

ここでは、Kawahara (2016) の 2.1 節で示されている最大重み付け経度近似による周波数変調の導出を行う。

2 周波数変調が起こることの証明

まず、ある位相角における惑星の反射光の強度は、次のようになる (Kawahara & Fujii 2010).

$$I(\lambda) = F_*(\lambda) R_p^2 \int_{S_{VI}} f(\phi, \theta; \lambda) \cos \vartheta_0(\phi, \theta) \cos \vartheta_1(\phi, \theta) d\Omega \quad (\text{KF10-1})$$

ここで、 $F_*(\lambda)$ は恒星のスペクトル放射束、 R_p は惑星の半径、 S_{VI} は恒星から照らされている部分と視野の共通部分、 $f(\phi, \theta; \lambda)$ は惑星の表面の反射率、 $\vartheta_0(\phi, \theta)$ は太陽からの入射角、 $\vartheta_1(\phi, \theta)$ は観測者からの入射角、 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ は立体角要素である。撮像で得られる光度の変動は最大重み付け経度の動きによってもたらされると仮定すると¹⁾、最大重み付け経度の位相 $\hat{\phi}_M$ のずれを計算することにより撮像変動の周期のモデルをたてることができる。すなわち、見かけの瞬間振動数 (instantaneous frequency) f_{obs} は次のようになる。

$$f_{\text{obs}} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \hat{\phi}_M}{\partial t} = -\frac{\partial \hat{\phi}_M}{\partial \Theta} f_{\text{orb}} \quad (\text{K16-2})$$

ここで、 $\Theta = 2\pi f_{\text{orb}} t$ は軌道位相であり、 f_{orb} は軌道周波数である。ここで、 $\frac{\partial(\hat{\phi}_M + \Phi)}{\partial \Theta}$ に着目すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\hat{\phi}_M + \Phi)}{\partial \Theta} &= \frac{\partial \hat{\phi}_M}{\partial \Theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{1}{\frac{\partial \Theta}{\partial t}}, \\ &= \frac{\partial \hat{\phi}_M}{\partial \Theta} + \frac{f_{\text{spin}}}{f_{\text{orb}}}, \\ &= \frac{f_{\text{spin}} - f_{\text{obs}}}{f_{\text{orb}}}. \quad (\because \text{K16-2}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\therefore f_{\text{obs}} = f_{\text{spin}} + \epsilon_\zeta(\Theta) f_{\text{orb}} \quad (\epsilon_\zeta(\Theta) = \frac{\partial \hat{\phi}_M + \Phi}{\partial \Theta})$$

¹⁾ この仮定がどの程度正しいのかはよくわからない。また、最大重み付け経度の定義は次節冒頭で説明する。

²⁾ 分子部分は、自転による位相変化を考慮した最大重み付け経度の位相を表す。その軌道位相角 Θ 微分は、観測者から見た自転の振動数に対応することになる。

となる．一方，最大重み付け点の位置ベクトル $(x, y, z)^3$ から，最大重み付け経度は，

$$\hat{\phi}_M + \Phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad (2.2)$$

$$\therefore \kappa(\Theta) = \tan(\hat{\phi}_M + \Phi) \quad (2.3)$$

と表される．ここで， $\kappa(\Theta) = \frac{y}{x}$ である．従って， $\epsilon_\zeta(\Theta)$ は

$$\epsilon_\zeta(\Theta) = \frac{\partial \hat{\phi}_M + \Phi}{\partial \Theta} = \frac{\kappa'(\Theta)}{1 + (\kappa(\Theta))^2} \quad (\text{K16-4})$$

と表される．以降は， $\kappa(\Theta)$ の表式を求めることが目標である．

3 $\kappa(\Theta)$ の導出

まず，最大重み付け経度の定義を示す．

最大重み付け経度では，惑星の反射光の強度 $I(\lambda)$ が最大となる．従って，最大重み付け経度では，

$$\cos \vartheta_0 = \cos \vartheta_1 \quad (3.4)$$

となる⁴⁾．後の説明のため，図 1.1 のように 3 つのベクトル $\mathbf{e}_S, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_O$ を定義する．3.4 は， $\mathbf{e}_S, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_O$ を用いて次のように書き直すことができる．

$$\mathbf{e}_S \cdot \mathbf{e}_R = \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_O \quad (3.5)$$

これを満たすベクトル $\mathbf{e}_R$ は，

$$\mathbf{e}_R = \frac{\mathbf{e}_S + \mathbf{e}_O}{|\mathbf{e}_S + \mathbf{e}_O|} \quad (3.6)$$

