u^2}{g\phi} \right) \left(\frac{d\phi}{dx} \right) + \left(\frac{dm}{dx} \right) \end{aligned}$$

すなわち、

$$\left(1 - \frac{u^2}{g\phi} \right) \left(\frac{d\phi}{dx} \right) = - \left(\frac{dm}{dx} \right) \quad (2. 2. 24)$$

となる。ここで、一般流におけるフルード数 $F_0 = \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}}$ を拡張して、「局所的な

フルード数」 Fr を以下のように定義する。

$$Fr \equiv \frac{u}{\sqrt{g\phi}} \quad (2.2.25)$$

このとき、(2.2.24) は以下のように書き換えられる。

$$(1 - Fr^2) \left(\frac{d\phi}{dx} \right) = - \left(\frac{dm}{dx} \right) \quad (2.2.26)$$

この式から、次のことが分かる。即ち、 $Fr < 1$ の場合、山の高さ m が大きくなると流体層の厚さ ϕ は小さくなり、逆に m が小さくなると ϕ は大きくなる。従って山の上の至る所で $Fr < 1$ が満たされれば、水面は山の上で凹むことになる。一方 $Fr > 1$ のときには、 m が大きくなると ϕ も大きくなり、 m が小さくなると ϕ も小さくなる。よって、 $Fr > 1$ を常に満足すれば、水面は山の上で盛り上がることになる。

ここで、 $Fr < 1$ であれば $F_0 < 1$ となり、 $Fr > 1$ のときには $F_0 > 1$ となることを示してみる。

先ず $Fr < 1$ の場合を考えると、上で示したとおり山の上で流体層の厚さは小さくなるので、 $h_0 > \phi$ が満たされる。よって、

$$1 > Fr^2 = \frac{u^2}{g\phi} > \frac{u^2}{gh_0} \quad (2.2.27)$$

となる。ここで、質量フラックス保存の式 (2.2.7) より、 $u_0 = \frac{u\phi}{h_0}$ であるから、

$$1 > \frac{u^2}{gh_0} > \frac{u_0^2}{gh_0} = F_0^2 \quad (2.2.28)$$

が成立する。

また、 $Fr > 1$ の場合は、 $h_0 < \phi$ であるから、

$$1 < Fr^2 = \frac{u^2}{g\phi} < \frac{u^2}{gh_0} \quad (2.2.29)$$

となる。この場合、(2.2.7) より $u_0 > u$ であるから、

$$1 < \frac{u^2}{gh_0} < \frac{u_0^2}{gh_0} = F_0^2 \quad (2.2.30)$$

となる。

上の議論から、定常状態では、 $Fr < 1$ で $Fo < 1$ となり、 $Fr > 1$ で $Fo > 1$ となることが分かったので、(2. 2. 26) から示唆される事実とを考え合わせると、 $Fo < 1$ のとき水面は山の上で窪み、 $Fo > 1$ のとき水面は山の上で膨らむということが結論付けられる。

(II) 非定常状態 (跳水現象の発生)

ここでは、図中の臨界曲線よりも右側の非定常領域について考える。この領域では跳水現象が起きることが知られているが、水理学ではこれを「比エネルギー図」<specific energy diagram>と呼ばれるグラフを用いて説明している。実際、Long も控えめながらこの図を引用している。そこで、本節でも比エネルギー図を導入して、跳水の発生機構の説明を試みることにする。

(2. 2. 4) 式で示したように、静水圧平衡が成立している定常状態では、全水頭 H が至る所で保存されている。全水頭 H の第一項 ($u^2/2g$) は速度水頭、第二項 ϕ は圧力水頭、第三項 m は位置水頭と呼ばれることが多い。これら三つのうち、第一項と第二項の和を「比エネルギー」<specific energy>と呼ぶことにし、 e で表すと、

$$e \equiv \frac{u^2}{2g} + \phi \quad (2. 2. 31)$$

と定義される。質量フラックス保存の式 (2. 2. 5) を用いて u を消去すると、

$$e = e(\phi) = \frac{Q^2}{2g\phi^2} + \phi \quad (2. 2. 32)$$

と表され、比エネルギー e は流体層の厚さ ϕ の関数となる。ここで、 $\phi \rightarrow 0$ の極限を考えると、 e は $+\infty$ となり発散する。一方、 ϕ が十分大きいとき $\phi^{-2} \ll 1$ となるから、 $e \approx \phi$ と考えることが出来る。また、 e を ϕ で微分すると、

$$\frac{de}{d\phi} = -\frac{Q^2}{g\phi^3} + 1 \quad (2. 2. 33)$$

となるので、 e は $\frac{de}{d\phi} = 0$ を満たす点、即ち $\phi = \left(\frac{Q^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}$ で極値をとる。(2. 2.

33) をもう一度微分すると、

$$\frac{d^2e}{d\phi^2} = \frac{3Q^2}{g\phi^4} > 0 \quad (2. 2. 34)$$

となるので、 $\phi = \left(\frac{Q^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}$ で極小値となることが分かる。

以上のことを踏まえ、 e を横軸、 ϕ を縦軸にとってグラフを描くと、図 1 2 のような曲線となる。この図は比エネルギー図 <specific energy diagram> と呼ばれ、水理学の分野では、跳水や水門からの水の放出などを理解する為に頻りに用いられている。

e の値を極小にする ϕ の値が $\left(\frac{Q^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}$ であることを示したが、実はこの ϕ は跳水

を議論するうえで特別な意味を持つ。そこでこれを「 ϕ_c 」と表し、「限界水深」 <critical depth> と呼ぶことにする。 $\phi = \phi_c$ に対応する流速を u_c とすると、(2. 2. 5) 式より、

$$\phi_c^3 = \frac{Q^2}{g} = \frac{\phi_c^2 u_c^2}{g}$$

即ち、

$$u_c^2 = g\phi_c \quad (2. 2. 35)$$

という関係が成り立つ。(2. 2. 25) で定義した局所的なフルード数を考えると、限界水深のところではその値が 1 となっていることが分かる。比エネルギーの曲線上において、水深 ϕ が ϕ_c よりも大きいところは $Fr < 1$ (subcritical) の状態に対応し、 ϕ_c よりも小さいところは $Fr > 1$ (supercritical) の状態に対応する。このことを確かめてみよう。

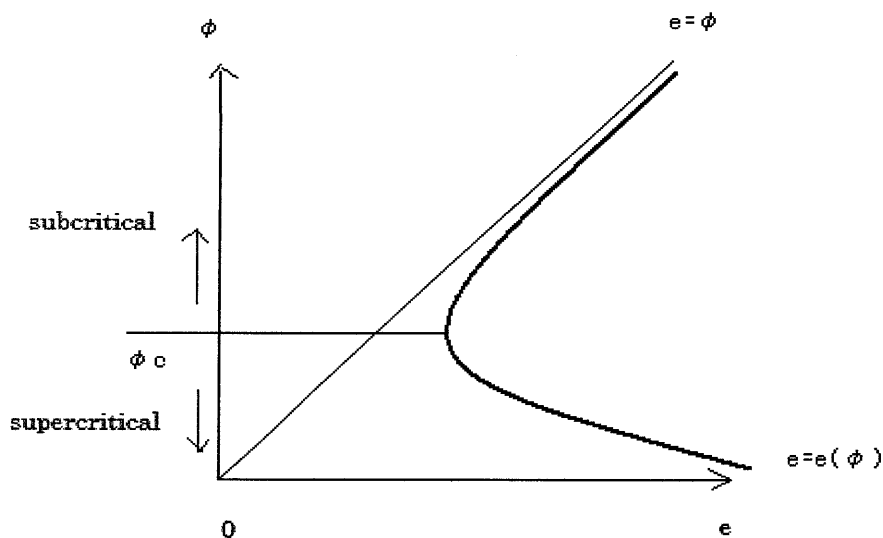


図 1 2 specific energy diagram の図

全水頭 H を与える (2. 2. 4) 式を x で微分すると、 H は定数とみなせるので、

$$\frac{d(e+m)}{dx} = 0$$

即ち、

$$\frac{de}{dx} = -\frac{dm}{dx} \quad (2. 2. 36)$$

を得る。これを (2. 2. 26) 式に代入すると、

$$\frac{de}{dx} = -\frac{dm}{dx} = (1 - Fr^2) \cdot \frac{d\phi}{dx} \quad (2. 2. 37)$$

という関係が得られる。 $e = e(\phi)$ であることを考慮すると、(2. 2. 33) 及び (2. 2. 37) より、

$$\frac{de}{d\phi} = 1 - Fr^2 = -\frac{Q^2}{g\phi^3} + 1 \quad (2. 2. 38)$$

が成立する。(2. 2. 38) 或いは比エネルギー図より、 $\phi > \phi_c$ では $\frac{de}{d\phi} > 0$ が

成立するので、 $Fr < 1$ となることが分かる。また、 $\phi < \phi_c$ では $\frac{de}{d\phi} < 0$ となるの

で、 $Fr > 1$ が満たされることが分かる。そういう意味で、限界水深 ϕ_c は **subcritical** と **supercritical** の二つの状態の境界となっていると言ふことが出来る。

定常状態に於て、一般流で $F_0 < 1$ が成り立つとき、流れの至る所で $Fr < 1$ となり、また $F_0 > 1$ のときあらゆる場所で $Fr > 1$ が成り立つことは前に述べたが、これら二つの場合について、比エネルギー図を用いて考えてみる。

先ず $F_0 < 1$ の場合を考える。図はこのときの流れの様子を表したもので、点 A、B、C はそれぞれ一般流、山の中腹の流れ、山頂の流れを意味するものとする。これらの点を比エネルギー図にプロットすると、図 13 のようになる。但し、 ϕ_t は山頂での流体層の厚さを表しているものとする。この場合、流れのと

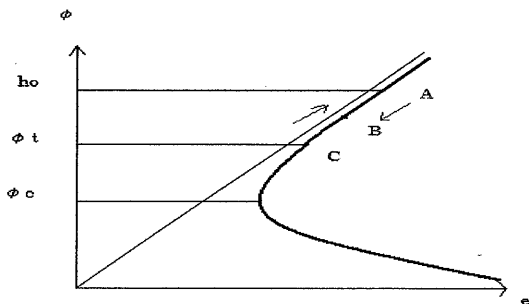


図 13 subcritical での比エネルギー図

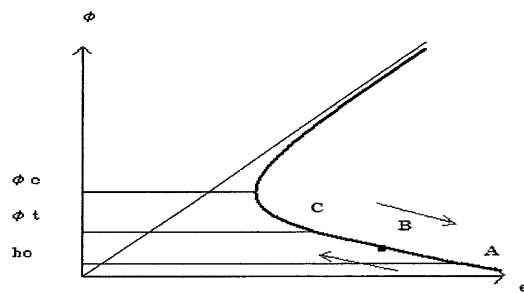


図 14 supercritical での比エネルギー図

りうる状態は、曲線 $e=e(\phi)$ の $(\phi_c <) \phi_t < \phi < h_0$ の部分で表現されることになる。一方、 $F_0 > 1$ の場合も同様に考えてみると、流れの状態は曲線 $e=e(\phi)$ の $h_0 < \phi < \phi_t (< \phi_c)$ の部分で全て表現されることになる (図 1 4 参照)。以上をまとめると、いずれの定常状態も、流れの状態が $\phi = \phi_c$ をまたがって実現されることはないということになる。

次に、非定常状態を考えよう。臨界曲線を超えるような山頂高度を有する山の場合、山を登るとともに水深 ϕ は限界水深 ϕ_c に近づき、遂にはあるところで $\phi = \phi_c$ が実現される。限界水深に達したとき、局所的フルード数 Fr は 1 となるので、(2. 2. 37) 式より、 $\frac{dm}{dx} = 0$ が実現されることが分かる。前に第一章 1. 3 節の仮定 (7) で述べたように、山のピークは一つしかない場合を想定しているので、 $\frac{dm}{dx} = 0$ となる場所は山頂以外にはない。従って、「非定常状態で限界水深が実現される時、それは必ず山頂で達成される」ということになる。

限界水深が山頂で実現されると、例えば山の上流側で **subcritical** となり、山の下流側で **supercritical** となるといった具合に、上流側・下流側の状態が互いに異なるといった状況が実現可能となる。しかし、山頂で限界水深になったとしても、そのすぐ下流側からまた元の状態に戻る可能性も十分考えられる。そこで、水深 ϕ の山頂付近での変化を調べてみる。(2. 2. 37) 式を x で微分すると、

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 m}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left\{ \left(1 - \frac{u^2}{g\phi} \right) \cdot \frac{d\phi}{dx} \right\} \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ 1 - \frac{u^2}{g\phi} \right\} \cdot \left(\frac{d\phi}{dx} \right) + \left(1 - \frac{u^2}{g\phi} \right) \cdot \left(\frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) \end{aligned} \quad (2. 2. 39)$$

となる。ここで、

$$\frac{d}{dx} \left\{ 1 - \frac{u^2}{g\phi} \right\} = \left(\frac{u^2}{g\phi^2} \right) \cdot \left(\frac{d\phi}{dx} \right) - \left(\frac{2u}{g\phi} \right) \cdot \left(\frac{du}{dx} \right)$$

であり、

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{Q}{\phi} \right) = - \left(\frac{Q}{\phi^2} \right) \cdot \left(\frac{d\phi}{dx} \right) = - \left(\frac{u}{\phi} \right) \cdot \left(\frac{d\phi}{dx} \right)$$

が成立するから、(2. 2. 39) 式は以下のように書き換えられる。

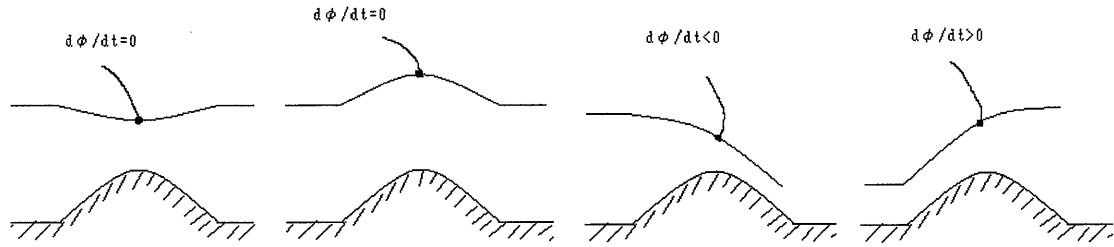


図 1 5 $d\phi/dx=0$ を否定する図

$$-\frac{d^2m}{dx^2} = \left\{ \left(\frac{u^2}{g\phi^2} \right) \cdot \left(\frac{d\phi}{dx} \right) - \left(\frac{2u}{g\phi} \right) \cdot \left(\frac{du}{dx} \right) \right\} \cdot \left(\frac{d\phi}{dx} \right) + \left(1 - \frac{u^2}{g\phi} \right) \cdot \left(\frac{d^2\phi}{dx^2} \right) \quad (2. 2. 40)$$

$$= \left(\frac{3u^2}{g\phi^2} \right) \cdot \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left(1 - \frac{u^2}{g\phi} \right) \cdot \left(\frac{d^2\phi}{dx^2} \right)$$

山の頂上では $Fr = \frac{u^2}{g\phi} = 1$ 、 $\frac{d^2m}{dx^2} < 0$ となるので、上の式から、

$$\left(\frac{3u^2}{g\phi^2} \right) \cdot \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 > 0$$

即ち、

$$\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 > 0 \quad (\text{山の頂上に於て}) \quad (2. 2. 41)$$

が成立する。図 1 5 に示すように、山頂のすぐ下流側から元の状態に戻り始める為には、山頂で $\frac{d\phi}{dx} = 0$ とならなければならないから、(2. 2. 41) 式より、

「山頂で限界水深に達すると、その下流側で必ず別の状態に移行する」ことが示されたことになる。

いま、山のはるか上流側と下流側では、山周辺で発生する擾乱の影響を受けておらず、一般流の状態にある。従って、例えば一般流が **subcritical** の状態であり、山頂で限界水深が実現されるとすれば、山頂を越えたところで流れは **supercritical** の状態となるから、下流側のどこかで **supercritical** から **subcritical** に戻らなければならないということになる。**supercritical** の状態では、山を下っていくと流体層の厚さ ϕ が小さくなるので、山を下り終えてもまだ **supercritical** のままである。この状態から連続的に一般流 (**subcritical**) の状態に戻るには、比エネルギーの曲線を連続的にたどっていかなければならないが、もはや比エネルギーを変化させる山は存在しないので、これは物理的に不可能である。従って、下流側のどこかで比エネルギーが不連続的に変化することによって一般流の状態に戻るようになる。比エネルギーが不連続に変化す

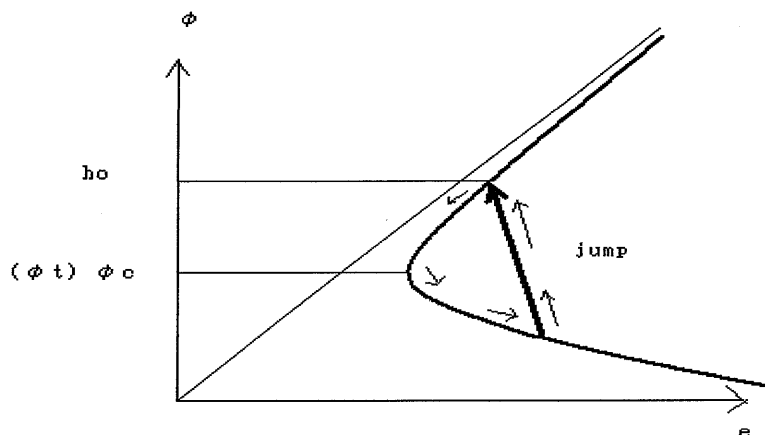


図 1 6 跳水発生時の比エネルギー図

るとき、水深 ϕ 、流速 u もまた不連続的に変化する。この状態の飛躍が「跳水現象」〈hydraulic jump〉である。

状態の飛躍は、subcritical から supercritical への不連続遷移と、supercritical から subcritical への不連続遷移の二つの可能性が考えられる。前者は hydraulic drop と呼ばれるが、これは物理的に不可能であることが知られている。つまり、水深 ϕ が低い状態から高い状態への不連続遷移しか実現されないということになる。このことを説明する為に、先ず跳水周辺の運動量について考えてみる。

