第1章　はじめに

本文書は一学生が自身の趣味に基づき, 物理数学に関心と興味を有する後輩学生の為に実施した自主集中講義のメモである. 文書の性質上, 多くの誤りや不正確な内容が含まれると思われるので, 本文書を使用するに際しては, 性悪説の立場で読み進められたい.

近年, スパコンからパソコンに至るまで様々な計算機の性能が加速度的に向上し, 誰でもそれなりの性能を有する計算機を所有できるようになった. それに伴い, 数値計算は理論研究手法の主流となり, 万能なものとして無条件に受け入れられるようにさえなりつつある.

数値計算が普及する以前は「紙と鉛筆」によって数理的問題を解くことが主流であった. 数値計算が理論研究手法の主流となり, 「紙と鉛筆」の出番は失われたかというと, 決してそういうわけではない. 第一に「紙と鉛筆」によって解析解が得られるとすれば, それに越したことはない. 例えば解そのものの数学的性質を理解したり, 解の物理的解釈を行なう際, 解析解は数値解よりも見通しが良い[1]. また数値モデルの元になる方程式系や物理過程の導出は「紙と鉛筆」抜きにしては行なえない. 数値計算では離散化された方程式を解くことになるが, 「離散化」もまた「紙と鉛筆」で行なうべき作業である. 更に数値計算の結果の有効性を吟味する際には, 厳密解が求まる問題を数値的に解き, 厳密解と比較することがあるが, やはり「紙と鉛筆」抜きにして厳密解を求められない. このように「紙と鉛筆」は今後も理論研究の根本を支える重要な手法であり続けるだろう.

実際に問題を解くに当たって, ポリアの著書「いかにして問題を解くか」が以下のような有用な指針を与えてくれている.

- 未知数 (求めるべきもの) は何か
- 問題は証明問題なのか, 決定問題なのか[2]
- 以前に似た問題を解いたことがあるか
- 問題をいくつかに分解することができるか
- 問題文を言い換えてより簡単な問題に帰着できるか
- 与えられた条件を全て使ったか

[1] スタンリー・ファーロウ (1996) では解析解の長所として「物理パラメータ, 初期条件, 境界条件などが解にどんな影響を与えるかが, ただちにわかる」ことが挙げられている.
[2] 今回は決定問題のみ扱うこととする.

- 得られた解が正しいことが確かめられるか
- 問題を解き終わって振り返ってみると, より良い解き方は考えられないか[3)]

これらはあらゆる分野の問題について適用できると考えられ, 言うまでもなく数理科学・物理的な問題にも当てはめられるだろう.

本文書では上で述べたポリアの指針を踏まえつつ, 流体力学の一問題として 1 次元 Burgers 方程式を「紙と鉛筆」で解いてみる. Burgers 方程式は非線形偏微分方程式であり, これを「紙と鉛筆」で解く問題は, おそらく物理数学の問題としては少々難しい部類に属するだろう. しかしこの問題は「紙と鉛筆」で問題を解く上で必要となる様々な要素を含んでおり,「教育的練習問題」としては良い例であると言えるだろう.

[3)] より良い解き方を模索するのは実は重要なことである. 良い解き方を模索することは, 次に似た問題に出会ったときに経験を引き出しやすくするよう, 知識を整理することであるとポリアは指摘している. なお本文書では紙面の都合上, より良い解き方を模索する過程を省いている. より良い解き方の模索は各自に委ねたい.

第2章　Burgers 方程式

2.1　Burgers 方程式

3 次元 Navier-Stokes 方程式からいくつかの単純化を行なうことにより, 1 次元 Burgers 方程式を導出する. 時刻を t, 空間座標を (x, y, z), 流速を (u, v, w), 水平流速を u, 水平座標を x, 鉛直座標を z, 密度を ρ, 圧力を p, 粘性係数を ν とすると, x 方向の運動量の式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{2.1}$$

と表される. ここで以下のような単純化された状況を想定する.

- 流れは 1 次元的であり, u は x, t の関数, $v = 0, w = 0$ である.
- 圧力傾度力は存在しない.
- 密度, 粘性係数は空間的・時間的に一定である.

このとき

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.2}$$

となる. 式 (2.2) は 1 次元 Burgers 方程式と呼ばれる. 1 次元 Burgers 方程式は非線形偏微分方程式であるものの, 解析解を求めることが出来ることが知られている. 以下の節では定常解, 非定常解 (進行波解, 非進行波解) を求めてみる[1].

2.1.1　Burgers 方程式の定常解

無限領域 $(-\infty < x < +\infty)$ を考え, 境界条件として $u(x = +\infty, t) = U_\infty, u(x = -\infty, t) = U_{-\infty}$ を与えることにする. 式 (2.2) において, u は定常状態にあると仮定すると,

$$u\frac{du}{dx} = \nu\frac{d^2 u}{dx^2} \tag{2.3}$$

[1] 定常解を求める理由は他の解に比べて求めるのが容易である為だけではなく, 非定常解が $t \to \infty$ において収束する「候補」を知る為でもある. 収束する候補を予め知っておくと, 求めた非定常解が正しいかを確認する手がかりとなる. その意味でも非定常解よりも先に定常解を求めるべきである.

となる. ここで $u\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\frac{du^2}{dx}$ となることに着目すると[2)],

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}u^2 - \nu\frac{du}{dx}\right) = 0 \tag{2.4}$$

となる. 式 (2.4) を $x = -\infty$ から $x = +\infty$ まで積分すると,

$$U_{-\infty}^2 = U_{\infty}^2 \equiv U^2 \tag{2.5}$$

が得られる. ここで U は正でも負でも良いが, ここでは $U > 0$ とする. 式 (2.4) を x から $x = +\infty$ まで積分すると,

$$\frac{1}{2}u^2 - \nu\frac{du}{dx} \quad = \quad \frac{1}{2}U^2 \tag{2.6}$$

となる. ここで $u(x) = \pm U$ は式 (2.6) を満たすので, 定常解の 1 つであることが分かる. 以下, $u(x) = \pm U$ 以外の定常解も存在すると期待して議論を進めよう. 式 (2.6) を以下のように変形する.

$$\begin{aligned} 2\nu\frac{du}{dx} &= u^2 - U^2, \quad (2.7) \\ \left(\frac{1}{u+U} - \frac{1}{u-U}\right)\frac{du}{dx} &= -\frac{U}{\nu}. \quad (2.8) \end{aligned}$$

式 (2.7) より $-U < u < U$ となることに注意して式 (2.8) の両辺を $x = 0$ から x まで積分すると,

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{u+U}{U-u}\right) &= -\frac{U}{\nu}x + C, \\ u(x) &= U\frac{-1 + C'\exp\left(-\frac{U}{\nu}x\right)}{1 + C'\exp\left(-\frac{U}{\nu}x\right)} \quad (2.9) \end{aligned}$$

が得られる. ここで C' は積分定数である. 式 (2.9) より $u(-\infty) = U$, $u(\infty) = -U$ となっており, $u(x)$ は単調減少関数であることが分かる. $U = 1.0$, $\nu = 1.0$ の場合について定常解 (2.9) を描いたものを 図 1 に示す.

以上で得られた 2 つの定常解は方程式を解かずに, いわば「定性的数学」によって見出すことが出来る. 式 (2.3) より, udu/dx と $\nu d^2u/dx^2$ の符号は一致していなければならない. このことから u, du/dx, d^2u/dx^2 が満たすべき関係は 5 通りとなることが分かる.

1. $du/dx = 0$, $d^2u/dx^2 = 0$ (即ち u が定数)
2. $u > 0$, $du/dx > 0$, $d^2u/dx^2 > 0$
3. $u > 0$, $du/dx < 0$, $d^2u/dx^2 < 0$
4. $u < 0$, $du/dx > 0$, $d^2u/dx^2 < 0$

[2)] 技術的な話になるが, $u\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\frac{du^2}{dx}$ や $\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$ といった書き換えはエネルギー保存則などを議論する際に良く用いられるので, 覚えておいて損はないだろう.