この $\mathbf{e}_R$ の成分を求めるには， $\mathbf{e}_S, \mathbf{e}_O$ の成分を求める必要がある．そこで，図 1.2 のように座標軸を設定する．図 1.2 の上図より， $\mathbf{e}_S$ は簡単に求められ，

$$\mathbf{e}_S = \cos(\Theta - \Theta_{\text{eq}})\mathbf{e}_x + \sin(\Theta - \Theta_{\text{eq}})\mathbf{e}_y \quad (3.7)$$

となる．一方， $\mathbf{e}_O$ は，天球面の法線ベクトルと考えることができる． $x'y'z'$ 空間における天球面の方程式は

$$z' = y' \tan i \quad (3.8)$$

³⁾ 最大重み付け経度とは区別している．最大重み付け経度は経度情報しか持たないのに対して，最大重み付け点は惑星上の一点であり，3次元で表現されることに注意されたい．また，ここで示した位置ベクトルの値には，自転の位相角の情報が含まれるものとする．

⁴⁾ 3.4 を満たす時，相加相乗平均の大小関係より，惑星反射光強度が最大となる．

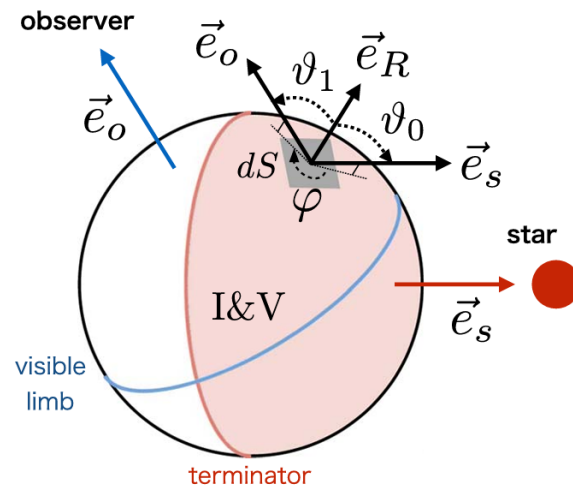


図 1.1 反射光の幾何的位置関係の模式図. Nakagawa et al. (2020) 図 5.

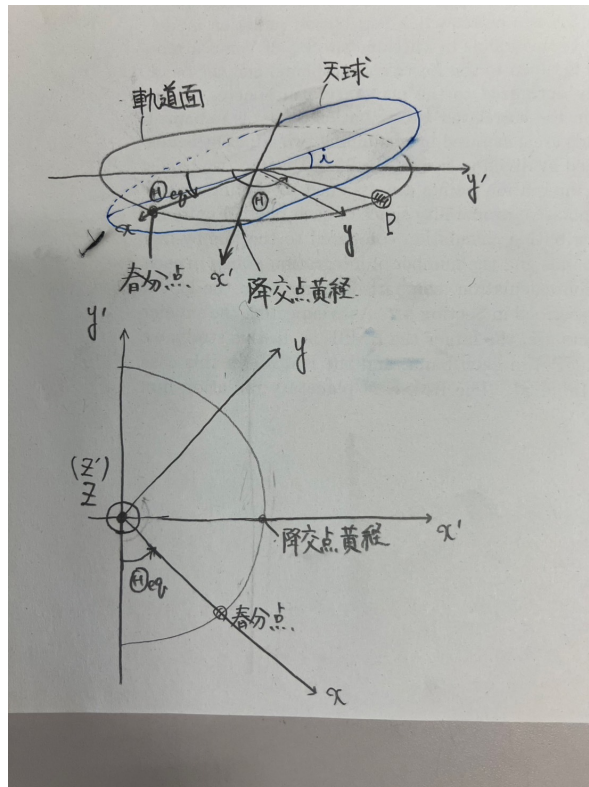


図 1.2 座標軸の設定.

であり、これを (x, y, z) 空間での成分の表現に書き換えた後、法線ベクトルを求めることにする。このときの座標変換は、 z 軸を固定して $\Theta_{\text{eq}} - \frac{\pi}{2}$ だけ回転させることに対応するため、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \Theta_{\text{eq}} & -\cos \Theta_{\text{eq}} & 0 \\ \cos \Theta_{\text{eq}} & \sin \Theta_{\text{eq}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

となるため、 xyz 空間における天球面のベクトル方程式は、パラメタ x', y' を用いて、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \sin \Theta_{\text{eq}} - y' \cos \Theta_{\text{eq}} \\ x' \cos \Theta_{\text{eq}} + y' \sin \Theta_{\text{eq}} \\ y' \tan i \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

となり、 s, t を消去すると、

$$x \cos \Theta_{\text{eq}} - y \sin \Theta_{\text{eq}} + \frac{z}{\tan i} = 0 \quad (3.11)$$

従って、法線ベクトル e_O は

$$e_O = \sin i \cos \Theta_{\text{eq}} e_x - \sin i \sin \Theta_{\text{eq}} e_y + \cos i e_z \quad (3.12)$$