いま、簡単の為に跳水の不連続面は静止しているものとする。跳水の前後で水路床と垂直な断面をとり、それらの断面に挟まれた流体の水平方向の運動量について考える（図 1 7 参照）。一般に、ある固定された領域における運動量の時間変化は、運動量の流入量、応力による力積、体積力による力積の和に等しい。いまの場合、圧力に関して静水圧平衡が成り立っているので、応力は静水圧のみを考慮すればよい。また、体積力としてこの場合重力を想定することになるが、重力は鉛直成分のみ有するので、水平方向については重力を考えなくてよい。さらに、水路床との摩擦力は無視できるものと考えているので、固定

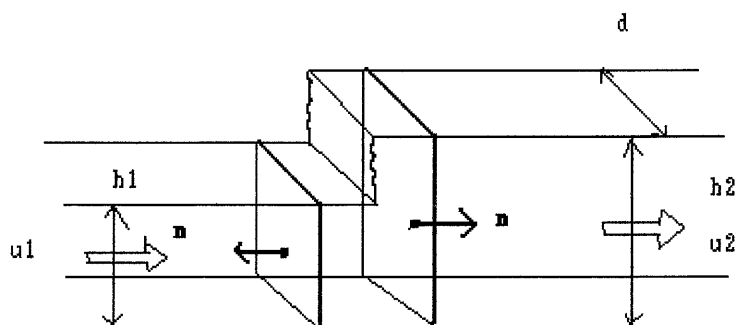


図 1 7 運動量保存則導出のための図

領域内の水平運動量は時間的に変化しない。よって、水平方向に関して、運動量の流入と静水圧による力積の和がゼロとなっていて、運動量の保存が実現されている。即ち、固定領域の断面を S 、静水圧を p 、水平流速を u 、水の密度を ρ 、断面の外向き法線ベクトルの水平成分を n とすると、以下の式が成立する。

$$0 = \int_S \{-\rho u \cdot u \cdot n\} dS + \int_S (-p \cdot n) dS \quad (2.2.42)$$

いま、上流側の断面で $n=-1$ 、下流側の断面で $n=1$ なので、跳水前の物理量を添え字 1 で表し、跳水後の物理量を添え字 2 で表現することになると、(2.2.42) 式は以下のように書き下せる。

$$0 = \int_{S_1} (\rho u_1^2) dS_1 - \int_{S_2} (\rho u_2^2) dS_2 + \int_{S_1} (p_1 \cdot dS_1) - \int_{S_2} (p_2 \cdot dS_2) \quad (2.2.43)$$

ここで、断面は水平な水路床に垂直であるので、 $dS_i = dy_i dz_i$ ($i=1,2$) であるが、流れは y 座標に依存しない。従って水路幅を $d(=const.)$ とすると、全ての項に d が現れるので結局、

$$0 = \int_0^{h_1} (\rho u_1^2) dz_1 - \int_0^{h_2} (\rho u_2^2) dz_2 + \int_0^{h_1} (p_1 \cdot dz_1) - \int_0^{h_2} (p_2 \cdot dz_2) \quad (2.2.44)$$

となる。ここで、水平水路床における圧力 p は、(2.1.4) 式で $m=0$ 、 $\phi = h_i$ とすることにより、

$$p(z_i) = \rho g(h_i - z_i) \quad (2.2.45)$$

と表せるので、(2.2.44) 及び (2.2.45) より、

$$\begin{aligned} 0 &= \rho u_1^2 \cdot h_1 - \rho u_2^2 \cdot h_2 + \rho g \left[h_1 z_1 - \frac{z_1^2}{2} \right]_{z_1=0}^{z_1=h_1} - \rho g \left[h_2 z_2 - \frac{z_2^2}{2} \right]_{z_2=0}^{z_2=h_2} \\ &= \rho u_1^2 \cdot h_1 - \rho u_2^2 \cdot h_2 + \frac{\rho g h_1^2}{2} - \frac{\rho g h_2^2}{2} \end{aligned} \quad (2.2.46)$$

という関係が得られる。この式は跳水前後での運動量保存を表す式である。いまこれを用いて、跳水前後での比エネルギー（力学的エネルギー）の変化を調べてみる。

跳水前の比エネルギーを e_1 、跳水後の比エネルギーを e_2 とし、その差 $e_1 - e_2$ を Δe とする。今考えている固定領域については水深の時間変化はないものとみなせるので、単位幅流量は跳水前後で一定である。よって、

$$u_1 h_1 = u_2 h_2 = Q \quad (2.2.47)$$

$$e_1 = \frac{Q^2}{2gh_1^2} + h_1 \quad (2.2.48)$$

$$e_2 = \frac{Q^2}{2gh_2^2} + h_2 \quad (2.2.49)$$

が成り立つ。(2.2.47)式を用いて、(2.2.46)式から u_1 、 u_2 を消去すると、

$$\begin{aligned} 0 &= u_1^2 h_1 - u_2^2 h_2 + \frac{gh_1^2}{2} - \frac{gh_2^2}{2} \\ &= \left(\frac{Q}{h_1}\right)^2 \cdot h_1 - \left(\frac{Q}{h_2}\right)^2 \cdot h_2 + \frac{gh_1^2}{2} - \frac{gh_2^2}{2} \\ &= \frac{Q^2}{h_1} - \frac{Q^2}{h_2} + \frac{gh_1^2}{2} - \frac{gh_2^2}{2} \\ &= \frac{Q^2(h_2 - h_1)}{h_1 h_2} + \frac{g(h_1^2 - h_2^2)}{2} \end{aligned} \quad (2.2.50)$$

となる。これを Q^2 について整理すると、

$$\begin{aligned} Q^2 &= \left\{ \frac{g(h_2^2 - h_1^2)}{2} \right\} \cdot \left\{ \frac{h_1 h_2}{h_2 - h_1} \right\} \\ &= \frac{gh_1 h_2 (h_2 - h_1)}{2} \end{aligned} \quad (2.2.51)$$

を得る。一方、比エネルギーの変化 Δe は (2.2.48)、(2.2.49) より、

$$\begin{aligned} \Delta e = e_1 - e_2 &= \frac{Q^2}{2gh_1^2} + h_1 - \frac{Q^2}{2gh_2^2} - h_2 \\ &= \left(\frac{Q^2}{2g}\right) \cdot \left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2}\right) + h_1 - h_2 \\ &= \frac{Q^2(h_2^2 - h_1^2)}{2gh_1^2 h_2^2} + (h_1 - h_2) \end{aligned} \quad (2.2.52)$$

と表される。(2.2.51)を(2.2.52)に代入して Q を消去すると、

$$\begin{aligned} \Delta e &= \left\{ \frac{gh_1 h_2 (h_2 + h_1)}{2} \right\} \cdot \left\{ \frac{h_2^2 - h_1^2}{2gh_1^2 h_2^2} \right\} + (h_1 - h_2) \\ &= \frac{(h_2^2 - h_1^2)(h_2 + h_1)}{4h_1 h_2} + (h_1 - h_2) \\ &= (h_2 - h_1) \cdot \left\{ \frac{(h_2 + h_1)^2}{4h_1 h_2} - 1 \right\} \\ &= (h_2 - h_1) \cdot \left(\frac{(h_2 - h_1)^2}{4h_1 h_2} \right) = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2} \end{aligned} \quad (2.2.53)$$

となる。まず、supercritical から subcritical への遷移を考えると、比エネルギー図から、 $h_1 < h_2$ が成立する。従って、この場合 $\Delta e > 0$ となり、跳水のところで何らかの力学的エネルギー損失が起きていることになる。こうしたエネルギー損失は、跳水に伴って発生する乱流による熱エネルギーへの変換によって説明することが出来る。従って、supercritical から subcritical へのジャンプは物理的に可能である。一方、subcritical から supercritical への遷移を考えると、 $h_1 > h_2$ であるから、 $\Delta e < 0$ となる。この場合跳水のところで流れのエネルギーは増加することになるが、エネルギーを供給するような物質の存在を特に仮定してはいないので、こうした遷移は数学的に可能であっても、物理的には不可能である。以上の議論から、subcritical から supercritical への不連続的遷移は否定された。

ところで、比エネルギー e は、全水頭 H を与える式から導かれたものであるが、ここで一つの疑問が生じてくる。即ちそれは、 H に関する式は定常状態における浅水方程式から導出されたものであるから、非定常状態を比エネルギーによって議論するのはおかしいのではないかという疑問である。確かに非定常状態では全水頭が至るところ一定とはならないから、(2. 2. 4) 式は流れ全体で成り立つものではない。然し、実際に非定常となっているのは跳水周辺のみであるから、それ以外のところでは定常と考えることが出来る。つまり、定常状態が破れていないところでは、比エネルギーでの議論を適用することが出来る。本来、跳水の前後で二枚の比エネルギー図を用意しなければならないが、跳水後、流れはもとの一般場に戻ることから、どちらも同じ比エネルギーで議論可能であるので、一枚の比エネルギー図にまとめて議論しているのである。定常状態が破れるところまで全水頭が保存されるという考え方は、次節の Houghton・Kasahara モデルでも用いられている。

2. 3 Houghton と Kasahara の山越え水流モデル

(I) ボア<bore>の発生について

ボアは跳水同様に、流体層の厚さ及び流速が不連続的に変化する現象であるが、跳水が下流側に進行していくのに対し、ボアの場合流れの方向と逆に不連続面が遡上していく現象として観測される。山越え水流の場合、非定常状態において、山にブロックされた流れの一部がボアとして上流側に伝播することがある。そういった意味で、ボアは **upstream jump** と呼ばれることがある。また、ボアと跳水をまとめて **shock wave** と呼ぶこともある。

数式の上では、ボアも基本的には跳水と同じように扱うことが出来る。前節で跳水前後の力学的エネルギー変化を調べたとき、不連続面は静止しているものと考えたが、ここではボアの不連続面が一定の速さ $C_L (<0)$ で進行している場合を考える（下流側に進行する場合を正とする）。そしてこの場合も、不連続面上流側に関する物理量は添え字 1 を記し、下流側の物理量には添え字 2 と記すこととする。

不連続面が速度 C_L で上流側に進んでいる場合、観測者が同じ速度 C_L でこれを追跡すれば、不連続面は静止していると考えることが出来る。この場合、観測者から見たボアの上流側・下流側の相対的な流速はそれぞれ $u_1 - C_L$ 、 $u_2 - C_L$ となる。ガリレオの相対性原理から、流れと逆向きに一定の速さ C_L で動く座標系でも静止している場合と同じ物理法則が適用出来るので、運動量保存則（2. 2. 46）をこの場合について適用することが出来る。即ち、（2. 2. 46）で u_1 を $u_1 - C_L$ 、 u_2 を $u_2 - C_L$ に置き換えて、

$$0 = (u_1 - C_L)^2 h_1 - (u_2 - C_L)^2 h_2 + \frac{gh_1^2}{2} - \frac{gh_2^2}{2} \quad (2. 3. 1)$$

が成立する。また、単位幅流量の保存についても同様に議論することが出来る。つまり、不連続面とともに動く座標系での保存則を考えると、

$$(u_1 - C_L)h_1 = (u_2 - C_L)h_2 \quad (2. 3. 2)$$

が成立する。また、静止している跳水と同様に、ボアのところで力学的エネルギーの損失が生じており、下流側の水深 h_2 よりも上流側 h_1 の方が大きくなる。

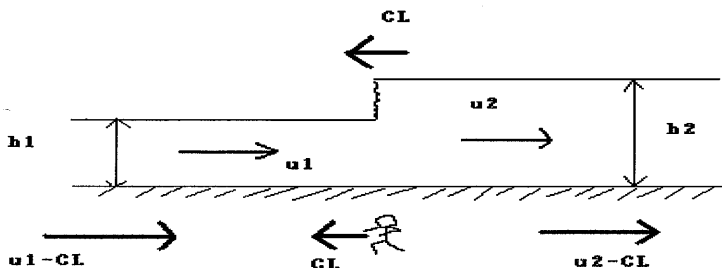


図 18 ボアの模式図

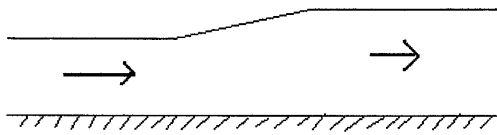


図 19 レアファクションの模式図

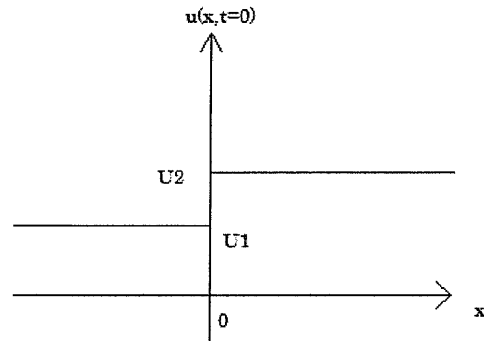


図 20 リーマン問題の初期状態の図

(II) 希薄波の理論 (Riemann 問題)

2. 2節で述べたように、跳水等の不連続面は **supercritical** から **subcritical** への状態の飛躍である。一方、比エネルギー図を用いた考察から、水平床における一つの **subcritical** の状態から別の **subcritical** への状態遷移、或いは **supercritical** から **supercritical** への移行は連続的に行われることが分かる。何故なら、同じ状態の間での遷移は限界水深を超えなくても実現されうるからである。従って、初期状態に於いて、二つの同じ状態の間に水深の不連続が存在したとしても、それは直ちに解消され、水深は空間的に連続となる。このように、二つの同じ状態の間が連続的に推移するような波形を膨張波 <rarefaction wave> と呼ぶ。膨張波は数学の偏微分方程式の分野でも扱われており、こうした問題はリーマン (Riemann) 問題と呼ばれている。リーマン問題とは、水平な床での単純化された浅水方程式に関する初期値問題のことであり、これを定式化すると以下のように書き表せる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.3.3)$$

$$u(x, t = 0) = \begin{cases} U_1 & (x < 0) \\ U_2 & (x > 0) \end{cases} \quad (2.3.4)$$

但し、 U_1 と U_2 は定数であり、 $0 < U_1 < U_2$ を満たすものとする。ここでは、これを解くことによって膨張波の性質を調べてみる。

先ずこの方程式を解く前に、「特性曲線」 <characteristic curve> と呼ばれる概念を導入しよう。その為に、浅水方程式系に一度立ち戻ってみる。(2.1.6) 式、(2.1.14) 式を再び呼び起こすと、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial}{\partial x} (\phi + m) \quad (2.3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u\phi) + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.3.6)$$

いま、これらの式を外部重力波の位相速度 c を用いて書き換えてみる。ここで、

$$c = \sqrt{g\phi} \quad (2.3.7)$$

で書けるから、 $\phi = \frac{c^2}{g}$ となる。よって、(2.3.5) 式は次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 2c \cdot \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial(gm)}{\partial x} = 0 \quad (2.3.8)$$

同様に、(2.3.6) 式について c を用いて書き換えると、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial(uc^2)}{\partial x} + 2c \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial t}\right) \\ &= c^2 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + 2uc \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right) + 2c \left(\frac{\partial c}{\partial t}\right) \end{aligned}$$

すなわち、

$$0 = c \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + 2u \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right) + 2 \left(\frac{\partial c}{\partial t}\right) \quad (2.3.9)$$

となる。水平な床、すなわち $\partial m / \partial x = 0$ の場合について、(2.3.8) と (2.3.9) の辺々を加えると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial(u+2c)}{\partial t} + (u+c) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + 2(u+c) \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial(u+2c)}{\partial t} + (u+c) \cdot \left\{ \frac{\partial(u+2c)}{\partial x} \right\} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial}{\partial x} \right\} \cdot (u+2c) \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

同様に、(2.3.8) と (2.3.9) の二式の差をとると、以下の式が得られる。

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial}{\partial x} \right\} \cdot (u-2c) = 0 \quad (2.3.11)$$

ここで、速度 $u \pm c$ で動く流体粒子におけるラグランジュ時間微分演算子は d/dt

は、 $\frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x}$ である。従って、(2.3.10) 式は $u+2c$ という値が速度

$u+c$ で移動している流体中のある点で一定値となることを表しており、(2.3.