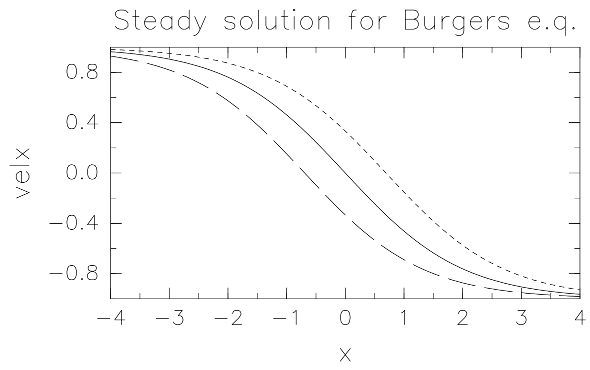

図 1: Burgers 方程式の定常解 (2.9) をプロットしたもの. ここでは $U = 1.0, \nu = 1.0$ としている. 実線は $C' = 1.0$, 破線は $C' = 0.5$, 点線は $C' = 2.0$ の場合に対応する.

5. $u < 0, du/dx < 0, d^2u/dx^2 > 0$

先ず 1. より u が定数という解 ($u(x) = \pm U$) が存在することが分かる. また $x = \pm\infty$ において u が一定になることに注意すると, u が定数でない場合には, $x = -\infty$ において 2. 又は 3. であり, $x = +\infty$ において 4. 又は 5. でなければならない. 更に $u, du/dx$ の連続性より, $x = -\infty$ において 3. であり, $x = +\infty$ において 5. でなければならないことが分かる. これはもう 1 つの定常解 (2.9) に対応する. このように「定性的数学」は解の概形を得るのに役立つとともに, 解析的に求めた解が誤っていないかを確認するという意味でも有用である[3].

2.1.2 Burgers 方程式の非定常解 (進行波解)

無限領域 ($-\infty < x < +\infty$) を一定の速さ c で伝播する進行波解 $u = f(x - ct)$ が存在すると仮定する[4]. ここでは境界条件として $u(x = +\infty, t) = U_\infty, u(x = -\infty, t) = U_{-\infty}$ ($U_{-\infty} < U_\infty$) を与えることにする. このとき $\xi \equiv x - ct$ と置くと,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{du}{d\xi} = -c\frac{df}{d\xi}, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{du}{d\xi} = \frac{df}{d\xi}, \tag{2.11}$$

[3]「定性的数学」に関するその他の事例としては演習問題 1. を参照されたい.

[4]Burgers 方程式以外にも進行波解を持つ非線形偏微分方程式がいくつか知られている. その例として Korteweg de Vries 方程式 (KdV 方程式), sine Gordon 方程式, Benjamin-Ono 方程式などが知られている. KdV 方程式の進行波解については, 演習問題 2. を参照されたい.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{d^2 u}{d\xi^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2} \tag{2.12}$$

となる. 式 (2.10), (2.11), (2.12) を式 (2.2) に代入すると,

$$-c\frac{df}{d\xi} + f\frac{df}{d\xi} = \nu\frac{d^2 f}{d\xi^2} \tag{2.13}$$

となる. ここで $f\frac{df}{d\xi} = \frac{1}{2}\frac{df^2}{d\xi}$ となることに着目すると,

$$\frac{d}{d\xi}\left(\nu\frac{df}{d\xi} - \frac{1}{2}f^2 + cf\right) = 0 \tag{2.14}$$

となる. 式 (2.14) の両辺を $\xi = -\infty$ から $\xi = +\infty$ まで積分すると, 境界条件 $u(x = +\infty, t) = U_\infty, u(x = -\infty, t) = U_{-\infty}$ より

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}U_\infty^2 + cU_\infty &= -\frac{1}{2}U_{-\infty}^2 + cU_{-\infty}, \\ c &= \frac{U_{-\infty} + U_\infty}{2} \end{aligned} \tag{2.15}$$

が得られる. 式 (2.14) の両辺を ξ から $\xi = +\infty$ まで積分すると, 境界条件 $f(\xi = +\infty) = U_\infty$ より

$$\begin{aligned} \nu\frac{df}{d\xi} - \frac{1}{2}f^2 + cf &= -\frac{1}{2}U_\infty^2 + cU_\infty, \\ \nu\frac{df}{d\xi} - \frac{1}{2}f^2 + \frac{U_{-\infty} + U_\infty}{2}f &= \frac{U_{-\infty}U_\infty}{2}, \\ 2\nu\frac{df}{d\xi} &= (f - U_{-\infty})(f - U_\infty), \\ \left(\frac{1}{f - U_{-\infty}} + \frac{1}{U_\infty - f}\right)\frac{df}{d\xi} &= \frac{U_\infty - U_{-\infty}}{2\nu} \end{aligned} \tag{2.16}$$

となる. 式 (2.16) の両辺を $\xi = 0$ から ξ まで積分すると,

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{f - U_{-\infty}}{U_\infty - f}\right) &= \frac{U_\infty - U_{-\infty}}{2\nu}\xi + D, \\ \frac{f - U_{-\infty}}{U_\infty - f} &= D'\exp\left(\frac{U_\infty - U_{-\infty}}{2\nu}\xi\right) \\ f(\xi) &= \frac{U_{-\infty} + U_\infty D'\exp\left(\frac{U_\infty - U_{-\infty}}{2\nu}\xi\right)}{1 + D'\exp\left(\frac{U_\infty - U_{-\infty}}{2\nu}\xi\right)} \end{aligned} \tag{2.17}$$

となる. ここで D' は積分定数である. 以上より,

$$u(x,t) = \frac{U_{-\infty} + U_\infty D'\exp\left[\frac{U_\infty - U_{-\infty}}{2\nu}\left(x - \frac{U_\infty + U_{-\infty}}{2}t\right)\right]}{1 + D'\exp\left[\frac{U_\infty - U_{-\infty}}{2\nu}\left(x - \frac{U_\infty + U_{-\infty}}{2}t\right)\right]} \tag{2.18}$$

が得られる. 式 (2.18) より $U_\infty > -U_{-\infty}$ の場合に波は x の正の方向に伝播し, $U_\infty < -U_{-\infty}$ の場合には x の負の方向に伝播する. $U_\infty = -U_{-\infty} \equiv U$ の場合, 式 (2.18) は定常解 (2.9) と一致する. また $U_\infty = U_{-\infty} \equiv \pm U$ の場合, 式 (2.18) はもう 1 つの定常解 $u(x) = \pm U$ と一致する. 即ち 2.2 節で求めた定常解は進行波解の特別な場合に相当することが分かる.

2.1.3 Burgers 方程式の非定常解 (非進行波解)

(2.2) は非線形方程式であるものの, 変数の変換を行うことで線形方程式に帰着させることが出来る. (2.2) の両辺に -1 を掛け, 式変形を行うと以下のように表せる.

$$\frac{\partial}{\partial t}(-u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2 - \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{2.19}$$

となる. ここで関数 $q(x,t)$ が以下の条件を満たしていれば, (2.19) は自動的に満たされることになる.

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -u, \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{2}u^2 - \nu\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2.21}$$

(2.20) を (2.21) に代入し, u を消去すると,

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \nu\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \tag{2.22}$$

となる. ここで

$$q = 2\nu\ln\phi \tag{2.23}$$

と置くと,

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 2\nu\frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial t}, \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 2\nu\frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x}, \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 2\nu\frac{1}{\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - 2\nu\frac{1}{\phi^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 \tag{2.26}$$

であるので, (2.22) は

$$\begin{aligned} 2\nu\frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial t} &= 2\nu^2\frac{1}{\phi^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \nu\left[2\nu\frac{1}{\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - 2\nu\frac{1}{\phi^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right] \\ &= 2\nu^2\frac{1}{\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} &= \nu\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

と書き換えられる. 式 (2.27) は 1 次元線形拡散方程式である. 式 (2.27) を解いて ϕ を求めることが出来れば,

$$u = -\frac{\partial q}{\partial x} = -2\frac{\nu}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{2.28}$$

の関係によって, u を求めることが出来る. (2.28) は Cole-Hopf 変換と呼ばれる[5)]. Cole-Hopf 変換を介して Burgers 方程式を解くことは, ポリアが言う所の「問題の分解」の 1 つの良い例であると言えよう.