以上をまとめると、 e_S, e_O の成分は、

$$\begin{aligned} e_S &= \cos(\Theta - \Theta_{\text{eq}}) e_x + \sin(\Theta - \Theta_{\text{eq}}) e_y, \\ e_O &= \sin i \cos \Theta_{\text{eq}} e_x - \sin i \sin \Theta_{\text{eq}} e_y + \cos i e_z \end{aligned} \quad (3.13)$$

であり、最大重み付け経度における e_R は、

$$e_R = \frac{e_S + e_O}{|e_S + e_O|} \quad (3.14)$$

$$= \frac{1}{L} (\cos(\Theta - \Theta_{\text{eq}}) + \sin i \cos \Theta_{\text{eq}}, \sin(\Theta - \Theta_{\text{eq}}) - \sin i \sin \Theta_{\text{eq}}, \cos i) \quad (3.15)$$

となる。

次に、惑星表面に固定された座標系を考え、正規位置ベクトルを e'_R とする。経度 ϕ , 余緯度 θ の惑星表面上の点における e'_R は、

$$e'_R = \cos \phi \sin \theta e_x + \sin \phi \sin \theta e_y + \cos \theta e_z \quad (3.16)$$

である。 e'_R は、 e_R から、自転軸の傾斜の影響と自転による位相の影響が除去されているため、 e'_R と e_R の関係は、

$$\begin{aligned} e'_R &= R(\zeta) \hat{S}(\Phi) e'_R(\phi, \theta) \\ &= R(\zeta) e'_R(\phi + \Phi, \theta) \end{aligned} \quad (3.17)$$

自転の位相の影響を考慮した、惑星表面に固定された座標系での最大重み付け点における、正規位置ベクトルを $e'_M(\phi + \Phi, \theta)$ とすると、

$$e'_M(\phi + \Phi, \theta) = R^{-1}(\zeta)e_M \quad (3.18)$$

$$= R(-\zeta)e_M \quad (3.19)$$

$$\begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, \cos \zeta, -\sin \zeta \\ 0, \sin \zeta, \cos \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Theta - \Theta_{eq}) + \sin i \cos \Theta_{eq} \\ \sin(\Theta - \Theta_{eq}) - \sin i \sin \Theta_{eq} \\ \cos i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Theta - \Theta_{eq}) + \sin i \cos(\Theta_{eq}) \\ \cos \zeta \sin(\Theta - \Theta_{eq}) - \cos \zeta \sin i \sin \Theta_{eq} - \sin \zeta \cos i \\ \sin \zeta \sin(\Theta - \Theta_{eq}) - \sin \zeta \sin i \sin \Theta_{eq} + \cos \zeta \cos i \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

以上より、求める $\kappa(\Theta)$ は、

$$\kappa(\Theta) = \frac{\cos \zeta \sin(\Theta - \Theta_{eq}) - \cos \zeta \sin i \sin \Theta_{eq} - \sin \zeta \cos i}{\cos(\Theta - \Theta_{eq}) + \sin i \cos(\Theta_{eq})} \quad (3.21)$$

となる。そこから実際に周波数変調の変調ファクター $\epsilon_\zeta(\Theta)$ を求めてみよう。

$$\frac{d\kappa(\Theta)}{d\Theta} = -\frac{\sin(\Theta - \Theta_{eq})(\cos \zeta \sin(\Theta - \Theta_{eq}) - \cos \zeta \sin i \sin \Theta_{eq} - \sin \zeta \cos i) + \cos \zeta \cos(\Theta - \Theta_{eq})(\cos(\Theta - \Theta_{eq}) + \sin i \cos(\Theta_{eq}))^2}{(\cos(\Theta - \Theta_{eq}) + \sin i \cos(\Theta_{eq}))^2} \quad (3.22)$$

$$= \frac{-\cos \zeta + \cos \zeta \sin i \cos \Theta - \sin(\Theta - \Theta_{eq}) \sin \zeta \cos i}{(\cos(\Theta - \Theta_{eq}) + \sin i \cos(\Theta_{eq}))^2} \quad (3.23)$$

従って、

$$\epsilon_\zeta(\Theta) = \frac{\kappa'(\Theta)}{1 + \kappa^2(\Theta)} = \frac{-\cos \zeta + \cos \zeta \sin i \cos \Theta - \sin(\Theta - \Theta_{eq}) \sin \zeta \cos i}{(\cos(\Theta - \Theta_{eq}) + \sin i \cos(\Theta_{eq}))^2 + (\cos \zeta \sin(\Theta - \Theta_{eq}) - \cos \zeta \sin i \sin \Theta_{eq} - \sin \zeta \cos i)^2} \quad (3.24)$$

(K16-21)