11) 式は $u-2c$ という値が速度 $u-c$ で移動している流体の点で保存されるこ

とを示している。つまり、これら二つの式は、 $x-t$ 平面の曲線 $dx/dt=u\pm c$ に沿って、関数 $u\pm 2c$ が一定となることを示唆している。これら二つの常微分方程式 $dx/dt=u+c$ 、 $dx/dt=u-c$ を満たす曲線 $x(t)$ を「特性曲線」と呼ぶ。特性曲線のこうした性質を利用して、リーマン問題を解いてみる。

まず、傾き $dx/dt=u+c$ の特性曲線について考える。いま、各初期点 $(x=x_0, t=0)$ から伸びる特性曲線はそれぞれ以下のようなになる。

$$x = \begin{cases} x_0 + U_1 t & (x_0 < 0) \\ x_0 + U_2 t & (x_0 > 0) \end{cases} \quad (2.3.12)$$

いま、 $U_1 < U_2$ であるから、初期位置 $x_0 < 0$ から伸びる直線上で $u = U_1$ となり、初期位置 $x_0 > 0$ から伸びる直線上で $u = U_2$ となる。これらの特性曲線は互いに交わらず、 $x-t$ 平面上に空白領域が形成される。そして、この部分では、連続的に流速が推移している筈なので、連続という境界条件のもとでこの領域の解を求める。

一般に、非線形方程式を解く際に、変数分離法は殆どの場合において巧くいかない。浅水方程式 (2.3.3) も非線形方程式であるが、ここでは敢て変数分離法で解くことを試みる。いま、 X を x のみの関数、 T を t のみの関数として、流速 u が両者の積によって表現されるものと仮定する。すなわち、

$$u = X \cdot T \quad (2.3.13)$$

と置いてみる。これを (2.3.3) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} 0 &= (X \cdot T') + (X \cdot T) \cdot (X' \cdot T) \\ &= X \cdot \{T' + T^2 X'\} \end{aligned}$$

となる。但し、プライム " ' " はそれぞれの関数の独立変数に関する微分を表すものとする。いま、自明ではない解を想定しているので、 $X \neq 0$ とすると、

$$T' + T^2 X' = 0 \quad (2.3.14)$$

となる。ここで $T \neq 0$ であるから、両辺を T^2 で割ると、

$$\frac{T'}{T^2} = -X' \quad (2.3.15)$$

となり、変数分離が行われる。いま、左辺は t の関数のみで表現され、右辺は x

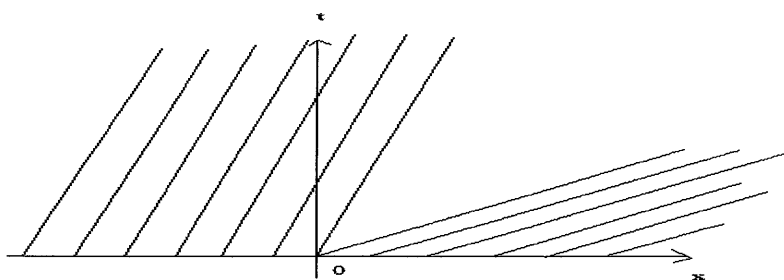


図 2 1 リーマン問題の特性曲線の図

のみで表現されるので、両辺は定数でなければならない。そこでその定数を α と置くと、次の二つの常微分方程式が得られる。

$$X' = -\alpha \quad (2.3.16)$$

$$T' = \alpha T^2 \quad (2.3.17)$$

(2.3.16) 式は直ちに積分されて、

$$X = -\alpha x + \beta \quad (\beta \text{ は積分定数}) \quad (2.3.18)$$

が得られる。一方、方程式 (2.3.17) の形式から、 T の形状として t のべき乗を仮定すると、

$$T = t^\gamma \quad (\gamma \text{ は定数}) \quad (2.3.19)$$

と表される。これを (2.3.17) 式に代入すると、

$$\gamma t^{\gamma-1} = \alpha t^{2\gamma} \quad (2.3.20)$$

という関係が得られる。これが特性曲線の空白領域に存在する任意の点で成立するためには、 $U_1 \cdot t < x < U_2 \cdot t$ の領域で、

$$\gamma = \alpha$$

$$\gamma - 1 = 2\gamma$$

の二式が同時に成立しなければならない。すなわち、 $\gamma = -1$ 、 $\alpha = -1$ が成り立たなければならない。これらを (2.3.18) 及び (2.3.19) に代入すると、 $X = x + \beta$ 、 $T = \frac{1}{t}$ が得られ、流速 u は、

$$u = \frac{x + \beta}{t} \quad (2.3.21)$$

と表される。ここで流速の連続性から、 $x = U_1 \cdot t$ で $u = U_1$ 、 $x = U_2 \cdot t$ で $u = U_2$ となるので、

$$U_1 = \frac{U_1 t + \beta}{t} = U_1 + \frac{\beta}{t} \quad (2.3.22)$$

$$U_2 = U_2 + \frac{\beta}{t} \quad (2.3.23)$$

の二式を満足する。これらが「空白領域」の任意の点で成立するためには、 $\beta = 0$ でなければならない。よって、

$$u = \frac{x}{t} \quad (2.3.24)$$

なる解が得られる。以上をまとめると、

$$u = \begin{cases} U_1 & (x < U_1 t) \\ \frac{x}{t} & (U_1 t < x < U_2 t) \\ U_2 & (x > U_2 t) \end{cases} \quad (2.3.25)$$

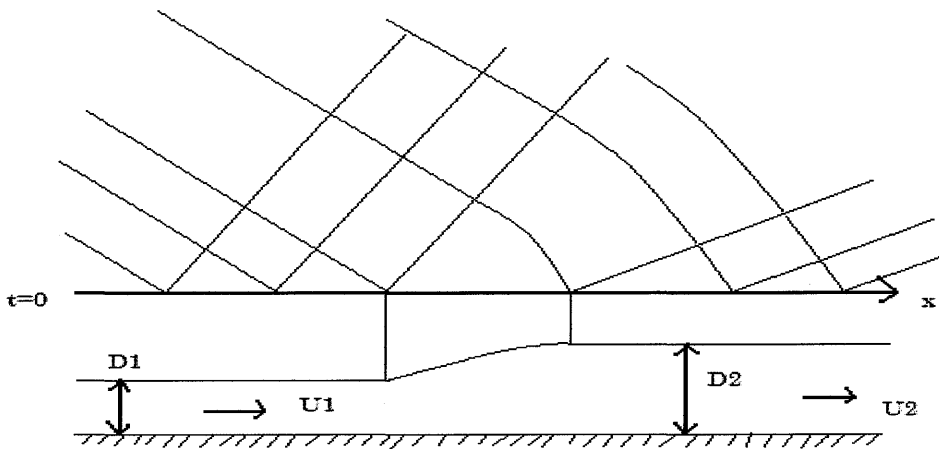


図 2.2 実際のレアファクションでの特性曲線の図

となる。これより、二つの水深領域の間は広がっていき、拡大した領域の水面はなだらかになっていくことが分かる。これが膨張波と呼ばれる所以である。

リーマン問題は膨張波の特徴をよく捉えているものの、水深の x 方向の変化が方程式に組み込まれていない為、解としてはあまり厳密ではない。その意味では、(2. 3. 10)、(2. 3. 11) から膨張波をもう一度議論してみる必要がある。

いま、流速 U_1 、 U_2 に対応する水深を D_1 、 D_2 とすると、初期状態に於いて、水深の低い側における外部重力波の伝播速度は $\sqrt{gD_1}$ であり、水深の高い側では

$\sqrt{gD_2}$ である。初期状態から特性曲線を引いてみると、その概略は図 2.2 の如く

となる。水深の低いところから出た傾き $dx/dt = u \pm c$ の特性曲線は水深が変化しないので全て直線となる。また、水深の高いところから伸びる傾き $dx/dt = u + c$ の特性曲線も同様に全て直線となる。一方、水深の高いところを出発した傾き $dx/dt = u - c$ の特性曲線は、水深がなだらかに変化している膨張波領域で曲がり、水深の低い領域に出ると再び直線となる。この曲線は水深の高い領域と低い領域の両方を通過している。この特性曲線上で $u - 2c$ という値が保たれるので、

$$U_1 - 2\sqrt{gD_1} = U_2 - 2\sqrt{gD_2} \quad (2. 3. 26)$$

という関係が導かれる。

(III) Houghton、Kasahara モデルの導出

(I)、(II) での議論を踏まえて、Houghton、Kasahara の提唱した連立方

程式モデルを導いてみよう。

先ず、跳水不連続面が山から下流側へ伝播していく場合について考える。第一章で示したように、一般流の水深を h_0 、一般流の流速を u_0 、ボアの上流への進行速度を C_L (≤ 0)、ボアの後面の水深・流速をそれぞれ h_A 、 u_A 、山の頂上の水深・流速をそれぞれ h_c 、 u_c 、跳水の前面の水深及び流速を各々 h_B 、 u_B 、跳水の下流への進行速度を C_R 、跳水後面の水深・流速を h_D 、 u_D とする。 h_0 、 u_0 の二つが既知であり、その他十個の物理量が未知数であるという状況を考える。

ボアを記述する方程式は (2. 3. 1) 及び (2. 3. 2) であるが、これを変形して (1. 3. 4)、(1. 3. 5) を導く。(2. 3. 1) と (2. 3. 2) に於いて、 $u_1 = u_0$ 、 $u_2 = u_A$ 、 $h_1 = h_0$ 、 $h_2 = h_A$ と置き、

$$0 = (u_0 - C_L)^2 h_0 - (u_A - C_L)^2 h_A + \frac{gh_0^2}{2} - \frac{gh_A^2}{2} \quad (2. 3. 27)$$

及び

$$(u_0 - C_L)h_0 = (u_A - C_L)h_A \quad (2. 3. 28)$$

と書き換える。(2. 3. 28) 式を u_A について整理すると、

$$u_A = C_L + \frac{h_0(u_0 - C_L)}{h_A}$$

となる。これを (2. 3. 27) に代入して u_A を消去すると、

$$\begin{aligned} 0 &= (u_0 - C_L)^2 h_0 - \left\{ \frac{h_0(u_0 - C_L)}{h_A} \right\}^2 h_A + \frac{gh_0^2}{2} - \frac{gh_A^2}{2} \\ &= (u_0 - C_L)^2 h_0 - \frac{h_0^2(u_0 - C_L)^2}{h_A} + \frac{gh_0^2}{2} - \frac{gh_A^2}{2} \\ &= \left(\frac{h_0}{h_A} \right) (h_A - h_0) (u_0 - C_L)^2 + \frac{gh_0^2}{2} - \frac{gh_A^2}{2} \end{aligned} \quad (2. 3. 29)$$

と書ける。 $(h_0/h_A)(h_A - h_0)$ で両辺を割ると、

$$\begin{aligned} (u_0 - C_L)^2 &= \frac{\frac{gh_0^2}{2} - \frac{gh_A^2}{2}}{\left(\frac{h_0}{h_A} \right) (h_A - h_0)} \\ &= \left(\frac{h_A}{h_0} \right) \frac{g(h_A^2 - h_0^2)}{2(h_A - h_0)} = \left(\frac{gh_A}{h_0} \right) \left(\frac{h_A + h_0}{2} \right) \end{aligned} \quad (2. 3. 30)$$

となる。いま、(2. 3. 28) より、

$$C_L = \frac{h_0 u_0 - h_A u_A}{h_0 - h_A} \quad (1.3.4)$$

が導かれるが、 $u_0 > 0$ 、 $C_L \leq 0$ より、 $u_0 - C_L \geq 0$ が成立する。よって、(2.3.30) 式は、

$$u_0 - C_L = \sqrt{\frac{gh_A}{h_0} \left(\frac{h_A + h_0}{2} \right)}$$

となり、

$$C_L = u_0 - \sqrt{\frac{gh_A}{h_0} \left(\frac{h_A + h_0}{2} \right)} \quad (1.3.5)$$

が導かれる。

次に、ボアの後面から山を越えて跳水の手前までの流れについて考える。ここでは不連続が存在せず、水面の時間変化も起こらないと考えられるから、局所的に定常状態であるとみなせる。従って、全水頭の保存の式(2.2.4)より、

$$\frac{u_c^2}{2g} + h_c + m_c = \frac{u_A^2}{2g} + h_A = \frac{u_B^2}{2g} + h_B \quad (1.3.6)$$

が直ちに導かれる。この定常状態では、単位幅流量もまた保存されるので、(2.2.5) 式より、

$$h_c u_c = h_A u_A = h_B u_B \quad (1.3.7)$$

が成立する。また Long が指摘したとおり、山の頂上では局所的フルード数が 1 となり、限界水深に達しているので、

$$u_c = \sqrt{gh_c} \quad (1.3.8)$$

となる。

次に、跳水付近の流れについて考える。跳水も基本的にはボアと同じ不連続面なので、同様の議論を展開することが可能である。即ち、(2.3.1)・(2.3.2) で $u_1 = u_B$ 、 $u_2 = u_D$ 、 $h_1 = h_B$ 、 $h_2 = h_D$ と置いて、ボアと同様の計算を行うと、

$$C_R = \frac{h_B u_B - h_D u_D}{h_B - h_D} \quad (1.3.9)$$

$$C_R = u_B - \sqrt{\frac{gh_D}{h_B} \left(\frac{h_D + h_B}{2} \right)} \quad (1.3.10)$$

が得られる。

さらに、跳水の下流側で発生する膨張波について考える。膨張波より下流側で流れは一般場に戻るものとする、(2.3.26) で $U_1 = u_D$ 、 $D_1 = h_D$ 、 $U_2 = u_0$ 、 $D_2 = h_0$ として、

$$u_D - 2\sqrt{gh_D} = u_0 - 2\sqrt{gh_0} \quad (1.3.11)$$

が得られる。

続いて、跳水が山の下流側の麓で発生し、停留する場合について考える。 h_B 、 u_B の代わりに、麓で発生するジャンプの上流側での水深 h_- 及び流速 u_- 、ジャンプの下流側での水深 h_+ 及び流速 u_+ を導入し、またジャンプの留まる山の高さを m^* とする。このとき、(1.3.6) の右边を h_- 、 u_- 及び m^* を用いて書き換えると、

$$\frac{u_c^2}{2g} + h_c + m_c = \frac{u_A^2}{2g} + h_A = \frac{u_+^2}{2g} + h_+ + m^* \quad (1.3.12)$$

となる。また、この場合 (1.3.7) の右边も h_- 、 u_- 、 m^* によって書き換えられて、

$$h_{cuc} = h_{AuA} = h \cdot u \quad (1.3.14)$$

となる。跳水の下流側では、膨張波が起きる手前まで局所的に定常状態であるから、単位幅流量は保存されて、

$$h_{DuD} = h_+ u_+ \quad (1.3.13)$$

が成立する。今の場合も跳水の進行速度 C_R は (1.3.9)、(1.3.10) と同じような形で書けるが、停留して動かないので、

$$C_R = 0 = \frac{h_- u_- - h_+ u_+}{h_- - h_+} \quad (1.3.15)$$

$$C_R = 0 = u_- - \sqrt{\frac{gh_+}{h_-} \left(\frac{h_+ + h_-}{2} \right)} \quad (1.3.16)$$

と表されることになる。

流れが十分遅く、流体層の厚さが小さい場合に、上流側の流れが山の上流側でブロックされることがある。以下、このような完全ブロックが発生する場合と跳水・ボアが発生する場合とを分ける $F_0 - M_c$ 平面上の曲線を導く。

完全ブロックが生じるということは、山の上流側 (ボアの後面) の水深 h_A が山の山頂までの高さより低いということの意味する。また、流れは山を越えられず、上流側に溜まっていくので、流速はゼロとなっているはずである。従って、完全ブロックが初めて発生するとき、次の二つの条件を満たすことになる。

$$h_A = m_c \quad (2.3.31)$$

$$u_A = 0 \quad (2.3.32)$$

これらの値を (1.3.4)、(1.3.5) に代入すると、

$$C_L = \frac{h_0 u_0 - h_A u_A}{h_0 - h_A} = \frac{h_0 u_0}{h_0 - m_c} \quad (2.3.33)$$

$$C_L = u_0 - \sqrt{\left(\frac{gm_c}{h_0}\right) \cdot \left(\frac{m_c + h_0}{2}\right)} \quad (2.3.34)$$

となる。(2.3.33) 及び (2.3.34) を組み合わせて C_L を消去すると、以下のようになる。

$$\frac{h_0 u_0}{h_0 - m_c} = u_0 - \sqrt{\left(\frac{gm_c}{h_0}\right) \cdot \left(\frac{m_c + h_0}{2}\right)} \quad (2.3.35)$$

ここで、両辺を $\sqrt{gh_0}$ で割り、 u_0 を一般流のフルード数 F_0 、 m_c を M_c に書き換えると、

$$(\text{左辺}) = \left(\frac{h_0}{h_0 - m_c}\right) \cdot \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{m_c}{h_0}\right)} \cdot F_0 = \frac{1}{1 - M_c} \cdot F_0$$

$$(\text{右辺}) = \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}} - \sqrt{\left(\frac{m_c}{h_0}\right) \cdot \left(\frac{\left(\frac{m_c}{h_0}\right) + 1}{2}\right)} = F_0 - \sqrt{M_c \cdot \left(\frac{M_c + 1}{2}\right)}$$

となる。よって、

$$\left(\frac{1}{1 - M_c} - 1\right) F_0 = \left(\frac{M_c}{1 - M_c}\right) \cdot F_0 = -\sqrt{M_c \cdot \left(\frac{M_c + 1}{2}\right)}$$

これを F_0 について整理して、

$$F_0 = \frac{M_c - 1}{M_c} \sqrt{M_c \frac{1 + M_c}{2}} \quad (1.3.17)$$

という関係式を得る。これが部分ブロックと完全ブロックを分ける曲線である。

本節の終わりとして、ボアが停留するときの F_0 と M_c の関係式 (1.3.18) の導出を行なう。

ボアが停留する場合、 $C_L = 0$ であるから、 $h_0 \neq h_A$ であることに注意して、この場合の (1.3.4)、(1.3.5) の二式は以下のように書ける。

$$h_0 u_0 - h_A u_A = 0 \quad (2.3.36)$$

$$u_0 = \sqrt{\frac{gh_A}{h_0} \left(\frac{h_A + h_0}{2}\right)} \quad (2.3.37)$$