初期条件が

$$\phi(x,0) = g(x) \quad (-\infty < x < \infty) \tag{2.29}$$

と与えられる場合の式 (2.27) の一般解を求める. $\phi(x,t) = X(x)T(t)$ と表せると仮定すると,

$$\begin{aligned} X''(x) - \lambda X(x) &= 0, & (2.30)\\ T''(t) - \lambda\nu T(t) &= 0 & (2.31)\end{aligned}$$

となる. ここで λ は定数である. $t \to \infty$ の極限で ϕ が有限である為には $\lambda < 0$ でなければならない. そこで $\lambda = -k^2$ と置くと, 式 (2.30), (2.31) の一般解はそれぞれ

$$\begin{aligned} X(x) &= E_1 e^{ikx} + E_2 e^{-ikx}, & (2.32)\\ T(t) &= E_3 e^{-k^2\nu t} & (2.33)\end{aligned}$$

と表される. ここで E_1, E_2, E_3 は任意定数である. いま無限領域を考えているので, $\phi(x,t)$ は $e^{ikx}e^{-k^2\nu t}$ を全ての $k(-\infty < k < \infty)$ について重ね合わせれば良い. 即ち,

$$\phi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k) e^{ikx} e^{-k^2\nu t} dk \tag{2.34}$$

と表される. ここで $\Phi(k)$ は波数 k の波の振幅である. 式 (2.34) において $t = 0$ とすると, 初期条件 (2.29) より

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k) e^{ikx} dk \tag{2.35}$$

となる. 式 (2.35) は $\Phi(k)$ が $g(x)$ をフーリエ変換したものであることを示している. 従って

$$\Phi(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iky} dy \tag{2.36}$$

と表される. 式 (2.36) を式 (2.34) に代入すると,

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)-k^2\nu t} dk\right) dy \tag{2.37}$$

となる. ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)-k^2\nu t} dk \;=\; e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu t\left[k - \frac{i}{2\nu t}(x-y)\right]^2} dk$$

[5)]Cole-Hopf 変換のような方法をどのように思いつくべきかという問題は発見学における永遠のテーマと言える. 結果論から言うと, Cole-Hopf 変換の場合は右辺第 1 項, 第 2 項で非線形項のもとになる $(\partial\phi/\partial x)^2$ に比例する項がちょうど打ち消されることが「ミソ」 となっている. 非線形項のもとになる項がちょうど打ち消されるようにするという方針が立てられれば, Cole-Hopf 変換を思いつくまであと一歩の所まで近づいたことになるのだろう. しかし常に良い方針が思いつくとは限らないので, 結局の所いろいろ試してみるのが一番の近道なのだろう.

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu t k^2} dk \\
&= e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}} \sqrt{\frac{\pi}{\nu t}} \qquad (2.38)
\end{aligned}
$$

であるので,

$$
\phi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}} dy \qquad (2.39)
$$

が得られる.

以下では初期条件が

$$
u(x,0) = \begin{cases} U_{-\infty}, & (x<0) \\ U_{\infty} & (x>0) \end{cases} \qquad (2.40)
$$

と与えられる場合の $u(x,t)$ を求めてみる. 式 (2.28), (2.40) より

$$
\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{t=0} = \begin{cases} -\frac{U_{-\infty}}{2\nu}\phi(x,0), & (x<0) \\ -\frac{U_{\infty}}{2\nu}\phi(x,0), & (x>0) \end{cases} \qquad (2.41)
$$

即ち,

$$
\phi(x,0) = g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{U_{-\infty}}{2\nu}x}, & (x<0) \\ e^{-\frac{U_{\infty}}{2\nu}x} & (x>0) \end{cases} \qquad (2.42)
$$

となる. 式 (2.42) を式 (2.39) に代入すると,

$$
\begin{aligned}
\phi(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{U_{-\infty}}{2\nu}y} \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}} dy + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{U_{\infty}}{2\nu}y} \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}} dy \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \\
&\quad \left[e^{-\frac{U_{-\infty}}{2\nu}(x-U_{-\infty}t)} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{\{y-(x-U_{-\infty}t)\}^2}{4\nu t}} dy + e^{-\frac{U_{\infty}}{2\nu}(x-U_{\infty}t)} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{\{y-(x-U_{\infty}t)\}^2}{4\nu t}} dy \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \\
&\quad \left(e^{-\frac{U_{-\infty}}{2\nu}(x-U_{-\infty}t)} \int_{x-U_{-\infty}t}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} dy + e^{-\frac{U_{\infty}}{2\nu}(x-U_{\infty}t)} \int_{-x+U_{\infty}t}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} dy \right) \qquad (2.43)
\end{aligned}
$$

となる. 式 (2.43) の両辺を x で微分すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \\
&\quad \Bigg(-\frac{U_{-\infty}}{2\nu} e^{-\frac{U_{-\infty}}{2\nu}(x-U_{-\infty}t)} \int_{x-U_{-\infty}t}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} dy - e^{-\frac{x^2}{4\nu t}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{U_{\infty}}{2\nu}e^{-\frac{U_{\infty}}{2\nu}(x-U_{\infty}t)}\int_{-x+U_{\infty}t}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}dy+e^{-\frac{x^2}{4\nu t}}\Bigg) \\
= & -\frac{1}{4\nu\sqrt{\pi\nu t}} \\
& \Bigg(U_{-\infty}e^{-\frac{U_{-\infty}}{2\nu}(x-U_{-\infty}t)}\int_{x-U_{-\infty}t}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}dy \\
& \quad +U_{\infty}e^{-\frac{U_{\infty}}{2\nu}(x-U_{\infty}t)}\int_{-x+U_{\infty}t}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}dy\Bigg) \\
= & -\frac{U_{\infty}}{4\nu\sqrt{\pi\nu t}} \\
& \Bigg(e^{-\frac{U_{-\infty}}{2\nu}(x-U_{-\infty}t)}\int_{x-U_{-\infty}t}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}dy+e^{-\frac{U_{\infty}}{2\nu}(x-U_{\infty}t)}\int_{-x+U_{\infty}t}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}dy\Bigg) \\
& -\frac{U_{-\infty}-U_{\infty}}{4\nu\sqrt{\pi\nu t}}e^{-\frac{U_{-\infty}}{2\nu}(x-U_{-\infty}t)}\int_{x-U_{-\infty}t}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}dy \\
= & -\frac{U_{\infty}\phi}{2\nu}-\frac{U_{-\infty}-U_{\infty}}{4\nu\sqrt{\pi\nu t}}e^{-\frac{U_{-\infty}}{2\nu}(x-U_{-\infty}t)}\int_{x-U_{-\infty}t}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}dy \qquad (2.44)
\end{aligned}
$$

となる. 式 (2.43), (2.44) を式 (2.28) に代入すると,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= -\frac{2\nu}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x} \\
&= U_{\infty}+\frac{(U_{-\infty}-U_{\infty})e^{-\frac{U_{-\infty}}{2\nu}(x-U_{-\infty}t)}\int_{x-U_{-\infty}t}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}dy}{e^{-\frac{U_{-\infty}}{2\nu}(x-U_{-\infty}t)}\int_{x-U_{-\infty}t}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}dy+e^{-\frac{U_{\infty}}{2\nu}(x-U_{\infty}t)}\int_{-x+U_{\infty}t}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}dy} \\
&= U_{\infty}+\frac{(U_{-\infty}-U_{\infty})\int_{x-U_{-\infty}t}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}dy}{\int_{x-U_{-\infty}t}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}dy+e^{\frac{U_{-\infty}-U_{\infty}}{2\nu}\left(x-\frac{U_{\infty}+U_{-\infty}}{2}t\right)}\int_{-x+U_{\infty}t}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}dy} \qquad (2.45)
\end{aligned}
$$

となる. ここで余誤差関数[6)]

$$
\mathrm{erfc}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{z}^{\infty}e^{-y^2}dy \qquad (2.46)
$$

を用いると,

$$
u(x,t)=U_{\infty}+\frac{(U_{-\infty}-U_{\infty})\mathrm{erfc}\left(\frac{x-U_{-\infty}t}{2\sqrt{\nu t}}\right)}{\mathrm{erfc}\left(\frac{x-U_{-\infty}t}{2\sqrt{\nu t}}\right)+e^{\frac{U_{-\infty}-U_{\infty}}{2\nu}\left(x-\frac{U_{\infty}+U_{-\infty}}{2}t\right)}\mathrm{erfc}\left(\frac{-x+U_{\infty}t}{2\sqrt{\nu t}}\right)} \qquad (2.47)
$$

が得られる[7)].