(2.3.37) の両辺を平方し、 $(gh_A/2h_0)$ で割ると、

$$h_A^2 + h_0 h_A - \frac{2h_0 u_0^2}{g} = 0 \quad (2.3.38)$$

となり、 h_A に関する二次方程式が得られる。 $h_A > 0$ であることに注意して、これを解くと、

$$\begin{aligned} h_A &= -\frac{h_0}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{h_0^2 + \frac{8h_0u_0^2}{g}} \\ &= \left(\frac{h_0}{2}\right) \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left(\frac{8u_0^2}{gh_0}\right)} \right\} \\ &= \left(\frac{h_0}{2}\right) \left(-1 + \sqrt{1 + 8F_0^2} \right) \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

が得られる。(2.3.39)を(2.3.36)に代入して、 u_A について整理すると、

$$u_A = \frac{h_0u_0}{h_A} = h_0u_0 \cdot \left(\frac{2}{h_0}\right) \left(\frac{1}{-1 + \sqrt{1 + 8F_0^2}} \right) = \frac{2u_0}{-1 + \sqrt{1 + 8F_0^2}} \quad (2.3.40)$$

と表される。

一方、山頂とボア後面の流れの関係式(1.3.6)式に(1.3.8)式を代入して u_c を消去すると、

$$\begin{aligned} \frac{u_A^2}{2g} + h_A &= \frac{u_c^2}{2g} + h_c + m_c = \frac{gh_c^2}{2g} + h_c + m_c \\ &= \frac{3h_c}{2} + m_c \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

と書ける。また、(1.3.7)及び(2.3.36)から、

$$h_0u_0 = h_Au_A = h_cu_c \quad (2.3.42)$$

成立するので、(1.3.8)式より、

$$h_c = \frac{u_c^2}{g} = \left(\frac{h_0u_0}{h_c}\right)^2 \left(\frac{1}{g}\right)$$

となる。これを h_c について解くと、

$$h_c = \left(\frac{h_0^2u_0^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.3.43)$$

という関係が得られる。以上(2.3.39)、(2.3.40)、(2.3.43)の三式を用いて、(2.3.41)の関係式から h_A 、 u_A 、 h_c を消去すると、

$$\left\{ \frac{2u_0}{-1 + \sqrt{1 + 8F_0^2}} \right\}^2 \cdot \left(\frac{1}{2g} \right) + \left(\frac{h_0}{2} \right) (-1 + \sqrt{1 + 8F_0^2}) = \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{h_0^2 u_0^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}} + m_c \quad (2.3.44)$$

となる。(2.3.44)の両辺を h_0 で割ると、 F_0 、 M_c の定義から、

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \left(\frac{2u_0^2}{gh_0} \right) \left\{ \frac{1}{(-1 + \sqrt{1 + 8F_0^2})^2} \right\} + \frac{-1 + \sqrt{1 + 8F_0^2}}{2} \\ &= \frac{2F_0^2}{(-1 + \sqrt{1 + 8F_0^2})^2} + \frac{-1 + \sqrt{1 + 8F_0^2}}{2} = \left(\frac{1}{(-1 + \sqrt{1 + 8F_0^2})^2} \right) \cdot \left\{ 2F_0^2 + \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + 8F_0^2})^3 \right\} \\ &= \left\{ \frac{(1 + \sqrt{1 + 8F_0^2})^2}{64F_0^4} \right\} \cdot \left\{ 2F_0^2 + \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + 8F_0^2})^3 \right\} \\ &= \left(\frac{1}{64F_0^4} \right) \left\{ 2F_0^2 (1 + \sqrt{1 + 8F_0^2})^2 + \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + 8F_0^2}) \cdot (64F_0^2) \right\} \\ &= \left(\frac{1}{32F_0^2} \right) \left\{ (1 + 2\sqrt{1 + 8F_0^2} + 1 + 8F_0^2) + 16F_0^2 (-1 + \sqrt{1 + 8F_0^2}) \right\} \\ &= \left(\frac{1}{32F_0^2} \right) \left\{ 2(1 + 8F_0^2)\sqrt{1 + 8F_0^2} + 2 - 8F_0^2 \right\} \\ &= \left(\frac{1}{16F_0^2} \right) \left\{ (1 + 8F_0^2)^{\frac{3}{2}} + 1 - 4F_0^2 \right\} \\ &= \frac{(1 + 8F_0^2)^{\frac{3}{2}} + 1}{16F_0^2} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$(\text{右辺}) = \frac{3}{2} \left(\frac{u_0^2}{gh_0} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{m_c}{h_0} = \frac{3}{2} F_0^{\frac{2}{3}} + M_c$$

となるので、結局、

$$M_c = \frac{(8F_0^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + 1}{16F_0^2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} F_0^{\frac{2}{3}} \quad (1.3.18)$$

という関係式が導かれる。

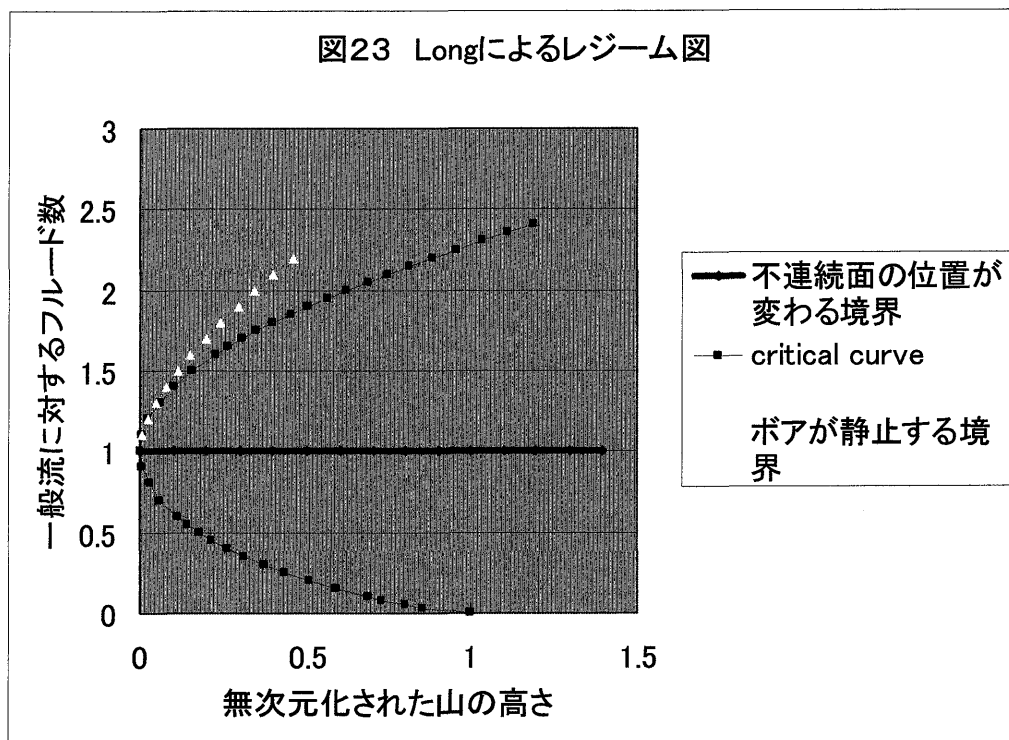
2.4 Long の理論と Houghton、Kasahara モデルの食い違い

本節では第二章のまとめとして、Long の理論と Houghton と Kasahara の二人が提示したモデルの間の相違について触れる。

今まで見てきたように、Long の解釈に従えば、跳水やボアなどの不連続面の
上流側では **supercritical** となっており、その下流側で **subcritical** となっている
ことになる。従って、山の下流側で跳水が発生して一般流の状態に戻るとすれ
ば、一般流は **subcritical**、即ち $F_0 < 1$ でなければならないということになる。
また、山の上流側で発生するボアについて同様に考えると、ボアの前面の一般
流では **supercritical** となっている筈であるから、 $F_0 > 1$ が成立していなければ
ならないことになる。これらを換言すると、以下のようになる。

「非定常状態に於いて、 $F_0 < 1$ では山の下流側で跳水が発生するが、山の上流
側でボアは発生しない。また、 $F_0 > 1$ では山の上流側でボアが発生するが、山
の下流側で跳水が発生することはない。即ち、山のはるか下流で一般流の状態に
戻るものとすれば、ボアと跳水は同時に発生することは不可能である。」

従って Long の説明が正しいとすれば、 $F_0 = 1$ のところに境界線が存在するこ
とになり、図 23 のようなレジーム図が描かれることになる。



ところが、Houghton と Kasahara の非定常モデルでは、 F_0 の大きさに関わらず跳水とボアが同時に発生することを想定しており、Long の跳水理論を否定している。但し、同時発生する根拠については記述がなされていない。おそらくモデルを実際の現象に近づけるために導入したものであろう。実際、Houghton と Kasahara はこの連立方程式のモデルが「漸近解」<asymptotic solutions>であると述べている。

Long の理論と Houghton・Kasahara の連立方程式モデルが矛盾しないように連立方程式モデルを改良するとすれば、以下のようにすればよいと考えられる。 $F_0 < 1$ ではボアではなく連続的に水面が変化する膨張波を仮定し、 $F_0 > 1$ では跳水の代わりに膨張波を仮定する。そうすると、 $F_0 < 1$ の場合上流側は至るところで subcritical となり、下流側の跳水発生に影響を与えないし、 $F_0 > 1$ のときも山の下流側で至るところ supercritical となり、ボアの発生に影響を与えない。理論的には、この改良モデルが最も妥当性が高いと考えられる。

実際の山越え水流では摩擦によるエネルギー散逸が発生するし、静水圧平衡が維持される保証もないし、乱流発生の可能性を否定することも難しい。こうした要素を考え合わせたときに、これら三つの理論・モデルのうちどれが最も正しいのかは実験によって確かめるより他ない。実際の現象を記述する上での妥当性に関しては、第4章で考察することとしたい。

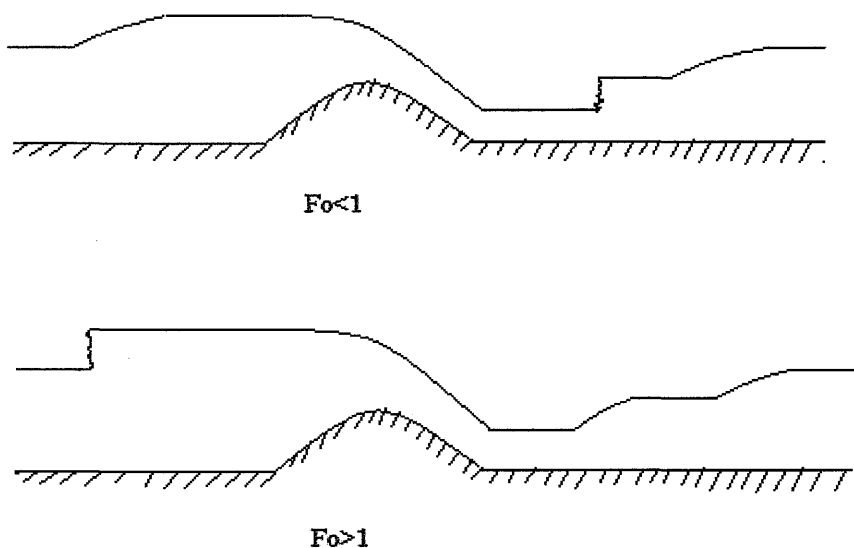


図 2.4 改良モデルの図

3. 山越え気流理論の導出と解釈

3. 1 Long の式の導出

第二章では山越え水流の理論について議論してきたが、本章では水ではなく大気が山を越える場合について考え、山越え水流と山越え気流の相違点と類似点についてなるべく簡潔に議論する。

Long は一層流体としての水流だけではなく、「成層流体」<stratified fluids>としての大気流についても研究を行い、そこで定常状態における成層流体の基礎方程式を示した（1953年）。Long が導いた方程式は非線形方程式であったが、解析的にこれを解くことは難しいので、本節では線形化された Long の式の導出を行なってみる。即ち Long の式とは、次のような方程式である。

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2} + L^2 \delta = 0$$

ここで、 δ は流線の鉛直変位を表し、 L はスコーラー数<Scorer parameter>と呼ばれる物理量である。流線とスコーラー数については後ほど触れることにする。

山越え気流の最も単純な状態を考える為、以下のような仮定を行なう。但し、これらの仮定はこの章だけで適用されるものとする。

- (ア) 山の形はやはり二次元的であり、流れ全体も二次元的であるとする。
- (イ) この場合も空気の粘性やコリオリ力による効果を考えない。
- (ウ) 流れが定常である場合のみを考える。
- (エ) 大気が「ブシネスク流体」とみなせるものとする。
- (オ) 山の高さは十分低く、励起される摂動（擾乱成分）は大気の基本場に対して小さいものとする。つまり、線形化された方程式で気流の振る舞いが記述可能である場合を考える。
- (カ) 流体粒子の鉛直方向の加速度は小さく、大気は静水圧平衡の状態にあるとみなせる。
- (キ) 大気は安定な成層状態にあり、水蒸気を含んでいない乾燥大気であるとみなせる。

ここで、ブシネスク流体とは、非圧縮的とみなせ、圧力変動が浮力項のみに含まれる「液体的な」流体のことを指す。気体の場合でも、流体粒子の上下の変動が小さく、流速があまり大きくないときにはブシネスク流体であるとみなす事が出来る。

いま仮定（ア）より、 y 方向に山の形は変化しないものとし、流体は y 方向に流速を持たないものとする。山からはるかに遠い風上側で流体は x 方向に流れ

ているものとし、その流速を U (一定) とする。はるか風上側の状態を基本場として、山の近傍や風上側で流れの状態が基本場からどれだけずれているのかを考える。大気中の任意の点 (x,z) における流速を (u,w) 、圧力を p 、密度の基本場を $\rho_B(z)$ 、密度の基準値を ρ_0 (定数)、密度の基準からのずれを ρ' とする。いま、流速 (u,w) の基本場からのずれ(擾乱成分)をそれぞれ (u',w') とすると、

$$u = U + u'(x,z) \quad (3.1.1)$$

$$w = w'(x,z) \quad (3.1.2)$$

と表される。また、圧力 p も同様に基準値 p_0 (定数) と変動成分 p' の和として、

$$p = p_0 + p'(x,z) \quad (3.1.3)$$

と表すこととする。同様に密度も $\rho = \rho_B(z) + \rho'(x,z)$ と書き換えられる。ここで、一般的なブシネスク流体の二次元流についての運動方程式と連続の式は、

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (3.1.4)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{\rho'g}{\rho_0} \quad (3.1.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.1.6)$$

と記述されるが、これを擾乱成分についての方程式に書き換えると、

$$\frac{du'}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \quad (3.1.7)$$

$$\frac{dw'}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p'}{\partial z} \right) - \frac{\rho'g}{\rho_0} \quad (3.1.8)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (3.1.9)$$

となる。いま、流速の擾乱成分に関するラグランジュ時間微分は、

$$\frac{du'}{dt} = \frac{\partial u'}{\partial t} + (U + u') \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial u'}{\partial z}$$

$$\frac{dw'}{dt} = \frac{\partial w'}{\partial t} + (U + u') \frac{\partial w'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial z}$$

と書けるが、定常状態を考えているので、オイラー時間微分 $\partial/\partial t$ のかかる項はゼロとなる。また、仮定(オ)より擾乱成分及びそれらの空間微分は微小量とみなせて、微小量の二次以上の項はその寄与を無視することが出来る。更に、仮定(カ)より、流体は静水圧平衡の状態にあるので、 dw'/dt はゼロとみなせる。よってこの場合、

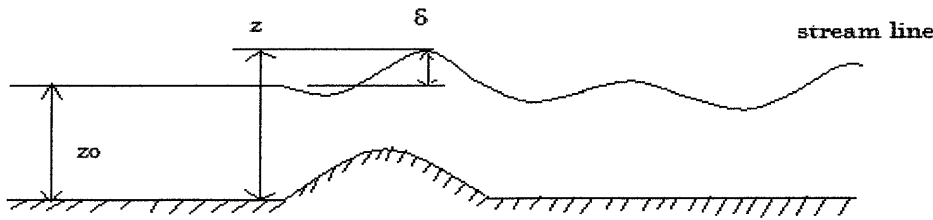


図 2 5 流線の鉛直変位の説明図

$$\frac{du'}{dt} = U \frac{\partial u'}{\partial x} \quad (3.1.10)$$

$$\frac{dw'}{dt} = U \frac{\partial w'}{\partial x} = 0 \quad (3.1.11)$$

となる。(3.1.10)、(3.1.11)を(3.1.7)、(3.1.8)に代入すると、

$$\rho_0 U \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right) + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (3.1.12)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z} + \rho' g = 0 \quad (3.1.13)$$