[6)] 余誤差関数 $\mathrm{erfc}(z)$ は双曲線関数 $\tanh(z)$ と形状が類似している. このことは両者の Taylor 展開を調べることで理解できる (演習問題 3. を参照).

[7)] ここで別の解き方はなかったか考えてみよう. その 1 つとして ϕ に関して Laplace 変換を適用する方法が考えられる. この場合, 逆変換を行なうときにやや面倒臭い積分に遭遇することになるだろう. Laplace 変換を用いる方が「良い解き方」であるかは個人差があるだろうが, 個人的にはここで示した解き方の方が簡単ではないかと思われる. その他のより良い解き方を模索する事例としては, 演習問題 4. を参照されたい.

式 (2.47) より解の振る舞いを調べる. $\mathrm{erfc}(-\infty)=2$ 及び $\mathrm{erfc}(\infty)=0$ より, $U_\infty<0<U_{-\infty}$, $U_\infty^2>U_{-\infty}^2$ の場合, $t\to\infty$ において $u(x,t)\to U_\infty$ となる. 一方 $U_\infty<0<U_{-\infty}$, $U_\infty^2<U_{-\infty}^2$ の場合, $t\to\infty$ において $u(x,t)\to U_{-\infty}$ となる. 即ち $t\to\infty$ では解 (2.47) は定常解の 1 つである定数解に収束する[8]. $x=0$, $|t|\ll 1$ のとき,

$$\begin{aligned}
u(0,t) &\approx U_\infty+\frac{(U_{-\infty}-U_\infty)\left(1-\frac{-U_{-\infty}\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\nu}}\right)}{\left(1-\frac{-U_{-\infty}\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\nu}}\right)+\left(1-\frac{U_\infty\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\nu}}\right)}\\
&= U_\infty+\frac{(U_{-\infty}-U_\infty)\left(1+\frac{U_{-\infty}\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\nu}}\right)}{2+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\nu}}(U_{-\infty}-U_\infty)}\\
&\approx U_\infty+(U_{-\infty}-U_\infty)\left(1+\frac{U_{-\infty}\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\nu}}\right)\left[\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{t}}{4\sqrt{\pi\nu}}(U_{-\infty}-U_\infty)\right]\\
&\approx \frac{U_{-\infty}+U_\infty}{2}+\frac{\sqrt{t}}{4\sqrt{\pi\nu}}\left(U_{-\infty}^2-U_\infty^2\right)
\end{aligned}\tag{2.48}$$

となる. 式 (2.48) より $U_\infty^2, U_{-\infty}^2$ の大小関係によって解の振る舞いが変わることが分かる. このことは $U_\infty^2, U_{-\infty}^2$ の大小関係によって $u(x,t)$ の $t\to\infty$ での振る舞いが変わることと整合的である[9]. $U_{-\infty}=2.0$, $U_\infty=-1.0$, $\nu=1.0$ の場合の Burgers 方程式の非進行波解 (2.47) の時間変化を図 2 に示す.

2.2 非斉次 Burgers 方程式

ここまで無視してきた圧力傾度力を以下では考慮することにする[10]. このとき運動量の式は

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right)\tag{2.49}$$

となる. 式 (2.49) は Burgers 方程式に非斉次項が加わった形になっており,「非斉次 Burgers 方程式」と呼ばれる. ここでは $x=0$ 近傍に高圧領域が存在するものとして

$$\frac{p}{\rho} = A\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right),\quad (-\infty<x<\infty)\tag{2.50}$$

と与えられる場合を考え, 定常解を求めてみる. 但し A は圧力のスケール, L は圧力分布の水平スケールであり, $\mathrm{sech}\,y=(\cosh y)^{-2}$, $\cosh y=(e^y+e^{-y})/2$ である.

[8] 求めた解が定常解の 1 つに最終的に行き着くらしいことが分かったので, 少なくともその点では求めた解は間違っていないらしいことが確認できる.

[9] このようにごく短い時間やごく限られた領域での関数の振る舞いを知る上で, テーラー展開を用いた近似は極めて有効である. またテーラー展開による近似の利点は, 高次の項まで考慮すれば近似の精度を向上させることができる点である. 非常に大雑把に言えば, 関数の傾きを知りたければ 1 次の項まで, 関数の曲がり方を知りたければ 2 次の項まで, それ以上のことを知りたければより高次の項まで考慮すれば良い.

[10] 「紙と鉛筆」で解析解を求める上で重要なことは, ある問題が解決できたら, 背伸びすれば手が届きそうなもう少し難しい問題を考えてみることである. これにより, ポリアが言う所の「似た問題を解いたことがある」状況が作り出されることになり, 過去の経験を生かせる確率が高まることになる.

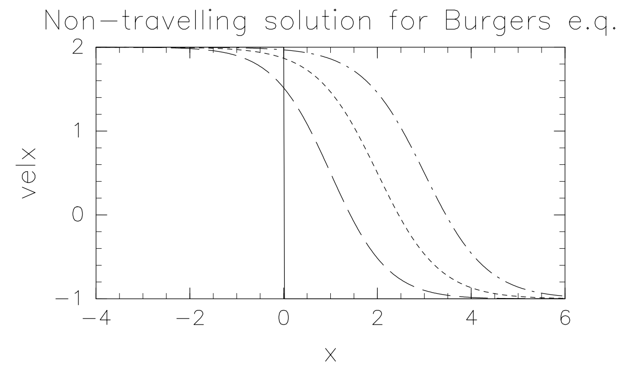

図 2: Burgers 方程式の非進行波解 (2.47) をプロットしたもの. ここでは $U_{-\infty} = 2.0$, $U_{\infty} = -1.0$, $\nu = 1.0$ としている. 実線は $t = 0.0$, 破線は $t = 2.0$, 点線は $t = 4.0$, 一点鎖線は $t = 6.0$ の場合に対応する.

2.2.1 非斉次 Burgers 方程式の定常解

境界条件として $u(x = +\infty, t) = U_{\infty}, u(x = -\infty, t) = U_{-\infty}$ を与えることにする. 式 (2.2) において, u は定常状態にあると仮定すると,

$$u\frac{du}{dx} = \nu\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d}{dx}\left[A\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right)\right] \tag{2.51}$$

となる. ここで $u\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\frac{du^2}{dx}$ となることに着目すると,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}u^2 - \nu\frac{du}{dx} + A\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right)\right] = 0 \tag{2.52}$$

となる. 式 (2.52) を $x = -\infty$ から $x = +\infty$ まで積分すると,

$$U_{-\infty}^2 = U_{\infty}^2 \equiv U^2 \tag{2.53}$$

が得られる. ここで U は正でも負でも良いが, ここでは $U > 0$ とする. 式 (2.52) を x から $x = +\infty$ まで積分すると,

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\nu}u^2 + \frac{A}{\nu}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right) - \frac{1}{2\nu}U^2 \tag{2.54}$$

となる. 式 (2.54) はリカッチの微分方程式

$$\frac{du}{dx} = Q_1(x)u(x)^2 + Q_2(x)u(x) + Q_3(x) \tag{2.55}$$

において $Q_1 = 1/(2\nu), Q_2 = 0, Q_3 = (A/\nu)\,\mathrm{sech}^2(x/L) - (1/2\nu)U^2$ としたものである. リカッチの微分方程式の場合, 特別解が 1 つ分かれば一般解を求めることができる[11]. そこで先ず (2.54) の特別解 $\tilde{u}$ を求める. ここで

$$\frac{d}{dx}\left[\tanh\left(\frac{x}{L}\right)\right] = \frac{1}{L}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right), \tag{2.56}$$

$$\tanh^2\left(\frac{x}{L}\right) = 1 - \mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right) \tag{2.57}$$

となることに着目し, $\tilde{u} = C\tanh(x/L)$ と仮定し, これを式 (2.54) に代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{C}{L}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right) - \frac{1}{2\nu}C^2\left[1 - \mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right)\right] - \frac{A}{\nu}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{1}{2\nu}U^2 &= 0, \\ \left(C^2 + \frac{2\nu}{L}C - 2A\right)\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right) - C^2 + U^2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.58}$$

となる. 式 (2.58) が恒等的に成り立つ為には

$$\begin{aligned} C^2 + \frac{2\nu}{L}C - 2A &= 0, \\ -C^2 + U^2 &= 0, \end{aligned}$$

即ち

$$C = \pm U = \pm\sqrt{\left(\frac{\nu}{L}\right)^2 + 2A} - \frac{\nu}{L} \tag{2.59}$$

となる.