となり、線形化された運動方程式が得られる。

一般に、流体の流速はベクトル場として記述される。流体の各点における流速ベクトルを接線として滑らかに結ぶと曲線が得られ、これを「流線」と呼ぶ。流線は流れの場を記述するのによく用いられ、定常状態の場合は流速ベクトルが変化しないので流線もまた変化しない。そこで、今の場合も流線を用いて流れの様子を調べてみることにする。いま、山からはるか風下側では流速は鉛直成分を持たないので、流線もまた水平面に平行となる。そして山を越えるあたりから流線は鉛直方向にずれ始める。山の風上側の基本場の状態で $z=z_0$ の位置にあった流線が x の位置で z 方向に δ ($=z-z_0$) だけずれたものとする(以後この $\delta(x,z)$ を「流線の鉛直変位」と呼ぶことにする)。流速の擾乱成分が微小であることから、鉛直変位 δ はさほど大きくないものとみなせる。よって、流線が鉛直に δ だけずれたところで、密度の変動 ρ' は基本場 $\rho_B(z)$ の周りのテーラ一展開の一次近似として、以下のように表すことができる。

$$\rho' \cong \left(\frac{d\rho_B(z)}{dz} \right) \cdot (z - z_0) = \left(\frac{d\rho_B(z)}{dz} \right) \cdot \delta \quad (3.1.14)$$

一方、 x 方向に関する流線の接線の傾きは、その点での流速の水平成分と鉛直成分の比によって表され、また鉛直変位 δ の x に関する偏微分としても求められるから、

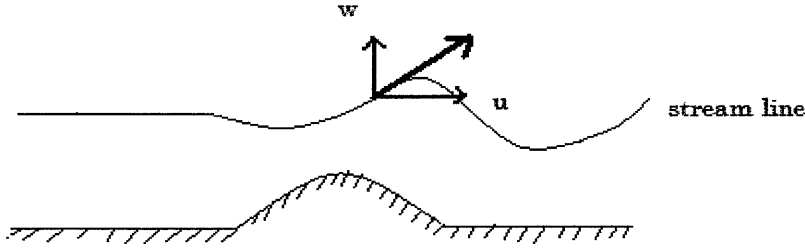


図 2.6 山越え気流線形論の模式図

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{w}{u} = \frac{w'}{U+u'} \cong \frac{w'}{U} \quad (3.1.15)$$

が成り立つ。

以上の (3.1.14)、(3.1.15) を用いて方程式系から u' 、 w' 、 p' 、 ρ' を消去する。まず、(3.1.6) を (3.1.12) に代入して u' を消去すると、

$$-\rho_0 U \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right) + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (3.1.16)$$

と書ける。(3.1.15) と (3.1.16) を組み合わせると、 w' は消去されて、

$$-\rho_0 U^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \delta}{\partial z} \right) + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (3.1.17)$$

となる。これを x について積分すると、

$$-\rho_0 U^2 \left(\frac{\partial \delta}{\partial z} \right) + p' = C(z) \quad (3.1.18)$$

を得る。ここで、 $C(z)$ は z に関する任意の関数である。ここで、 $x \rightarrow -\infty$ なる極限を考えると、これは限りなく風上側に向かうことを意味し、 $(\partial \delta / \partial z) \rightarrow 0$ 、 $p' \rightarrow 0$ となり、結局任意の z について、 $C(z) = 0$ となる。

次に (3.1.14) を (3.1.13) に代入して ρ' を消去すると、

$$\frac{\partial p'}{\partial z} + \left(\frac{d\rho_B(z)}{dz} \right) g \delta = 0 \quad (3.1.19)$$

となる。ここに (3.1.18) を代入すると、

$$\rho_0 U^2 \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{d\rho_B(z)}{dz} \right) g \delta = 0$$

すなわち、

$$\left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2} \right) + \left\{ \left(\frac{g}{\rho_0} \right) \left(\frac{d\rho_B(z)}{dz} \right) \left(\frac{1}{U^2} \right) \right\} \delta = 0 \quad (3.1.20)$$

となる。ここで、ブラント・バイサラ振動数 N 、定常一様流に関するスコラー
一数 L を、

$$N^2 \equiv \left(\frac{g}{\rho_0} \right) \left(\frac{d\rho_B(z)}{dz} \right) \quad (3.1.21)$$

$$L \equiv \frac{N}{U} (> 0) \quad (3.1.22)$$

と定義すると、(3.1.20) は、

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2} + L^2 \delta = 0 \quad (3.1.23)$$

という形で書ける。これが「Long の式」と呼ばれる線形方程式である。

3. 2 二次元山越え気流の線形論

本節では、二つの境界条件を与えたときの Long の式の解を求めてみよう。先
ず一つ目の境界条件を次のように与える。

$$\delta(\mathbf{x}, z=0) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (-\infty < \mathbf{x} < \infty) \quad (3.2.1)$$

但し、 $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ は水平面を $z=0$ としたときの山の地形である。この境界条件は地
表面での流線変位 $\delta(\mathbf{x}, z=0)$ が山の形と等しくなるということを述べていて、流
線が山の内部に入り込むことを許している。そういった意味では、これが厳密
な境界条件であるとは言い難い。もし厳密な境界条件を与えるとすれば、 $\delta(\mathbf{x}, z=$
 $\mathbf{h}(\mathbf{x})) = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ とするべきである。然し今の場合山は十分低いので、(3.2.1)
を境界条件として与えても、解のおおまかな特徴自体は殆ど失われないものと
考えられる。

そして、もう一つの境界条件として、大気上部における「放射境界条件」<
radiation boundary condition> と呼ばれるものを考慮する。この条件は以下の
ように説明される。

風上側の気流が山のところまで来ると衝突が起こり、強制的に上昇させられ
る。大気が安定な成層状態にあるとき、強制上昇を受けた空気は風下側で重力
を復元力として元の状態に戻ろうとし、下がり過ぎると今度は上昇に転じる。
その結果、空気塊は上下振動をおこない、波として振舞うようになる。このよ
うに重力を復元力とする波は「内部重力波」<internal gravity wave> と呼ば
れ、特に山によって振動が励起される内部重力波は「山岳波」<mountain wave
> と呼ばれている。山岳波は山から大気中へと伝播していくが、このとき山と
気流の衝突によって生じたエネルギーを大気中へと輸送する役割も果たしてい

る。いま、鉛直方向におけるエネルギーの伝播を考えると、山がソースとなっているので、輸送される方向は「上向き」となることは自明である。即ち、 z 方向のエネルギーフラックスを F_z とした場合に、

$$F_z > 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (3.2.2)$$

が成立するはずである。これがこの場合の「境界放射条件」である。

これら二つの境界条件が与えられたとき、(3.1.23) 式の解は次の形で表される。

$$\delta(x, z) = h(x) \cdot \cos(Lz) + \text{Hil}[h(x)] \cdot \sin(Lz) \quad (3.2.3)$$

ここで、 $\text{Hil}[h(x)]$ は $h(x)$ に関するヒルベルト変換 < Hilbert transform > を表し、

$$\text{Hil}[h(x)] = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi)}{\xi - x} d\xi \quad (3.2.4)$$

と定義され、記号 P は「コーシーの主値積分」を表す。以下、実際に (3.2.3) の解が得られることを確かめてみる。

流線変位 $\delta(x, z)$ の x に関するフーリエ変換を $D(k, z)$ とすると、

$$D(k, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, z) \exp(-ikx) dx \quad (3.2.5)$$

と表され、 $\delta(x, z)$ はその逆変換として、

$$\delta(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} D(k, z) \exp(ikx) dk \quad (3.2.6)$$

と表現される。(3.1.23) 式に (3.2.6) 式を代入すると、 $D(k, z)$ に関して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2 D}{\partial z^2} + LD \right\} \exp(ikx) dx = 0 \quad (3.2.7)$$

となり、結局、

$$(\partial^2 D / \partial z^2) + L^2 D = 0 \quad (3.2.8)$$

と Long の式と同じ形となる。いま、解の形状を $D(k, z) = A(k) \cdot \exp[\lambda z]$ と書けるものと仮定する。これを (3.2.8) に代入すると、

$$(\lambda^2 + L^2) \cdot A(k) \cdot \exp[\lambda z] = 0$$

という関係が得られる。いま、自明ではない解を求めようとしているので、 $A(k)$ 、 $\exp[\lambda z]$ はともにゼロではないと考えて、

$$\lambda = \pm Li \quad (i \text{ は虚数単位}) \quad (3.2.9)$$

を得る。従って、この方程式の基本解系は $\{\cos(Lz), \sin(Lz)\}$ であることが分かる。従って、 $C_1(k)$ 、 $C_2(k)$ を k の任意の関数として、

$$D(k, z) = C_1(k) \cdot \exp(iLz) + C_2(k) \cdot \exp(-iLz) \quad (3.2.10)$$

と書き表せる。(3.2.10) を (3.2.6) に代入すると、

$$\delta(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \{C_1(k) \cdot \exp[i(kx + Lz)] + C_2(k) \cdot \exp[i(kx - Lz)]\} dk \quad (3. 2. 1 1)$$

となり、 $\delta(x, z)$ は積分形で表現される。これは、二つの波動 $\exp[i(kx + Lz)]$ と $\exp[i(kx - Lz)]$ を様々な波数 k について重ね合わせたものと解釈することが出来る。ここで、山の地形 $h(x)$ のフーリエ変換を $H(k)$ とすると、

$$H(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \exp(-ikx) dx \quad (3. 2. 1 2)$$

と書けるので、(3. 2. 1)、(3. 2. 5) より、

$$D(k, 0) = H(k) \quad (3. 2. 1 3)$$

が成立する。よって、二つの関数 $C_1(k)$ 、 $C_2(k)$ に関して、

$$C_1(k) + C_2(k) = H(k) \quad (3. 2. 1 4)$$

という関係が得られる。

次に、鉛直方向のエネルギーフラックス F_z の具体的な形を求めて、境界条件を既知の物理量で表現する。フラックスの定義から、 F_z は波に伴う圧力変動 p' が z 方向に単位時間にする仕事であると考えることが出来る。波の周期性を考慮すると、 x 方向に一波長分の波がする仕事を考えれば、 F_z の方向(正負の値)を十分議論することが出来る筈である。そこで、ある高さ z の xy 平面上の面積要素 S の一波長分のフラックスを F_z とすると、 F_z は次のように表現できる。

$$F_z = \rho_0 \iint_S p' w' dS = \rho_0 \overline{p' w'} \quad (3. 2. 1 5)$$

但し、“ $\overline{\quad}$ ”は水平方向に一波長について平均した量である。いま、(3. 1. 15)より、

$$w' = U \cdot \partial \delta / \partial x \quad (3. 2. 1 6)$$

が成立する。また、(3. 1. 9)より、

$$(\partial u' / \partial x) = -(\partial w' / \partial z) = \partial \{-U \cdot (\partial \delta / \partial z)\} / \partial x$$

となるから、 $x \rightarrow -\infty$ で $u' \rightarrow 0$ となることを考慮して、

$$u' = -U \cdot \partial \delta / \partial z \quad (3. 2. 1 7)$$

が得られる。ここで、(3. 1. 12)より、

$$p' = -\rho_0 U \cdot u' \quad (3. 2. 1 8)$$

と表されるので、 p' と w' の積は、

$$p' w' = -\rho_0 U \cdot u' w' = \rho_0 U^3 \cdot (\partial \delta / \partial x) \cdot (\partial \delta / \partial z) \quad (3. 2. 1 9)$$

となる。よって、 F_z は次の形に表現できる。

$$F_z = \rho_0^2 U^3 \overline{\left(\frac{\partial \delta}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial \delta}{\partial z}\right)} \quad (3. 2. 2 0)$$

今の場合 $U > 0$ なので、(3. 2. 20)より放射境界条件は、

$$\overline{\left(\frac{\partial \delta}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial \delta}{\partial z}\right)} > 0 \quad (3.2.21)$$

となる。

いま、(3.2.11)に着目すると、 δ は $\sin[(kx+Lz)]$ 、 $\cos[(kx+Lz)]$ 、 $\sin[(kx-Lz)]$ と $\cos[(kx-Lz)]$ という形の無数の波動の重ね合わせから構成されていて、しかもそれぞれの波がLongの式を満たしている。そこで、

$$\delta_1 = \sin[(kx+Lz)] \quad , \quad \delta_2 = \cos[(kx+Lz)] \quad , \\ \delta_3 = \sin[(kx-Lz)] \quad , \quad \delta_4 = \cos[(kx-Lz)]$$

と置き、それぞれの波について(3.2.21)を満たす条件を調べ、条件に合う波を重ねることによって解を求めることとする。

まず、 $\delta_1 = \sin[(kx+Lz)]$ の場合について調べる。この場合、
 $(\partial \delta_1 / \partial x) = k \cdot \cos[(kx+Lz)] \quad , \quad (\partial \delta_1 / \partial z) = L \cdot \cos[(kx+Lz)]$
 となるので、

$$\overline{\left(\frac{\partial \delta_1}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial \delta_1}{\partial z}\right)} = kL \overline{\cos^2(kx+Lz)} = kL \cdot \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(kx+Lz) dx = \frac{k^2 L}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos[2(kx+Lz)] \right\} dx = \left(\frac{k^2 L}{2\pi}\right) \left(\frac{\pi}{k}\right) = \frac{kL}{2} \quad (3.2.22)$$

となる。よって、(3.2.21)を満たすには、 $L > 0$ より、 $k > 0$ が成立していればよいということになる。従って、 $\delta_1 = \sin[(kx+Lz)]$ に関しては、 $k > 0$ を満たすものを重ね合わせてやればよい。計算は省略するが、 $\delta_2 = \cos[(kx+Lz)]$ についても同様の結果が得られる。

次に $\delta_3 = \sin[(kx-Lz)]$ の場合についても同様に計算してみると、

$$\overline{\left(\frac{\partial \delta_3}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial \delta_3}{\partial z}\right)} = -kL \overline{\cos^2(kx-Lz)} = -\frac{kL}{2} \quad (3.2.23)$$

となり、この場合は $k < 0$ となるものを積分すればよい。 $\delta_4 = \cos[(kx-Lz)]$ についても同様の結果が得られる。

以上のことから、 $k > 0$ では $\exp[i(kx+Lz)]$ を重ね合わせればよく、 $k < 0$ のときには、 $\exp[i(kx-Lz)]$ を重ね合わせてやればよいということになる。すなわち、(3.2.11)から、 $k < 0$ で $C_1(k) = 0$ 、 $k > 0$ で $C_2(k) = 0$ ということになる。よって、(3.2.14)より、

$$C_1(k) = \begin{cases} 0 & (k < 0) \\ H(k) & (k > 0) \end{cases} \quad (3.2.24)$$

$$C_2(k) = \begin{cases} H(k) & (k < 0) \\ 0 & (k > 0) \end{cases} \quad (3.2.25)$$

という関係が得られる。(3.2.24)及び(3.2.25)から、(3.2.11)式は以下のように書き表せる。

$$\delta(x, z) = \int_{-\infty}^0 H(k) \cdot \exp[i(kx - Lz)] dk + \int_0^{\infty} H(k) \cdot \exp[i(kx + Lz)] dk \quad (3.2.26)$$

これを $\cos(Lz)$ と $\sin(Lz)$ で書き直すと、

$$\begin{aligned} \delta(x, z) &= \{\cos(Lz) - i \sin(Lz)\} \int_{-\infty}^0 H(k) \exp(ikx) dk + \{\cos(Lz) + i \sin(Lz)\} \int_0^{\infty} H(k) \exp(ikx) dk \\ &= \cos(Lz) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} H(k) \exp(ikx) dx \right\} + i \sin(Lz) \left\{ - \int_{-\infty}^0 H(k) \exp(ikx) dk + \int_0^{\infty} H(k) \exp(ikx) dk \right\} \\ &= h(x) \cdot \cos(Lz) + i \sin(Lz) \left\{ - \int_{-\infty}^0 H(k) \exp(ikx) dk + \int_0^{\infty} H(k) \exp(ikx) dk \right\} \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

ここで、 $h(x)$ は $H(k)$ の逆フーリエ変換によって、

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(k) \exp(ikx) dk \quad (3.2.28)$$

と表されることを用いた。いま、

$$f(x) = i \left\{ - \int_{-\infty}^0 H(k) \exp(ikx) dk + \int_0^{\infty} H(k) \exp(ikx) dk \right\} \quad (3.2.29)$$

と置き、以下の式で定義されるような **signum function** と呼ばれる関数 $\text{sgn}(k)$ を導入する。

$$\text{sgn}(k) \equiv \begin{cases} -1 & (k < 0) \\ 0 & (k = 0) \\ 1 & (k > 0) \end{cases} \quad (3.2.30)$$

(3.2.30) を用いると、(3.2.29) 式は次の形に書ける。

$$f(x) = i \int_{-\infty}^{\infty} H(k) \cdot \text{sgn}(k) \cdot \exp(ikx) dk \quad (3.2.31)$$

この式から、 $f(x)$ は、 $H(k) \cdot \text{sgn}(k)$ を逆フーリエ変換したものに虚数単位 i を掛けたものとなっていることが分かる。ここで、一般にフーリエ変換されたものどうしの積は、それぞれの逆変換の畳み込みをフーリエ変換したものに等しいことが知られている。即ち、 $\text{sgn}(k)$ の逆フーリエ変換を $s(x)$ として、

$$H(k) \cdot \text{sgn}(k) = Ft[h(x) * s(x)] \quad (3.2.32)$$

と表せる。ここで、 $*$ 印は二つの関数の畳み込みを表し、その定義から、

$$h(x) * s(x) = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) \cdot s(x - \xi) d\xi \quad (3.2.33)$$

と表される。また、 Ft はフーリエ変換を表すものとする。また、逆フーリエ変換を Ft^{-1} と表すことにすると、 $f(x)$ は、

$$f(x) = i \cdot Ft^{-1}[H(k) \cdot \text{sgn}(k)] \quad (3.2.34)$$

と表せる。一般に、フーリエ変換したものに逆フーリエ変換を施すと元の関数

に戻るので、(3. 2. 33)、(3. 2. 34) より、

$$\begin{aligned} f(x) &= i \cdot Ft^{-1}[Ft[h(x) * s(x)]] \\ &= i \cdot \{h(x) * s(x)\} \end{aligned} \quad (3. 2. 35)$$

となる。

次に、 $s(x)$ を求めよう。通常逆フーリエ変換の定義に従うと、 $\text{sgn}(k)$ は積分変換することが出来ないことが分かる。そこで、 $\text{sgn}(k)$ に $\exp(-\varepsilon |k|)$ (ただし ε は正の定数)なる減衰因子を掛け、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとったものを積分変換することによって $s(x)$ を求める。この方法で $s(x)$ を計算してみると、

$$\begin{aligned} s(x) &= Ft^{-1}[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp(-\varepsilon |k|) \cdot \text{sgn}(k)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp(-\varepsilon |k|) \cdot \text{sgn}(k) \cdot \exp(ikx) dk = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(k) \cdot \exp[-\varepsilon |k| + ikx] dk \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{-\infty}^0 \exp[k(\varepsilon + ix)] dk + \int_0^{\infty} \exp[k(-\varepsilon + ix)] dk \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \left[\frac{\exp[k(\varepsilon + ix)]}{\varepsilon + ix} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{\exp[k(-\varepsilon + ix)]}{-\varepsilon + ix} \right]_0^{\infty} \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \frac{1}{\varepsilon + ix} - \frac{1}{-\varepsilon + ix} \right\} \\ &= - \frac{2}{ix} \end{aligned} \quad (3. 2. 36)$$

となる。(3. 2. 33)、(3. 2. 36) を (3. 2. 35) に代入すると、

$$f(x) = i \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \right) P \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) \cdot \left(- \frac{2}{i(x-\xi)} \right) d\xi = \left(\frac{1}{\pi} \right) P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi)}{\xi - x} d\xi = Hil[h(x)] \quad (3. 2. 37)$$

と表されるので、(3. 2. 29) より、

$$\delta(x, z) = h(x) \cdot \cos(Lz) + f(x) \cdot \sin(Lz) = h(x) \cdot \cos(Lz) + Hil[h(x)] \cdot \sin(Lz) \quad (3. 2. 3)$$

が得られた。

山の形 $h(x)$ が既知であり、これをヒルベルト変換することが可能であるならば、(3. 2. 3) 式から流線の鉛直変位を求めることが出来る。例えば、 $x=0$ について左右対称なベル型の山 (ピークの高さ h_m) を考えると、

$$h(x) = \frac{h_m a^2}{a^2 + x^2} \quad (a \text{ は正の定数}) \quad (3. 2. 38)$$

と表され、結果だけ示すと、

$$\delta(x, z) = \left(\frac{h_m a^2}{a^2 + x^2} \right) \left\{ \cos(Lz) - \left(\frac{x}{a} \right) \sin(Lz) \right\} \quad (3. 2. 39)$$

となる (計算の詳細については斎藤 (1994年) 参照)。また、 $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}' = \mathbf{U} \cdot \{1 - (\partial \delta / \partial z)\}$ であることを用いると、水平風も求められて、

$$u(x, z) = U \left[1 + \left(\frac{Lh_m a^2}{a^2 + x^2} \right) \{ \sin(Lz) + \left(\frac{x}{a} \right) \cos(Lz) \} \right] \quad (3. 2. 40)$$

となる。いま、山頂上空での流速を考えると、 $u(0, z) = U[1 + Lh_m \sin(Lz)]$ であり、 $\sin(Lz)$ が最小となるときに $u(0, z)$ も最小となることが分かる。つまり、 n を整数として、 $z = \left(\frac{3}{2} + 2n\right) \left(\frac{\pi}{L}\right)$ を満たすとき $u(0, z)$ は最小値 $U(1 - Lh_m)$ をとる。従って、

$Lh_m > 1$ となるときには、山頂上空の速度が最小となる点で必ず $u < 0$ となる。このとき、流線は鉛直上昇または鉛直下降して風上側に戻る（流線の転倒）。これにより大気は不安定となり、山岳波は砕けて乱れが生じ、空気の鉛直混合が発生するものと考えられる（次節では、この鉛直混合によって生じた「よどみ層」という概念を導入して気流の振る舞いを論じる）。

また、地上での水平風速分布 $u(x, 0)$ を求めてみると、

$$u(x, 0) = U \left[1 + \left(\frac{Lh_m a x}{a^2 + x^2} \right) \right] \quad (3. 2. 41)$$

となる。これを x について微分し、極値を調べると、

$$0 = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} = ULh_m a \left\{ \frac{1}{a^2 + x^2} - \frac{2x^2}{(a^2 + x^2)^2} \right\} = (ULh_m a) \frac{a^2 - x^2}{(a^2 + x^2)^2} \quad (3. 2. 42)$$

となるので、 $x = -a$ で極小値 $u(-a, 0) = U \{ 1 - (Lh_m/2) \}$ をとり、 $x = a$ で極大値 $u(a, 0) = U \{ 1 + (Lh_m/2) \}$ をとることが分かる。つまり、山の風上側の高さ $z = h_m/2$ のところから風下側の高さ $z = h_m/2$ のところまで気流は増速していることが分かる。これが「おろし風」と呼ばれるものである。線形論ではさほど大きな増速とはならないが、非線形のまま考えると非常に大きな値となることが知られている。また、 $Lh_m > 2$ の時には風上側の山麓で風速が負となり、ブロッキングが発生することになる。また、図27から明らかのように、この場合風速の急激な変化は起こっておらず、跳水（ジャンプ）の不連続面の発生は確認できない。このように山越え水流の場合にはフルード数 F_0 が重要な役割を果たしたが、山越え気流の場合は Lh_m が重要な役割を果たしていることが分かる。

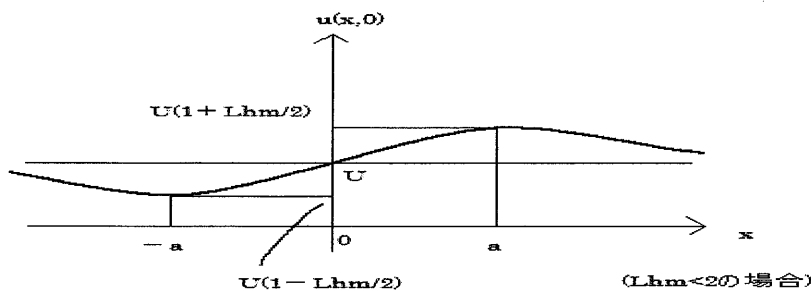


図 27 地表風の分布

3. 3 Smith の解 (よどみ層と砕波)

Smith は「よどみ層」という概念を導入すると、線形論の範囲内、つまり Long の式 (3. 1. 2 3) で「強いおろし風」を説明することが出来るということを示した (1985 年)。「よどみ層」とは、流線の転倒に伴って生じた砕波が大気の十分な鉛直混合をもたらし、その結果発生した風速ゼロの空気層のことである。Smith はよどみ層で静水圧平衡が成り立っているとみなし、砕波の発生した位置 H_0 、よどみ層の空気密度 ρ_c (一定)、山の形 $h(x)$ は既知であるものとして、地表面での厳密な境界条件 $\delta(x, z = h(x)) = h(x)$ を課すことによって、以下のような解を得た。

$$\delta(x, z) = \delta_c \cdot \cos\{L(H_0 + \delta_c - z)\} \quad (3. 3. 1)$$

ここで、 $\delta_c (< 0)$ はよどみ層下端に沿っての流線変位で、次式を満足する。

$$\delta_c = \frac{h}{\cos\{L(H_0 + \delta_c - h)\}} \quad (3. 3. 2)$$

以下、(3. 3. 1)、(3. 3. 2) 式の導出を試みる。

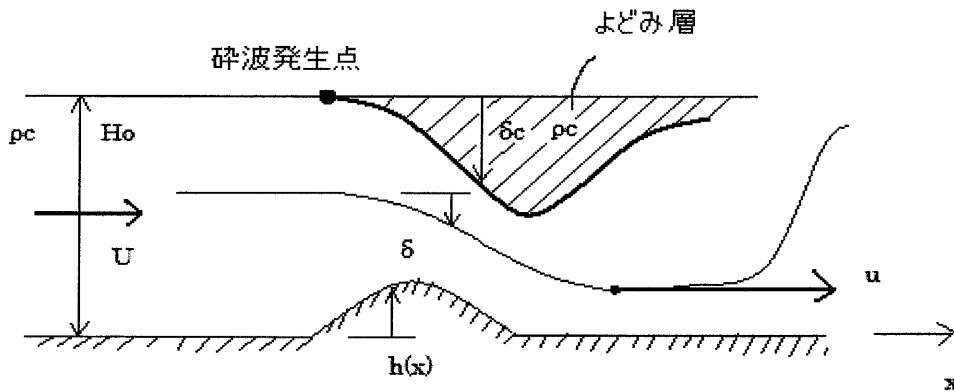


図 2 8 Smith のよどみ層の図

砕波の上側では擾乱が起きていないものとする、 $z = H_0$ での圧力 $p(x, z = H_0)$ は一定となる。その圧力を p^* (=一定) とする。よどみ層では静水圧平衡が成立しているとみなしたので、その下端の圧力 $p(x, H_0 + \delta_c)$ は、 p^* によどみ層からの荷重を加えて、

$$p(x, H_0 + \delta_c) = p^* - \rho_c \cdot g \cdot \delta_c \quad (3. 3. 3)$$

と表せる。本章では大気をブシネスク流体として扱っているので、これを非圧縮とみなせる。従って、ベルヌーイの定理をよどみ層下端の流線に沿って、はるか風上側とよどみ層のところで適用すると、

$$p(x, H_0 + \delta c) + \frac{\rho c u^2}{2} + \rho c \cdot g \cdot (H_0 + \delta c) = p^* + \frac{\rho c U^2}{2} + \rho c \cdot g \cdot H_0 \quad (3.3.4)$$

ここで、 U は基本場の流速、 $u = u(x, H_0 + \delta c)$ である。(3.3.3) 式を (3.3.4) 式に代入すると、 $(\rho c u^2)/2 = (\rho c U^2)/2$ となり、結局、

$$u(x, H_0 + \delta c) = U \quad (3.3.5)$$

なる関係が得られる。ここで、 $u = U \cdot \{1 - (\partial \delta / \partial z)\}$ という関係式を用いると、

$$\left. \frac{\partial \delta}{\partial z} \right|_{z=H_0+\delta c} = 0 \quad (3.3.6)$$

が得られる。前節で求めたように、(3.1.23) の一般解は、

$$\delta(x, z) = A(x) \cos(Lz) + B(x) \sin(Lz) \quad (3.3.7)$$

という形に書けるので、(3.3.6)、(3.3.7) より、

$$0 = \left. \frac{\partial \delta}{\partial z} \right|_{z=H_0+\delta c} = -LA(x) \sin[L(H_0 + \delta c)] + LB(x) \cos[L(H_0 + \delta c)] \quad (3.3.8)$$

となる。また、 δc の定義から $\delta(x, H_0 + \delta c) = \delta c$ であるので、(3.3.7) より、

$$\delta c = A(x) \cos[L(H_0 + \delta c)] + B(x) \sin[L(H_0 + \delta c)] \quad (3.3.9)$$

となる。(3.3.8) の両辺に $\cos[L(H_0 + \delta c)]$ を掛け、(3.3.9) の両辺に $\sin[L(H_0 + \delta c)]$ を掛けて、その和をとると、

$$B(x) = \frac{\delta c \sin[L(H_0 + \delta c)]}{\sin^2[L(H_0 + \delta c)] + \cos^2[L(H_0 + \delta c)]} = \delta c \sin[L(H_0 + \delta c)] \quad (3.3.10)$$

となるから、 $A(x)$ についても、

$$A(x) = \delta c \cos[L(H_0 + \delta c)] \quad (3.3.11)$$

と求まる。これらを (3.3.7) に代入し、三角関数の加法定理を用いると、

$$\begin{aligned} \delta(x, z) &= \delta c \cdot \cos[L(H_0 + \delta c)] \cos(Lz) + \delta c \cdot \sin[L(H_0 + \delta c)] \sin(Lz) \\ &= \delta c \cos[L(H_0 + \delta c) - Lz] \\ &= \delta c \cos[L(H_0 + \delta c - Lz)] \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

が得られる。また、厳密な境界条件 $\delta(x, z = h(x)) = h(x)$ より、

$$h(x) = A(x) \cos(Lh) + B(x) \sin(Lh) \quad (3.3.12)$$

となるが、これに (3.3.10)、(3.3.11) を代入すると、

$$h(x) = \delta c \cdot \cos[L(H_0 + \delta c)] \cos(Lh) + \delta c \cdot \sin[L(H_0 + \delta c)] \sin(Lh) = \delta c \cos[L(H_0 + \delta c - Lh)]$$

即ち、

$$\delta c = \frac{h}{\cos\{L(H_0 + \delta c - h)\}} \quad (3.3.2)$$

が得られる。

Smith はブラント・バイサラ振動数 $N=0.01[s^{-1}]$ 、 $U=20[m]$ 、 $LH_0=3\pi/2$ 、 $Lh_m \sim 1$ の場合における山の風下での風速を計算した。その結果、この場合の風速が最大 $83[m/s]$ に達することが判明した。先ほどのベル型の山での地表最大速度 $u(a,0)$ を同じケースについて計算すると、 $u(a,0) \doteq 20 \cdot 1.5 = 30[m/s]$ 程度であるから、よどみ層の存在を仮定するだけで 2 倍以上の流速の違いが生じたわけである。そういった意味で、Smith の解は「強いおろし風」をよく説明出来るものとして評価できる。

また、Smith の解は山越え水流の流れの様子と山越え気流（おろし風）の類似点を示しているという意味でも重要である。Smith は LH_0 の値を少しずつ変えて、 $Lh-L\delta c$ 平面上にそれらのグラフを描いた。それによると、 $\partial \delta c / \partial h < 1$ となるとき、山の上流側斜面で流線は下がり、流速は増大する。また、 $\partial \delta c / \partial h > 1$ では、山の上流側斜面で流線は上がり、流速は減少する。前者は **subcritical** の状態に対応し、後者は **supercritical** の状態に対応する。もし、山の高さが十分高く、**subcritical** から **supercritical** に遷移したとすれば、風下側で元の状態に戻るときに **hydraulic jump** の不連続面が生じるものと考えられる。そういった意味で、Smith の解はそれぞれほとんど独立に進められてきた山越え水流と山越え気流の議論を初めて結びつけるものだったと言えるだろう。

本章の終わりに、山越え水流と山越え気流の理論における相違点と類似点についてまとめる。

そもそも水流と気流とでは対象とする流体が異なり、しかも前者は有限個の離散的な成層として扱われるが、気流は密度が連続的に変化する成層として議論される。両者の議論の大きく異なるところは同じ媒質中で密度変化を考慮するかしないかである。室内実験で水の流れを扱う場合、その流体層の厚さは小さく、扱う現象規模が比較的小さい。そのため、同じ媒質中での密度変化は考慮されないことが殆どである。一方、気流を扱う場合、数千キロにわたってのびる山脈や数百キロの土地の上に吹く風などを扱うので、媒質密度や温度が一樣であるとみなせない場合が多い。そうしたファクターが両者の相違点を生み出していると言える。また、気流における山岳波は「内部重力波」であり、水流での現象はどちらかというところ「外部重力波」に近いので、そもそも現象自体が異なっているということは否定できない。

一方、Smith が示したように、気流の場合も **subcritical**、**supercritical** に相当する状態が存在し、流れの外見的立体構造という意味では両者は良く似ている。大気がブシネスク流体として近似できる場合、水と同じ非圧縮流体とみなせるので、基本的には水流を記述する基礎方程式とほとんど同じように運動を記述できる。気流が自由表面を持った状態で溝を流れれば、おそらく水流と同じように振舞うであろう。

4. 実験結果とその考察

4. 1 実験目的・実験装置及びその方法

いままで述べてきた山越え水流の理論によれば、その流れの様子は一般流のフルード数 Fo と無次元化された山の頂上での高さ Mc によって決まる。山の高さが変わらなければ、 Fo 及び Mc は流速・流体層の厚さに依存する量となる。本実験では、「流速」・「流体層の厚さ」そして「流れの様子」を調べて、山越え水流の理論がどの程度正しいのかを検証することを目的としている。

次にこの実験で用いられた装置について言及する。図 29 はこの実験で用いられた装置の概観を示している。この装置は基本的に長方形水路、二本のスタンドから構成されている。水流や水面の様子が分かるように、水路の材質として透明なアクリル板を選んだ。この実験では水を直接水路に流す代わりに、水路に水を張っておいて、静止した水の中で障害物（山）を動かすという方法を採用した。これにより、水は山の動く方向と逆向きに流れたことになる。また、ゴムホースを縦に半分に切り、蒲鋒型（半円型）に粘土を詰め、磁石を埋め込んだものを障害物として用いた（図 30）。この障害物は、水路底の外側に磁石を近づけ、それを引っ張り滑らせることによって動かせるように設計された。外側の磁石を動かす方法としては、糸を取り付け、モーターで巻き取ることによって動かす方法と、手で直接引っ張ることによって動かす方法の両方が採られた。