次に上で見出した特別解 $\tilde{u}$ を用いて一般解を求める. 新たな従属変数を $v(x)$ を導入し $u = \tilde{u} + v^{-1}$ と置くと, 式 (2.54) は以下のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2\nu}\left(\tilde{u}^2 + 2\frac{\tilde{u}}{v} + \frac{1}{v^2}\right) - \frac{A}{\nu}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{1}{2\nu}C^2 = 0, \\ &-\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2\nu}\left(2\frac{\tilde{u}}{v} + \frac{1}{v^2}\right) = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\nu}\tilde{u}v + \frac{1}{2\nu} = 0. \end{aligned} \tag{2.60}$$

式 (2.60) の両辺に $\exp(\int_0^x \tilde{u}/\nu dx')$ を掛けると,

$$\begin{aligned} &\exp\left(\int_0^x \frac{\tilde{u}}{\nu}dx'\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\nu}\tilde{u}\exp\left(\int_0^x \frac{\tilde{u}}{\nu}dx'\right)v + \frac{1}{2\nu}\exp\left(\int_0^x \frac{\tilde{u}}{\nu}dx'\right) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial x}\left[\exp\left(\int_0^x \frac{\tilde{u}}{\nu}dx'\right)v\right] = -\frac{1}{2\nu}\exp\left(\int_0^x \frac{\tilde{u}}{\nu}dx'\right) \end{aligned} \tag{2.61}$$

となる. ここで

$$\int_0^x \frac{\tilde{u}}{\nu}dx' = \int_0^x \frac{C}{\nu}\tanh\left(\frac{x'}{L}\right)dx'$$

[11] 特別解を発見する一般的な方法は残念ながら存在しない. 出来るだけ多くの関数やその導関数の性質を把握しておくことが, 特別解を発見する確率を高めることになるだろう. 関数やその導関数の性質を把握する練習として, 演習問題 5. を参照されたい.

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^X \frac{LC}{\nu}\frac{\partial}{\partial x'}\ln\cosh\left(\frac{x'}{L}\right)dx' \\
&= \frac{LC}{\nu}\ln\cosh\frac{x}{L}, \\
\exp\left(\int_0^x \frac{\tilde{u}}{\nu}dx'\right) &= \exp\left[\frac{LC}{\nu}\ln\cosh\left(\frac{x}{L}\right)\right] \\
&= \cosh^{\frac{LC}{\nu}}\left(\frac{x}{L}\right) \qquad (2.62)
\end{aligned}
$$

であるので,

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left[v\cosh^{\frac{LC}{\nu}}\left(\frac{x}{L}\right)\right] = -\frac{1}{2\nu}\cosh^{\frac{LC}{\nu}}\left(\frac{x}{L}\right) \qquad (2.63)
$$

となる. 式 (2.63) の両辺を $x=0$ から x まで積分すると,

$$
\begin{aligned}
v(x)\cosh^{\frac{LC}{\nu}}\left(\frac{x}{L}\right) - D &= -\int_0^x \frac{1}{2\nu}\cosh^{\frac{LC}{\nu}}\left(\frac{x'}{L}\right)dx', \\
v(x) &= D\,\mathrm{sech}^{\frac{LC}{\nu}}\left(\frac{x}{L}\right) - \frac{1}{2\nu}\,\mathrm{sech}^{\frac{LC}{\nu}}\left(\frac{x}{L}\right)\int_0^x \cosh^{\frac{LC}{\nu}}\left(\frac{x'}{L}\right)dx'
\end{aligned}
\qquad (2.64)
$$

となる. ここで D は積分定数である. 以上より式 (2.64) の一般解は,

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \tilde{u}(x) + v(x)^{-1} \\
&= C\tanh\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{1}{D\,\mathrm{sech}^{\frac{LC}{\nu}}\left(\frac{x}{L}\right) - \frac{1}{2\nu}\,\mathrm{sech}^{\frac{LC}{\nu}}\left(\frac{x}{L}\right)\int_0^x \cosh^{\frac{LC}{\nu}}\left(\frac{x'}{L}\right)dx'} \\
&= C\tanh\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{\cosh^{\frac{LC}{\nu}}\left(\frac{x}{L}\right)}{D - \frac{1}{2\nu}\int_0^x \cosh^{\frac{LC}{\nu}}\left(\frac{x'}{L}\right)dx'} \qquad (2.65)
\end{aligned}
$$

が得られる. 式 (2.65) の右辺の積分は $LC/\nu = -3, -4$ などの場合には初等的な関数で表現することが出来る. $LC/\nu = -3$ の場合,

$$
u(x) = C\tanh\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{\mathrm{sech}^3\left(\frac{x}{L}\right)}{D - \frac{L}{2\nu}\left[\mathrm{sech}\left(\frac{x}{L}\right)\tanh\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{1}{3}\tanh^3\left(\frac{x}{L}\right)\right]} \qquad (2.66)
$$

となり, $LC/\nu = -4$ の場合,

$$
u(x) = C\tanh\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{\mathrm{sech}^4\left(\frac{x}{L}\right)}{D - \frac{L}{2\nu}\left[\tanh\left(\frac{x}{L}\right) - \frac{1}{3}\tanh^3\left(\frac{x}{L}\right)\right]} \qquad (2.67)
$$

となる. $LC/\nu = -4.0$, $L = 1.0$, $\nu = 1.0$ の場合の非斉次 Burgers 方程式の定常解 (2.67) を図 3 に示す.

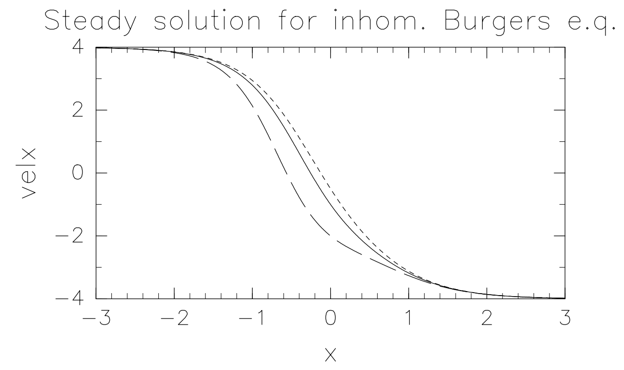

図 3: 非斉次 Burgers 方程式の定常解 (2.65) をプロットしたもの. ここでは $LC/\nu = -4.0$, $L = 1.0$, $\nu = 1.0$ としている. 実線は $D = -1.0$, 破線は $D = -0.5$, 点線は $D = -2.0$ の場合に対応する.

2.2.2 非斉次 Burgers 方程式の非定常解

Kudryavstev and Sapozhnikov (2011) によると[12), 非斉次 Burgers 方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right) \tag{2.68}$$

の 2 つの異なる解 $v(x,t)$, $\tilde{v}(x,t)$ が既知である場合,

$$u(x,t) = v(x,t) - 2\nu\frac{\partial}{\partial x}\left[\ln(v-\tilde{v})\right] \tag{2.69}$$

は別の形の非斉次 Burgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right) + 2\nu\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} \tag{2.70}$$

を満たす. 但し $v(x,t)$, $\tilde{v}(x,t)$ は定常解でも良く, $p = 0$ でも良い. 我々は既に Burgers 方程式の複数の解を得ているので, これらから非斉次 Burgers 方程式の非定常解を得ることが出来るということになる[13). 即ち「非斉次 Burgers 方程式を解く」という問題は「Burgers 方程式を解く」という問題に帰着されることになる. この問題はポリアが言う所の「問題の分解」や「より簡単な問題への帰着」の良い例であると言える.

[12) 複雑な問題を解く上でもう 1 つ重要なことは, 過去に同じ問題や類似する問題に取り組んだことがある人がいるのか, 論文や書籍を徹底的に調査することである. それによって問題解決のヒントが得られたり, 自分が思い付いたものよりも賢い解法が得られるかもしれない. 学部時代のとある講義で教員の方が「物事を調査する能力も立派な研究能力の一つ」とおっしゃっていたことは今でも印象に残っている.