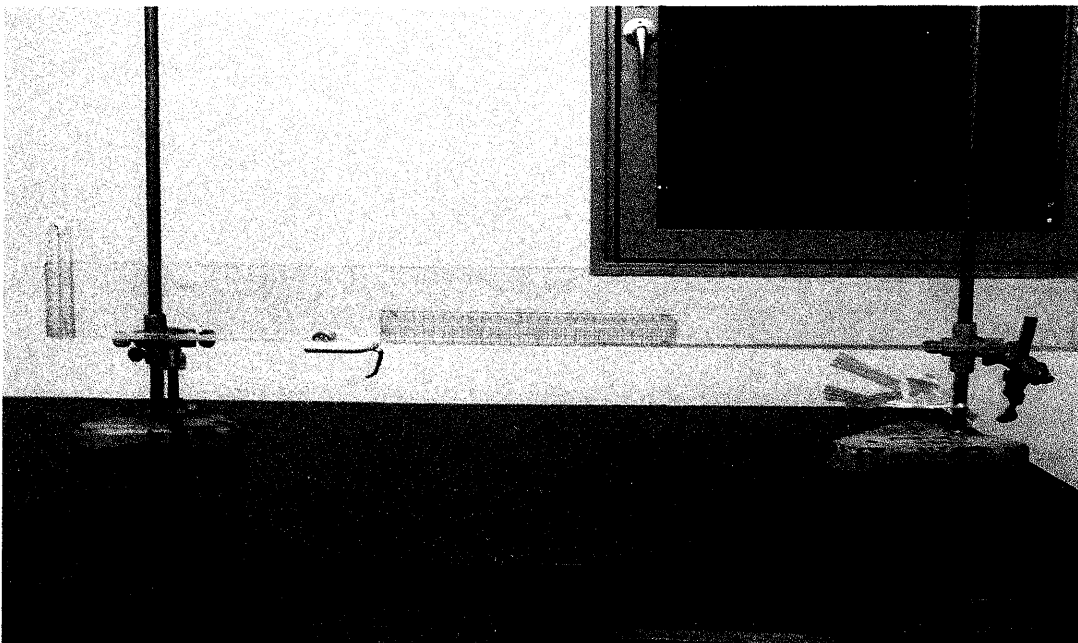


図 29 実験装置図

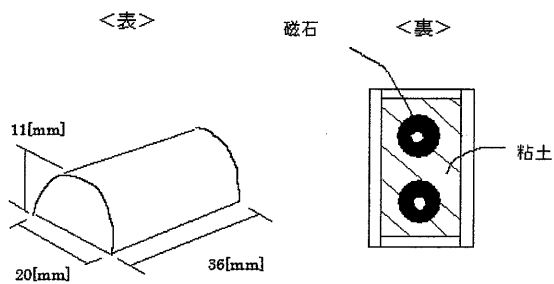


図 3 0 山 (障害物) の図

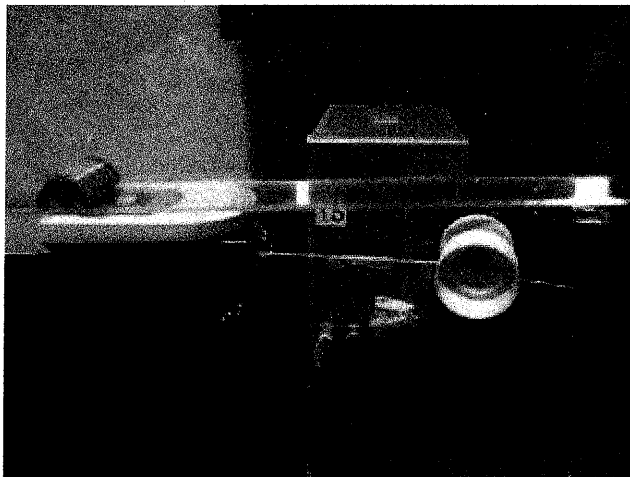


図 3 1 モーター、磁石の写真

実験の方法は至って単純である。つまり、事前に流体層の厚さを測っておき、静止状態から障害物を動かして、等速直線運動となったときの流速と流れの様子を逐一確かめるというものである。水路には鉛直方向と水平方向に一つずつ定規がとりつけられており、前者は流体層の厚さを測るために用いられ、後者は障害物の移動距離を測るために用いられる。流速の測定は、毎秒 16 回のストロボ撮影が可能であるデジタルカメラを用いて行われた。具体的に言うと、撮影された画像から障害物の移動距離を水平方向の定規から読み取り、かかった時間で割ることによって平均値として流速を求めた。また、流れの様子の分類も全てその画像に基づいて行なった。

4. 2 実験データ・グラフとその考察

前節で述べた方法を繰り返すことにより、「流体層の厚さ」・「流速」・「流れの様子」に関する約 50 組のデータを得た。図 3 2 はこれらのデータを表にまとめたものである。そして、図 3 3 はこれらのデータを $Mc - Fo$ 平面上にプロットしたものである。いま、従来の理論に拠って、流れの様子を次の四つのタイプに分類した。

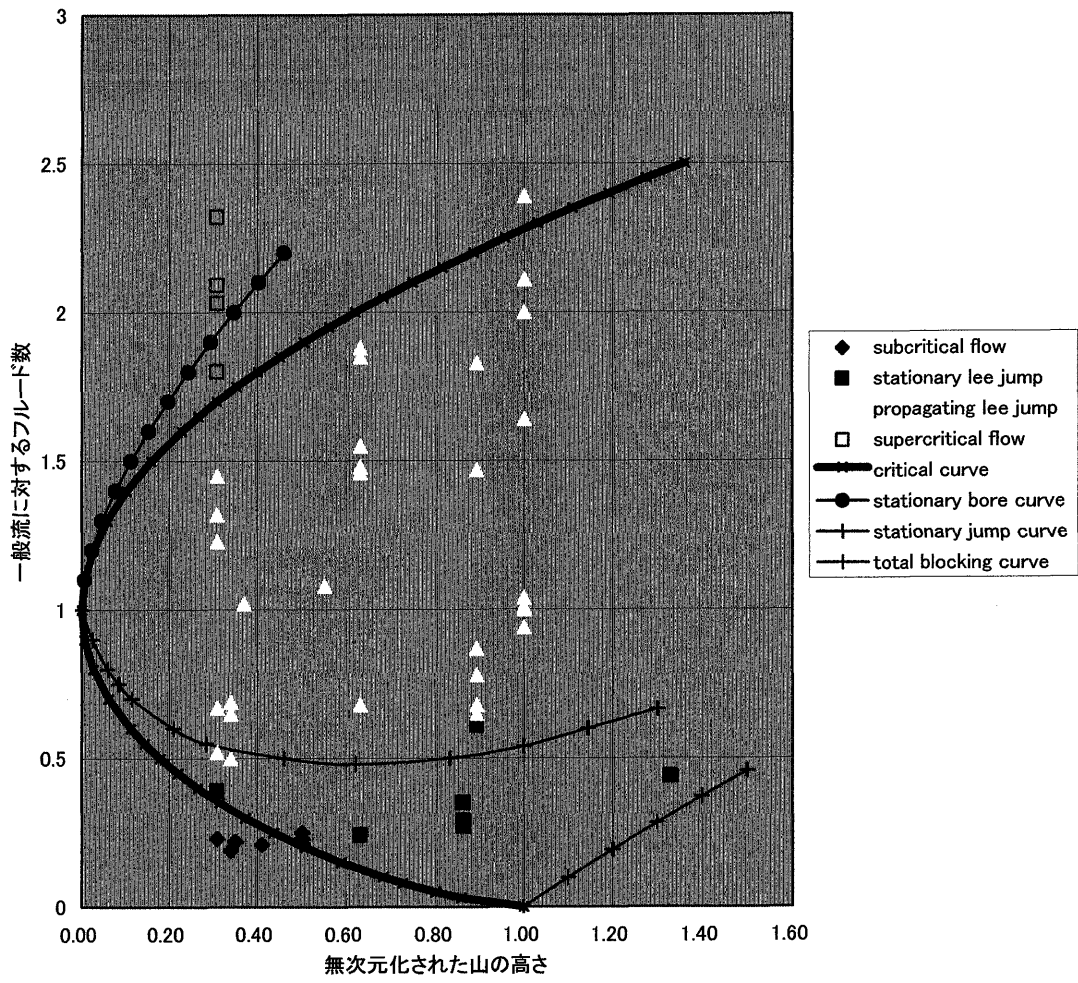
- ① 定常流 (subcritical flow) ; 山の上で水面がへこみ、流速が増大する流れ
- ② 定常流 (supercritical flow) ; 山の上で水面が盛り上がり、流速が減少する流れ
- ③ 非定常流 (hydraulic jump) ; 跳水の不連続面が下流へ進行する流れ
- ④ 非定常流 (stationary lee jump) ; 跳水の不連続面が山の麓で留まる流れ

図 3 2 実験データの一覧

無次元化された山の高さ Mc	一般流に対するフルード数 F_0	流体層の厚さ ho[cm]	流速 uo[cm/s]	結果
0.50	0.25	2.4	12.3	1
0.50	0.23	2.4	11.3	1
0.41	0.21	2.9	11.1	1
0.35	0.22	3.4	11.7	1
0.34	0.19	3.2	10.7	1
0.31	0.23	3.9	12.3	1
0.63	0.24	1.9	10.3	4
0.86	0.35	1.4	12.8	4
0.86	0.27	1.4	9.9	4
0.86	0.29	1.4	10.9	4
1.33	0.44	0.9	13.0	4
0.89	0.61	1.35	22.4	4
0.31	0.39	3.6	23.2	4
1.00	0.94	1.1	31.0	3
1.00	1.04	1.1	34.1	3
1.00	1.01	1.1	33.0	3
1.00	1.00	1.1	32.8	3
1.00	1.64	1.1	53.8	3
1.00	2.00	1.1	65.6	3
1.00	2.39	1.1	78.4	3
1.00	2.11	1.1	69.4	3
0.31	0.67	3.6	40.0	3

0.31	0.52	3.6	30.9	3
0.31	1.45	3.6	86.4	3
0.31	1.23	3.6	72.8	3
0.31	1.32	3.6	78.4	3
0.63	0.68	1.9	29.3	3
0.63	1.85	1.9	80.0	3
0.63	1.55	1.9	66.7	3
0.63	1.46	1.9	63.2	3
0.63	1.48	1.9	64.0	3
0.63	1.88	1.9	81.0	3
0.55	1.08	2.0	48.0	3
0.89	0.87	1.35	31.5	3
0.89	0.65	1.35	23.7	3
0.89	0.78	1.35	28.2	3
0.89	0.68	1.35	24.8	3
0.89	0.65	1.35	23.7	3
0.89	1.47	1.35	53.6	3
0.89	1.83	1.35	66.6	3
0.37	1.02	3.0	55.5	3
0.34	0.65	3.2	36.5	3
0.34	0.50	3.2	28.1	3
0.34	0.69	3.2	38.9	3
0.31	2.09	3.6	124.0	2
0.31	2.03	3.6	120.5	2
0.31	2.32	3.6	137.6	2
0.31	1.80	3.6	106.7	2
1.00	3.44	1.1	112.8	謎
1.00	4.24	1.1	139.2	謎
1.00	4.14	1.1	136.0	謎
1.00	2.76	1.1	90.7	謎

図33 山越え水流の実験結果



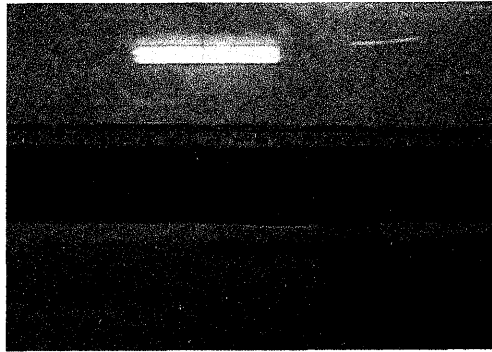


図 3 4 subcritical flow の写真

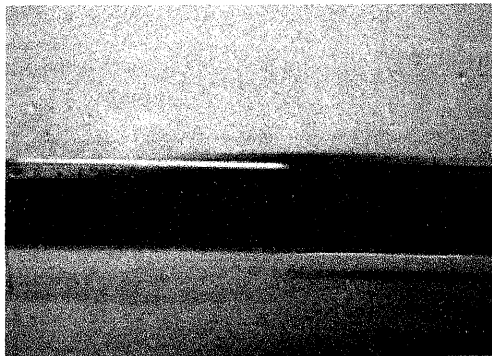


図 3 5 supercritical flow の写真

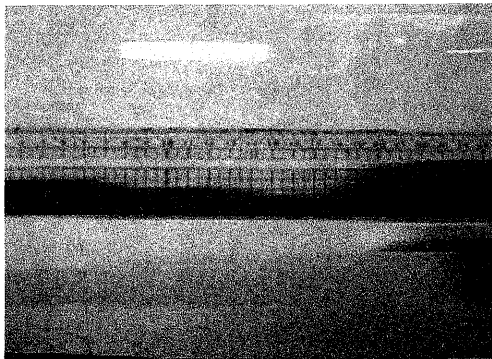


図 3 6 hydraulic jump の写真

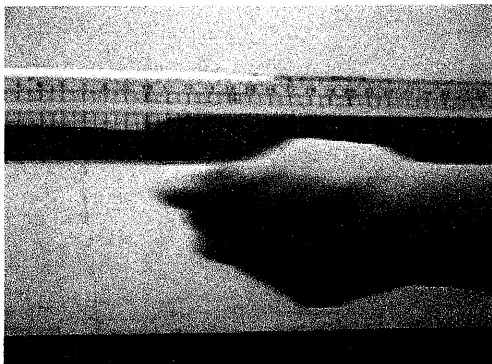


図 3 7 lee jump の写真

ここで、これらのデータがどれほどの誤差を含みうるのかを大雑把に評価しておく。まず、流体層の厚さについては障害物を動かす前に直接測定したので、誤差が生じる要因として二つ考えられる。一つは、人間の目による読み取り誤差である。水面はメニスカスと呼ばれる凹面となるので、それに惑わされて $\pm 0.1[\text{cm}]$ 程度の読み取りのミスが起きる可能性がある。第二に、水の蒸発や、水路の壁を超えて水がこぼれたことによる水面の低下である。流体層の厚さを測ってから実験を行うまでに数時間の時間差があったとしても、その間に蒸発する水の量はさほど多くないと考えられるから、蒸発による水位の低下による誤差は殆ど無視できると考えられる。一方、水路から水がこぼれることについては、水位が高ければその量も当然大きくなると考えられ、 $-0.1\sim 0.2[\text{cm}]$ 程度の誤差を生じさせる可能性がある。

また、前述のとおり、流速は画像を解析することによって求めたが、その映像が明確ではないときにはかなり大きな誤差を生じることが想定される。例えば、障害物の動かす速さが大きくなると、障害物は少なくとも $0.2\sim 0.3[\text{cm}]$ 程度の残像として映るようになる。或いは、摩擦によって障害物そのものが一つの画像内で $0.1\sim 0.3[\text{cm}]$ 程度振動することがしばしば発生した。例として、8コマ分(8/16[s])の映像から平均速度を割り出すときに $0.3[\text{cm}]$ の振動が発生していたとすれば、単純に考えて最大 $0.3\div(8/16)\div 0.6[\text{cm/s}]$ の速度誤差を生じることになる。いま、流体層の厚さが $3.0[\text{cm}]$ だとすれば、フルード数に関して、 $0.6\div\sqrt{980\times 3.0}\approx 0.01$ ほどの誤差が生じると考えられる。従って、山の振動に関するフルード数の誤差は速度・流体層の厚さの変化を考慮して、 $\pm 0.02\sim 0.04$ 程度と推定される。このことから、残像が生じるほど山が速く動いている場合のフルード数の誤差の大きさは 0.05 以上あるものと考えられるべきであろう。

以上のことを踏まえて、理論がどの程度正しいのかについて考察、検証してみる。

まず、データ自身が理論と一致しているかどうかについて考えてみる。定常状態と非定常状態を分ける臨界曲線に注目すると、**subcritical**の二つのデータ、そして**hydraulic jump**の一つのデータが領域をはみ出しているが、その他のデータは臨界曲線の分ける境界の範囲内に全て収まっていると言える。本来あるべき領域をはみ出してしまった三つのデータはそれほど数値的に逸脱しているわけではないので、誤差を考えると理論に一致する可能性が高い。そういった意味で、臨界曲線という概念はきわめて妥当性が高いものであると見ることが出来る。

次に、**hydraulic jump**と**lee jump**の境界、 $C_R=0$ について考えてみる。理論と一致しないデータが幾つか存在するようであるが、**lee jump**の領域の方が**hydraulic jump**の領域よりも下側にあるという観点では、理論とよく一致して

いると言うことが出来る。但し、**lee jump** のデータ数が若干少ないので、 $C_R=0$ の曲線の妥当性については議論の余地があると言える。

続いて、2. 4 節で述べた三つの理論・モデルのうち、どれが現実に最も近いかを検証してみる。**hydraulic jump** の例として挙げた写真に着目されたい。この写真の流れのデータは $F_0=1.08$ 、 $Mc=0.55$ である。左側に膨張波が存在しているのが確認できる。その右側（上流側）には膨張波に似た盛り上がりを見出すことが出来る。これはもはや不連続面とは言い難い。なだらかに水面が変化しているという点ではむしろ膨張波に近いと言える。この写真を見る限りでは、非定常で常に跳水の不連続面が発生することを主張している **Houghton**、**Kasahara** のモデルはあまり正しくないように思われる。また、**supercritical** の状態では山の下流で跳水の不連続面を含めて何も発生しないと主張する **Long** の理論もこの写真を見る限りではきわめて疑わしい。従って、この写真だけで見れば、二つのモデルを融合したものが最も現実に近いと言えるかもしれない。しかし実際のところ、実験で垂直に屹立した不連続面を観測出来たのは両手で数えられる程度の回数であった。つまり本来跳水の発生する **subcritical** の状態であっても、完全な不連続面はほとんど確認されなかったのである。このことに関して、跳水は乱流を伴うので、実際には殆ど不連続面として観測されないと説明する書物が幾つか存在する。次節では、このような乱流発生の可能性について若干考察を行うこととしたい。

4. 3 実験で確認された事実とその考察

流体力学の分野においては、流体粒子の運動を追跡する為に、水面に粉を浮かべたり、インクを落としたりすることがしばしば行われる。そこで、この実験でも赤インクを用いて、流体粒子の運動を調べてみた。その写真が図 3 8 である。写真の流れはその水面の様子から③の **hydraulic jump** に分類される。流れが山を下り終えて水面が平らとなっているところでは、インクが水路床に溜まった状態になっていることが分かる。その直後、水面がやや急激に上昇しているが、理論に従うならばこの部分が跳水の不連続面ということになる。この「不連続面」の少し上流側に注目すると、インクが「きのこ雲」のように持ち上がっているように見える。そして、その「きのこ雲」状のインク塊が振動するように下流側へ伝わっていくように見える。このインクの持ち上がりは流体粒子の鉛直上昇によるものと考えられる。そして、この鉛直上昇が強制力となってインクは振動、伝播を行なったのかもしれない。ここで一つの疑問が生じる。すなわちそれは、流体粒子の鉛直上昇は何故起こったのだろうかということである。力学的に見て流体粒子の移動は、「運動エネルギーの輸送」であると

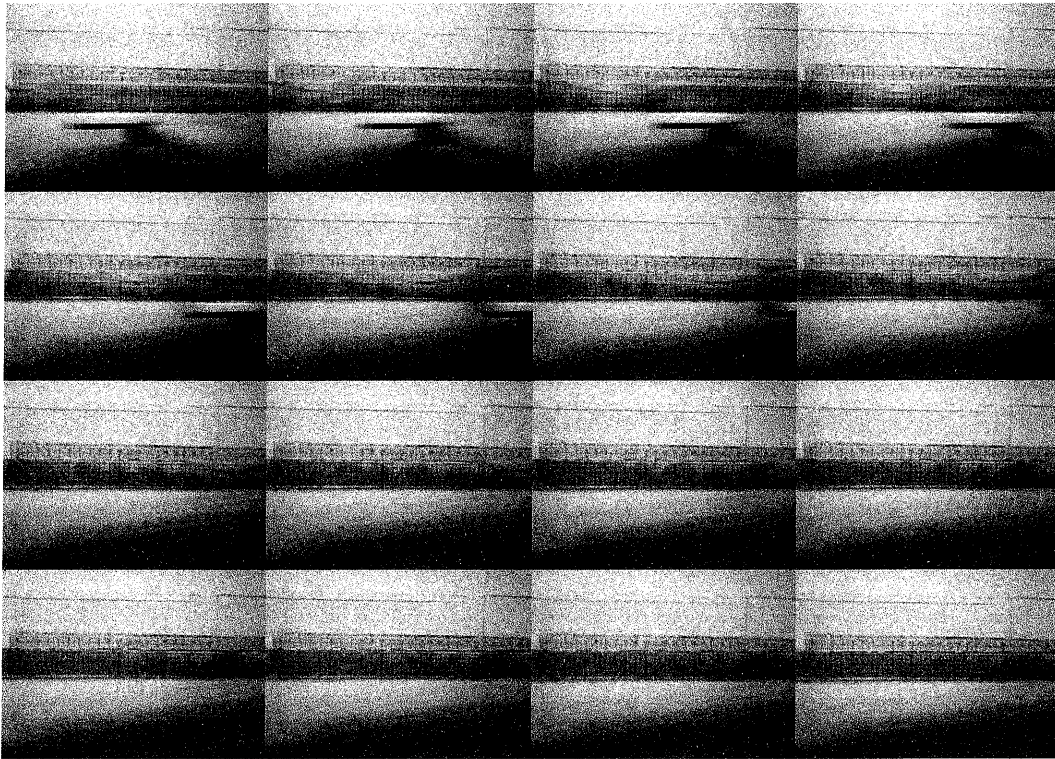


図 3 8 乱流発生のストロボ写真

考えることが出来る。この場合、流体のエネルギーが「不連続面」の少し上流側に収束していることになる。もし仮にこの領域で運動エネルギーの損失が起きているとすれば、このエネルギー輸送はその補償であると考えることが出来、これをうまく説明することが出来る。そうした運動エネルギーの損失は、不連続面近傍での乱流運動を示唆している。つまり、運動エネルギーは乱流運動によって熱エネルギーに変換されたと解釈することが出来る。

流体力学では、乱流発生の有無を判断するものとして、レイノルズ数 < Reynolds number > と呼ばれる物理量がよく用いられる。レイノルズ数とは、流体の運動方程式であるナビエ・ストークス方程式の中の慣性項と粘性項との大きさの比を表す無次元量で、 Re と表されることが多い。いま、流体の代表的な流速を U 、流れの代表的な長さを L 、流体の動粘性係数を ν とすると、 Re は次のように表される。

$$Re = (UL)/\nu \quad (4.3.1)$$

通常、 Re の値が 2000 を超えるとき、流れは層流から乱流へと遷移することが知られている。そこで、水路を流れる流れでは乱流が発生しうるのであるかを調べてみる。いま、水の温度が 20°C であると仮定して $\nu = 1.0038 \times 10^{-6} [\text{m}^2/\text{s}]$ 、代表的な流速として実験データのおおよその平均流速 $U = 50 [\text{cm}/\text{s}] = 0.50 [\text{m}/\text{s}]$ 、代表的な流れの長さとして流体層の厚さの大雑把な平均値 $L = 3.0 [\text{cm}] = 0.03 [\text{m}]$

を選ぶと、レイノルズ数 Re は、

$$Re = \frac{0.50 \times 0.03}{1.0038 \times 10^{-6}} = 1.49 \times 10^4 \quad (4.3.2)$$

となる。このことから、不連続面近傍で乱流が発生している可能性はかなり高いということが出来る。そのように考えると、三つの理論・モデルは乱流効果を殆ど考慮していないので、どれも現実に近いとは言い難いということになる。

実験で確認された特筆すべき現象をもう一つ挙げておきたい。前節では流れの様子を四つのタイプに分類して議論を進めた。ところが、得られたデータの中にこれら四つの流れのいずれにも当てはまらない、分類不可能なものが四つ存在した。これらは理論の上では **supercritical** に分類されるものであり、実際流れを見ると **supercritical** としての特徴をある程度有しているが、完全にそうであるとは言い切れない。図 3 9 がこの分類不可能な流れの一例である。この写真の流れのデータは $F_0=2.76$ 、 $Mc=1.00$ であり、フルード数がきわめて高いことに気がつく。他の二つのデータのフルード数に関して言えば、3 を超えている。写真から分かるように、最初は水面が山頂で盛り上がる **supercritical** の状態と

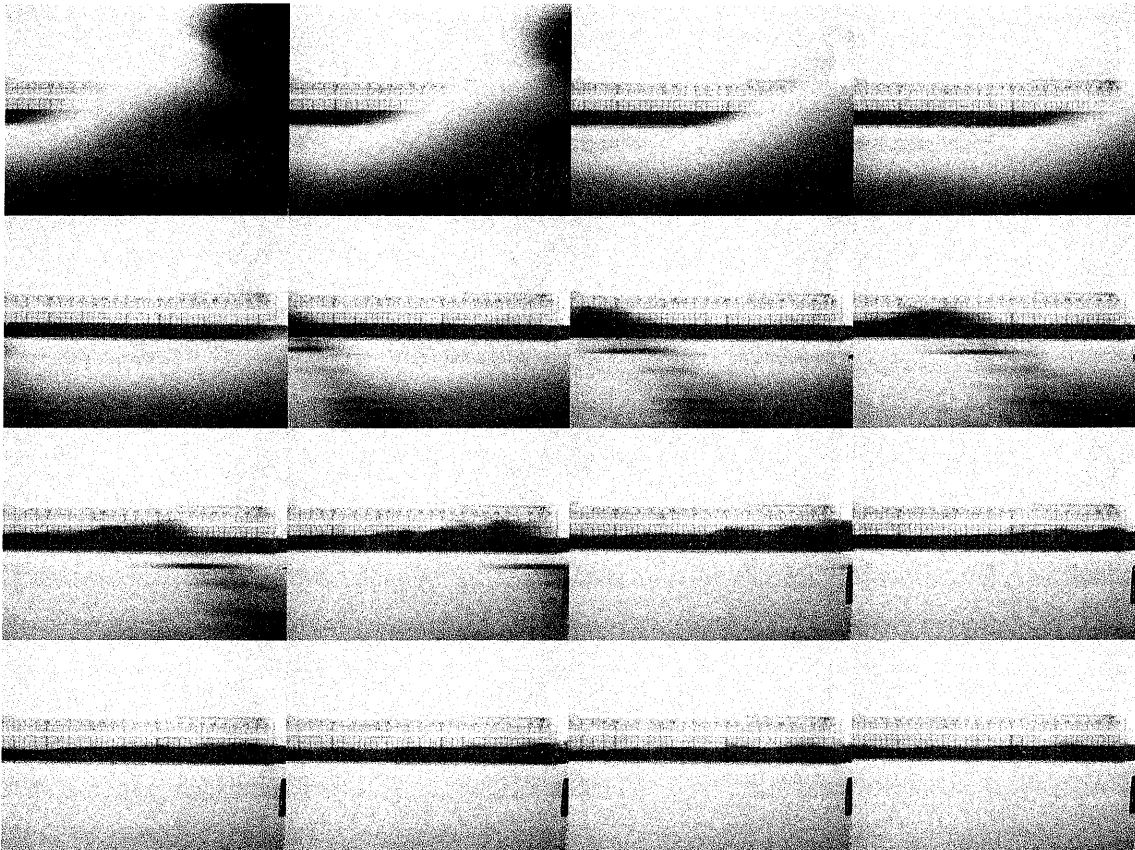


図 3 9 うねり発生のストロボ写真

なっているが、その後水面に幾つかの小さなへこみが現れ、盛り上がりは数個の瘤に分裂し、波のうねりのような様相を呈している。山越え水流の理論に於いて、定常状態を考えるとときに静水圧平衡を仮定していたが、図39の流れの水面は凹凸が激しく、静水圧が成立しているとは考えにくい。逆に、このような波形を形成したのは動水圧の効果によるものと考えることが出来る。

このようにフルード数が大きくなると静水圧平衡は破れてしまい、浅水方程式や水理水頭の保存などが成立しなくなる。第二章での議論は、ある程度フルード数が小さいときにしか適用出来ないと考えるべきなのかもしれない。

4. 4 実験中に起こったトラブルとその解決策

本節では、実験で遭遇したトラブル及び課題と、それらにどのように対処したのかについて、箇条書きの形式でまとめてみた。

- ・ 実験開始当初、斜めに傾けた溝に水を流していた。この場合、水の供給量を一定に保つことが難しく、また長時間水を流すことが出来ないと言う問題点があった。
→水ではなく、長時間観測可能な「ドライアイスの白煙」に切り替えることにした。
- ・ 「ドライアイスの白煙」に替えて、跳水現象を確認することは出来たが、激しい乱流が発生した。
→溝を斜めに傾けるのを止め、水路を水平に保った状態で白煙を流すことにした。
- ・ 水平な状態にして乱流は幾分収まったが、層流をなかなか得られなかった。
→上流側にプラスチック製の網を二重に張った。網はフィルタの役割を果たし、ようやく層流が得られるようになった。
- ・ 「ドライアイスの白煙」は湯にドライアイスのかけらを落とすことによって発生させた為、白煙は水蒸気を大量に含んでおり、アクリル板の側壁が水滴で曇り、観測に困難を来たした。
→アクリル板をあらかじめ暖めておくなどの措置をとったが、結局上手くいかなかった。そこでなるべく一回あたりの観測時間を短くし、逐一ティッシュ等で拭き取ることにした。
- ・ 白煙は空気中に拡散しやすい為、正確な流体層の厚さを見積もることが難しかった。また、ドライアイスの煙の量、速さなどコントロールが出来ない為、限られたフルード数のデータしか得られなかった。その上、流体層の厚さが正確に見積もれなかった為、理論と全く結果が一致しなかった。さらに、ド

ライアイスの白煙は圧縮流体であるが、理論では非圧縮流体を扱っているという根本的な問題が発生した。

→ドライアイスの白煙を諦め、水の中で障害物を動かす方法に切り替えた。

- ・ 障害物を小さく切ったホースと油粘土で作ったが、粘土が水で溶けてしまった。

→溶けない粘土を用意して作り直した。

- ・ 溶けない粘土は水より軽く、障害物が浮かんでしまった。

→金工の方に頼んで水より比重の大きい金属製の障害物（金属棒を蒲鉾型に短く切って、研磨したもの）を作っていたが、設計ミスにより水路に入らず、用をなさなかった。結局、粘土に磁石を二個埋め込んで重石代わりとすることによって解決した。

- ・ 電池・モーター・磁石・糸で障害物を引っ張る方法を思いついたが、障害物自身が振動してしまうという問題が生じた。

→振動は糸とモーターを固定する台が接触することによって生じていることが判明した。両者が接触しないようにすると、大きな振動はほとんど起こらなくなった。

- ・ 障害物が途中で磁石から外れてしまうという問題が生じた。

→障害物に埋め込まれた粘土と水路床との間に生じる摩擦力が原因であることが判明した。そこで爪楊枝を切ったものを取り付けて粘土と床の接触面積を減らすと、止まる回数が少なくなった。

- ・ 電池では出力に限界があり、障害物を速く動かせない。

→定電圧発生器を用いて、速く動かせるようになった。

- ・ 定電圧発生器でもやはり限界があり、なかなかフルード数が1を超えなかった。

→ゆっくり引っ張る場合人間の手では一定速度を保ちにくいだが、ある程度速く引っ張る場合には一定速度を実現出来ることが分かったので、手で引っ張る方法をとることにした。

- ・ 水路の底につなぎ目があったため、そこで障害物の減速、振動の発生、磁石の落下などが生じた。

→つなぎ目に水漏れ防止用のテープを貼っていたので、これを剥がして最小面積となるように貼り直したが、あまり効果がなかった。そこで、底部につなぎ目がない水路を新たに作り直した。

- ・ 長時間実験を行うと、溶けない粘土でもゆるくなり、中に埋め込んである磁石が外れやすくなる。

→実験を行わないときは障害物を水路の外に出して乾燥させたが、あまり効果は無かった。そこで障害物の側面にアクリル板を取り付け、水の入り込む面積

を少なくすると、磁石はほとんど外れなくなった。

5. 結論

Long や Houghton・Kasahara が示した山越え水流の理論は、「跳水」など実際に起こる現象の大部分を上手く説明するという意味できわめて重要である。しかし実験結果が示唆するように、より厳密な議論をおこなうには、動水圧の効果や乱流の効果などを考慮する必要がある。

また、山越え気流は内部重力波であり、外部重力波である山越え水流とは基本的には異なるが、Smith が示したように、山頂での subcritical から supercritical への移行など、山越え水流と類似する性質も有する。

6. 謝辞

跳水に関する実験は今までに行われたことが無かった為、我々は装置を作るところから実験を始めなければならなかった。しかるに、そうした装置も材料なしに作ることは出来ない。実験に必要となる材料並びに道具を滞ることなく提供してくださった遊馬先生に心より感謝申し上げる。そして、細かいことにこだわるとなかなか抜け出せない自分に最後まで付き合ってくれた共同実験者の伊藤君にも心から感謝申し上げます次第である。

7. 参照した論文、文献並びに電子文書

[論文]

[1]Long.R.R ,1953, Some aspects of the flow of stratified fluids ,1 A theoretical investigation ,Tellus, 5 ,42-58

[2]Long.R.R ,1954, Some aspects of the flow of stratified fluids ,2 Experiments with a two-fluid system , Tellus, 6 ,97-115

[3]Houghton,D.D. and A Kasahara ,1968, Nonlinear shallow water fluid over an isolated ridge , Communication on pure and applied mathematics , 21 ,1-23

[4]Smith, R.B.,1985 , On severe downslope winds, Journal of atmospheric science, 42 ,2597-2603

[5] 斎藤和雄,1994 ,山越え気流について（おろし風を中心として）, 天気 ,41,731-750

[書物]

[6]Stoker ,J.J.,1957,Water Waves, Interscience Publishers , New York,

[7] 日野幹雄,1983,明解水理学,丸善株式会社

[8]小倉義光,1997,メソ気象の基礎理論,東京大学出版会

[9]日本気象学会編,1998,気象科学事典,東京書籍

[電子文書]

[10] <http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/pdetutor/pdetutor.html>

[11] http://w3.msi.vxu.se/exarb/mj_ex.pdf

[12] <http://www.whoi.edu/PO/scientist/biosketch/PrattSec1.3.pdf>

[13] <http://www.whoi.edu/PO/scientist/biosketch/PrattSec1.6.pdf>

[14] <http://www.whoi.edu/PO/scientist/biosketch/PrattSec1.7.pdf>

[15]<http://www.jma.go.jp/jp/gms/>