[13) 逆に言えば, この方法では任意の非斉次項に対する非定常解を求められない.

以下, 式 (2.68), 式 (2.69) より式 (2.70) を導出する. $v(x,t)$, $\tilde{v}(x,t)$ はともに式 (2.68) を満たすので,

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}=-v\frac{\partial v}{\partial x}+\tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} \tag{2.71}$$

が成り立つ. 式 (2.69) の両辺を t で微分し, 式 (2.71) を適用すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial t}-2\nu\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left[\ln(v-\tilde{v})\right]\\
&= \frac{\partial v}{\partial t}-2\nu\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{v-\tilde{v}}\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}\right)\right]\\
&= \frac{\partial v}{\partial t}-2\nu\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{v-\tilde{v}}\left(-v\frac{\partial v}{\partial x}+\tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}\right)\right]\\
&= \frac{\partial v}{\partial t}+\frac{2\nu}{(v-\tilde{v})^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)\left(-v\frac{\partial v}{\partial x}+\tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}\right)\\
&\quad -\frac{2\nu}{v-\tilde{v}}\left[-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)^2+\tilde{v}\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}-\nu\frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial x^3}\right]
\end{aligned} \tag{2.72}$$

となる. 式 (2.72) の両辺を x で微分すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x}-2\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\ln(v-\tilde{v})\right]\\
&= \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{2\nu}{(v-\tilde{v})^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)^2-\frac{2\nu}{v-\tilde{v}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}\right)
\end{aligned} \tag{2.73}$$

となる. 式 (2.73) の両辺を x で微分すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{4\nu}{(v-\tilde{v})^3}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)^3+\frac{6\nu}{(v-\tilde{v})^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}\right)\\
&\quad -\frac{2\nu}{v-\tilde{v}}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial x^3}\right)
\end{aligned} \tag{2.74}$$

となる. 式 (2.70), (2.72), (2.73), (2.74) より

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\
=\;& \frac{\partial v}{\partial t}+\frac{2\nu}{(v-\tilde{v})^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)\left(-v\frac{\partial v}{\partial x}+\tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}\right)\\
&-\frac{2\nu}{v-\tilde{v}}\left[-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)^2+\tilde{v}\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}-\nu\frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial x^3}\right]\\
&+\left[v-\frac{2\nu}{v-\tilde{v}}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)\right]\left[\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{2\nu}{(v-\tilde{v})^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)^2-\frac{2\nu}{v-\tilde{v}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}\right)\right]\\
&-\nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{4\nu}{(v-\tilde{v})^3}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)^3+\frac{6\nu}{(v-\tilde{v})^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}\right)\right.\\
&\quad\left.-\frac{2\nu}{v-\tilde{v}}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial x^3}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{2\nu}{(v-\tilde{v})^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)\left(-v\frac{\partial v}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right) + \frac{2\nu^2}{(v-\tilde{v})^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}\right) \\
&\quad -\frac{2\nu}{v-\tilde{v}}\left[-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)^2 + \tilde{v}\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}\right] - \frac{2\nu^2}{v-\tilde{v}}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial x^3}\right) \\
&\quad +v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2\nu}{(v-\tilde{v})^2}v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)^2 - \frac{2\nu}{v-\tilde{v}}v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}\right) - \frac{2\nu}{v-\tilde{v}}\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right) \\
&\quad -\frac{4\nu^2}{(v-\tilde{v})^3}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)^3 + \frac{4\nu^2}{(v-\tilde{v})^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}\right) \\
&\quad -\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{4\nu^2}{(v-\tilde{v})^3}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)^3 - \frac{6\nu^2}{(v-\tilde{v})^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}\right) \\
&\quad +\frac{2\nu^2}{v-\tilde{v}}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial x^3}\right) \\
&= \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{(v-\tilde{v})^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)\left(-v\frac{\partial v}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right) \\
&\quad -\frac{2\nu}{v-\tilde{v}}\left[-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)^2 + \tilde{v}\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}\right] \\
&\quad +\frac{2\nu}{(v-\tilde{v})^2}v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)^2 - \frac{2\nu}{v-\tilde{v}}v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}\right) - \frac{2\nu}{v-\tilde{v}}\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{2\nu}{(v-\tilde{v})^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)\left[-v\frac{\partial v}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)\right] \\
&\quad -\frac{2\nu}{v-\tilde{v}}\left[-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)^2 + \tilde{v}\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)\right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{2\nu}{(v-\tilde{v})^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)\left(\tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - v\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right) \\
&\quad -\frac{2\nu}{v-\tilde{v}}\left[\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)^2 + \tilde{v}\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} - v\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right) + 2\nu\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}, \\
&\quad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right) + 2\nu\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} \qquad (2.75)
\end{aligned}
$$

となり, 式 (2.70) が導かれた.

以下では圧力分布が式 (2.50) で与えられる場合の非斉次 Burgers 方程式の非定常解を具体的に書き下してみる. Kudryavstev and Sapozhnikov (2011) と同様, $v(x)$ として Burgers 方程式の進行波解 (2.18), $\tilde{v}$ として Burgers 方程式の定常解 (2.9) を与えることとする. 簡単の為, 式 (2.18) において $D' = 1$, 式 (2.9) において $C' = 1$ とする. このとき

$$
v(x,t) = \frac{U_{-\infty} + U_\infty \exp\left[\frac{U_\infty - U_{-\infty}}{2\nu}\left(x - \frac{U_\infty + U_{-\infty}}{2}t\right)\right]}{1 + \exp\left[\frac{U_\infty - U_{-\infty}}{2\nu}\left(x - \frac{U_\infty + U_{-\infty}}{2}t\right)\right]}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{U_\infty + U_{-\infty}}{2} + \frac{U_\infty - U_{-\infty}}{2} \tanh\left[\frac{U_\infty - U_{-\infty}}{4\nu}\left(x - \frac{U_\infty + U_{-\infty}}{2}t\right)\right] \\
&= U_0 + \Delta U \tanh\left[\frac{\Delta U}{2\nu}(x - U_0 t)\right], \qquad (2.76) \\
\tilde{v}(x) &= U\frac{-1 + \exp\left(-\frac{U}{\nu}x\right)}{1 + \exp\left(-\frac{U}{\nu}x\right)} \\
&= -U \tanh\left(\frac{U}{2\nu}x\right) \qquad (2.77)
\end{aligned}
$$

となる. ここで $U_0 \equiv (U_\infty + U_{-\infty})/2$, $\Delta U \equiv (U_\infty - U_{-\infty})/2$ と置いた. このとき $u(x,t)$ が満たすべき方程式は

$$
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[U^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{U}{2\nu}x\right)\right] \qquad (2.78)
$$

となる. ここで $A = U^2$, $L = 2\nu/U$ とすると, $u(x,t)$ は圧力分布を式 (2.50) で与える場合の非定常解となる. このとき式 (2.69) より

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= U_0 + \Delta U \tanh\left[\frac{\Delta U}{L\sqrt{A}}(x - U_0 t)\right] \\
&\quad - \frac{(\Delta U)^2 \operatorname{sech}^2\left[\frac{\Delta U}{L\sqrt{A}}(x - U_0 t)\right] + A \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right)}{U_0 + \Delta U \tanh\left[\frac{\Delta U}{L\sqrt{A}}(x - U_0 t)\right] + \sqrt{A}\tanh\left(\frac{x}{L}\right)} \qquad (2.79)
\end{aligned}
$$

が得られる. 様々な U_0, ΔU の値に対して非定常解 (2.79) の時間変化を描いたものを図 4, 図 5, 図 6, 図 7 に示す.

式 (2.79) において $t \to \infty$ の極限を考えると,

$$
u(x,\infty) = U_0 - \Delta U - \frac{A \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right)}{U_0 - \Delta U + \sqrt{A}\tanh\left(\frac{x}{L}\right)} \qquad (2.80)
$$

となる. 様々な U_0, ΔU の値に対して式 (2.80) を描いたものを 図 8 に示す. 式 (2.80) は定常非斉次 Burgers 方程式

$$
u\frac{du}{dx} = \nu\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{d}{dx}\left[U^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{U}{2\nu}x\right)\right] \qquad (2.81)
$$

の解であるものの, 2.2.1 節で求めた定常非斉次 Burgers 方程式の解 (2.65) とは一致しない. 即ち解 (2.80) は, 2.2.1 節のようにリカッチ微分方程式に帰着させる解法では得られない. そこで非定常解 (2.79) を介さずに定常解 (2.80) をどのように求めれば良いかを「逆解き」の発想で考えてみよう[14]. 式 (2.80) を以下のように書き換える.

$$
u(x,\infty) = U_0 - \Delta U - 2\nu\frac{\frac{2\nu}{L^2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right)}{U_0 - \Delta U + \frac{2\nu}{L}\tanh\left(\frac{x}{L}\right)}. \qquad (2.82)
$$

[14]証明問題や数式の導出において, 答えから逆にたどっていく「逆解き」の発想が役に立つことがある. 最終的な解答にはおいては, スタート地点からゴール地点までの道筋を順に示すことにはなるが, 問題を解く過程においては, ゴールから考えてみたり, 途中から出発してみるなど, 柔軟な発想の下でいろいろと試行してみると良いだろう. 逆解きに関するその他の事例としては, 演習問題 6. を参照されたい.

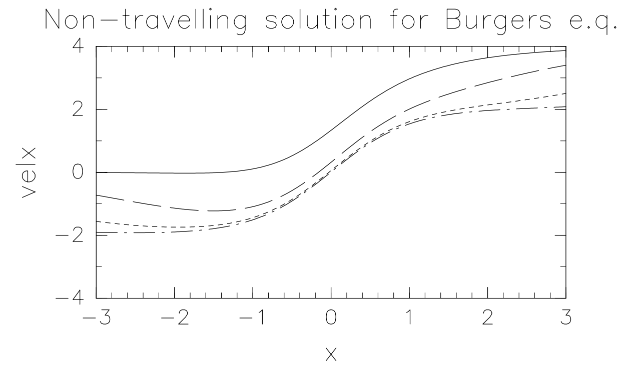

図 4: 非斉次 Burgers 方程式の非定常解 (2.79) をプロットしたもの．ここでは $L = 1.0$, $\nu = 1.0$, $U_0 = 3.0$, $\Delta U = 1.0$ としている．実線は $t = 0.0$, 破線は $t = 0.6$, 点線は $t = 1.2$, 一点鎖線は $t = 1.8$ の場合に対応する．

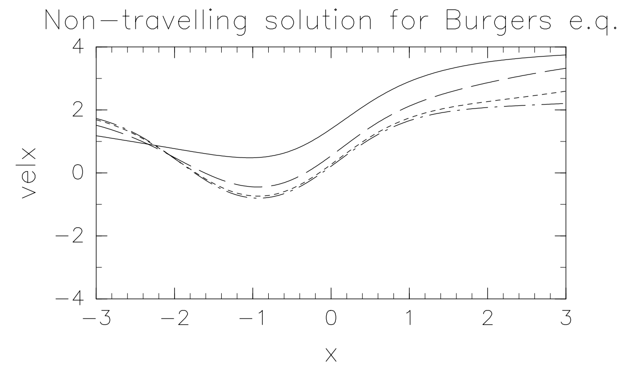

図 5: 非斉次 Burgers 方程式の非定常解 (2.79) をプロットしたもの．ここでは $L = 1.0$, $\nu = 1.0$, $U_0 = 3.0$, $\Delta U = 0.9$ としている．実線は $t = 0.0$, 破線は $t = 0.6$, 点線は $t = 1.2$, 一点鎖線は $t = 1.8$ の場合に対応する．

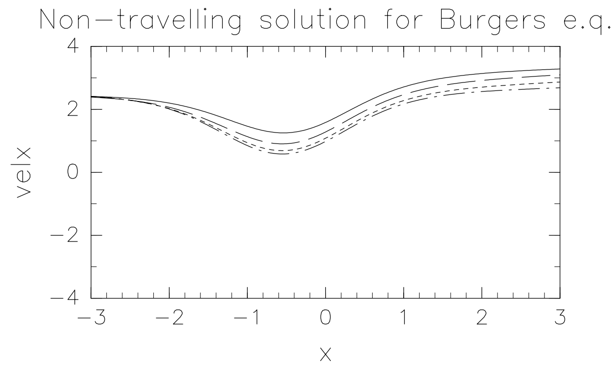

図 6: 非斉次 Burgers 方程式の非定常解 (2.79) をプロットしたもの．ここでは $L = 1.0$, $\nu = 1.0$, $U_0 = 3.0$, $\Delta U = 0.5$ としている．実線は $t = 0.0$, 破線は $t = 0.6$, 点線は $t = 1.2$, 一点鎖線は $t = 1.8$ の場合に対応する．

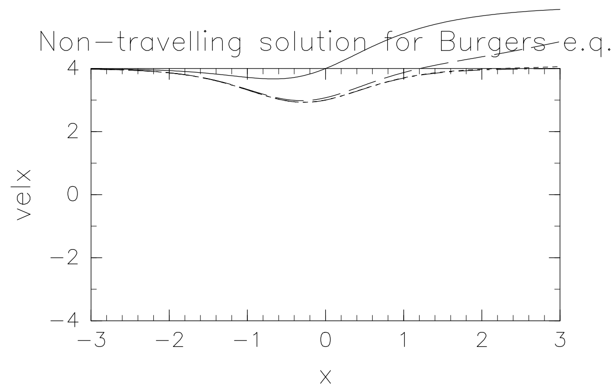

図 7: 非斉次 Burgers 方程式の非定常解 (2.79) をプロットしたもの．ここでは $L = 1.0$, $\nu = 1.0$, $U_0 = 5.0$, $\Delta U = 1.0$ としている．実線は $t = 0.0$, 破線は $t = 0.6$, 点線は $t = 1.2$, 一点鎖線は $t = 1.8$ の場合に対応する．

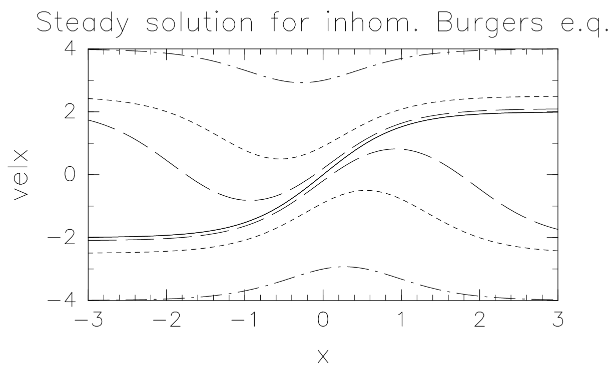

図 8: 非斉次 Burgers 方程式の定常解 (2.80) をプロットしたもの. ここでは $L = 1.0$, $\nu = 1.0$, $U_0 = 5.0$, $\Delta U = 1.0$ としている. 実線は $U_0 - \Delta U = \pm 2.0$, 破線は $U_0 - \Delta U = \pm 2.1$, 点線は $U_0 - \Delta U = \pm 2.5$, 一点鎖線は $U_0 - \Delta U = \pm 4.0$ の場合に対応する.

ここで式 (2.82) の右辺第 3 項において, $\phi = U_0 - \Delta U + (2\nu/L)\tanh(x/L)$ と置くと,

$$u(x,\infty) = U_0 - \Delta U - 2\nu \frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{2.83}$$

となる (偶然かもしれないが, 右辺第 3 項は Cole-Hopf 変換と同一の形である. この変換により, ϕ に関する線形方程式が得られることが期待される). 従って定常解 $u(x)$ を求めるには,

$$u(x) = U_0 - \Delta U - 2\nu \frac{1}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.84}$$

と置くとうまくいきそうであることが分かる. また $\psi = U_0 - \Delta U + \Psi$ と置くと良さそうであることも分かる. 以下では実際にうまくいくか試してみる. 境界条件 $u(\pm\infty, t) = U_0 - \Delta U$ の下で, 式 (2.81) を x から $x = \infty$ まで積分すると,

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\nu}u^2 + \frac{4\nu}{L^2}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right) - \frac{(U_0 - \Delta U)^2}{2\nu} \tag{2.85}$$

となる. 式 (2.85) に式 (2.84) に代入すると,

$$\begin{aligned}
-2\nu\frac{1}{\psi}\frac{d^2\psi}{dx^2} + 2\nu\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 &= 2\nu\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 - 2(U_0 - \Delta U)\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dx} + \frac{4\nu}{L^2}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right), \\
-\nu\frac{d^2\psi}{dx^2} &= -(U_0 - \Delta U)\frac{d\psi}{dx} + \frac{2\nu}{L^2}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right)\psi
\end{aligned} \tag{2.86}$$

となる. 更に $\psi = U_0 - \Delta U + \Psi$ と置くと,

$$\begin{aligned}
-\nu\frac{d^2\Psi}{dx^2} &= -(U_0 - \Delta U)\frac{d\Psi}{dx} + \frac{2\nu}{L^2}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right)(U_0 - \Delta U + \Psi), \\
-\nu\left[\frac{d^2\Psi}{dx^2} - \frac{2}{L^2}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right)\right] &= -(U_0 - \Delta U)\left[\frac{d\Psi}{dx} - \frac{2\nu}{L^2}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right)\Psi\right]
\end{aligned} \tag{2.87}$$

となる. ここで

$$\frac{d}{dx}\left[\tanh\left(\frac{x}{L}\right)\right] = \frac{1}{L}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right), \tag{2.88}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\tanh\left(\frac{x}{L}\right)\right] = -\frac{2}{L^2}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right)\tanh\left(\frac{x}{L}\right) \tag{2.89}$$

となることに着目し, $\Psi = F\tanh(x/L)$ と仮定し[15], これを式 (2.87) に代入すると,

$$0 = -(U_0 - \Delta U)\frac{1}{L}\left(F - \frac{2\nu}{L}\right)\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right) \tag{2.90}$$

となり, $F = 2\nu/L$ であれば良いことが分かる. 以上より,

$$u(x) = U_0 - \Delta U - 2\nu\frac{1}{U_0 - \Delta U + \Psi}\frac{d\Psi}{dx}$$

[15] ここでも $\Psi = F\tanh(x/L)$ をどのように思いつくかという問題が発生する. しかし我々は既に 2.2.1 節でリカッチ微分方程式の特別解を求めるという類似した状況において, 式 (2.88) が成り立つことを知識として得ている. 式 (2.89) の右辺を見たときに, ある人は少なくとも $\Psi \propto \tanh(x/L)$ を試してみる価値はありそうだという発想に行き着くだろう. 以上のように, 比較的簡単な類似問題を解いたことがある場合, それを思い出したり引き出せるようにしておくことが極めて重要であると言える.

$$= \quad U_0 - \Delta U - 2\nu \frac{\frac{2\nu}{L^2}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right)}{U_0 - \Delta U + \frac{2\nu}{L}\tanh\left(\frac{x}{L}\right)} \tag{2.91}$$

が得られる.

得られた解 (2.79) を $\tilde{v}$ と置くと, 異なる非斉次 Burgers 方程式の非定常解を求めることが出来る. この手続きを繰り返すことにより, 異なる非斉次 Burgers 方程式の非定常解を得ることができる. 以上のように, とある方程式に対する既知の解を用いて, 関連する方程式の解を構成することが出来る例として, 1 次元定常シュレディンガー方程式が挙げられる.

まとめ

本文書では以下に示すポリアの指針に基づき, Burgers 方程式を例に, 「紙と鉛筆」で問題を解く際の「視点」や「姿勢」について考えてみた.

- 未知数 (求めるべきもの) は何か
- 問題は証明問題なのか, 決定問題なのか
- 以前に似た問題を解いたことがあるか
- 問題をいくつかに分解することができるか
- 問題文を言い換えてより簡単な問題に帰着できるか
- 与えられた条件を全て使ったか
- 得られた解が正しいことが確かめられるか
- 問題を解き終わって振り返ってみると, より良い解き方は考えられないか

加えて, 本文書では「定性的数学」, 「逆解き」, 「問題を段階的に解くこと」などに焦点を当て, その事例を示してきた.

無論, 問題を解く一般的な方法は存在しない. しかし今回扱ってきた内容は直接的であれ間接的であれ, 数理科学的問題を考える上で, 解法を模索する一助となるだろうと私は確信している.

演習問題

1. 運動量の式において, 粘性項と圧力傾度力が釣り合っている場合を考える. 密度一定であるとすると,

$$0 = \nu \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

が成り立つ. $x = 0$ 近傍に釣鐘型の高圧領域が存在し, $p/\rho = \operatorname{sech}^2 x$ と与えられるものとする. また $|x| \to \infty$ で $u(x)$ が一定値に収束するものとする. このとき, $u(x)$ はどのような分布となるか. 「定性的数学」によって論ぜよ.

2. KdV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

の進行波解を求めてみよ. 但し境界条件として $u(\pm\infty) = 0$ を与えよ.

3. 余誤差関数 $\operatorname{erfc}(x)$ に関して, $|x| \ll 1$ の場合に $\operatorname{erfc}(x) \approx 1 - \tanh(2x/\sqrt{\pi})$ となることを示せ.

4. 定常 Burgers 方程式

$$u\frac{du}{dx} = \nu \frac{d^2u}{dx^2}$$

を境界条件 $u(x = 0) = 0$, $du/dx(x = 0) = -U^2/(2\nu)$ の下で解くことを考える. 先ず級数解法により解を求める.

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

と置き, 各係数を定めることで級数解が得られる. 5 次の係数まで決定せよ. 次に 2.2 節同様, 方程式を直接積分することにより解を求める. このとき

$$u(x) = -U \tanh\left(\frac{U}{2\nu}x\right)$$

となることを示せ. 求めた 2 つの解の見かけは異なるが, 級数解が少なくとも 5 次の項までは $-U\tanh(Ux/(2\nu))$ をテーラー展開したものになっていることに気付くだろう. 級数解は強力な解法であるが, 係数の計算が煩雑であるし, 解の性質を調べる上でやや見通しが悪い. 仮に先に級数解法を思い付いたとすれば, この場合方程式を直接積分する解法の方がより良い解き方であると言えるだろう.

5. 導関数と元の関数の関係に着目しつつ, 次の常微分方程式の特別解を求めよ.

$$
\begin{aligned}
&2xy^{'} + y = 0, \\
&y^{'} - 2xy = 0, \\
&y^{'} = 2y^{1/2}(1-y^2)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

6. 2.2.2 節でも述べた通り, 「逆解き」は証明や導出の思考過程において有用である. 例えばベータ関数

$$B(x,y) = \int_0^1 z^{x-1}(1-z)^{y-1}dz$$

とガンマ関数

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du$$

の間に

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

の関係が成り立つことを示そう. ここでは左辺から右辺 (もしくは右辺から左辺) へ変形するのではなく, 左辺と右辺の両方を変形してみる. 先ず

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du \int_0^\infty v^{x-1}e^{-v}du$$

において $u = r\cos^2\theta, v = r\sin^2\theta$ なる変数変換を実行し,

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 2\Gamma(x+y)\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}d\theta$$

となることを示せ. 次にベータ関数 $B(x,y)$ において $z = \sin^2\theta$ なる変数変換を実行し,

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}d\theta$$

となることを示せ. 以上より, 実際の解答では直接 $u = r(1-z^2), v = rz^2$ なる変数変換を行なえば良いことが分かる.

参考文献

Kudryavstev, A. G., Sapozhnikov, O. A., 2011: Determination of the exact solutions to the inhomogenous Burgers equation with the use of the Darboux transformation, Acoustical Physics, 57, 311 – 319

Sachdev, P. L., 1987: Nonlinear diffusive waves, Cambridge University Press, 246pp.

巽 友正, 1995: 流体力学, 培風館, 453 pp.

戸田 盛和, 1995: 波動と非線形問題 30 講, 朝倉書店, 219 pp.

中山 恒義, 2001: 物理数学 (II), 裳華房, 163 pp.

スタンリー・ファーロウ著, 伊理正夫・伊理由美訳, 1996: 偏微分方程式 – 科学者・技術者のための使い方と解き方 –, 朝倉書店, 411pp.

ポリア著, 柿内 賢信訳, 1975: いかにして問題をとくか, 丸善出版, 248pp.