

(令和5年8月9日実施)

令和6年度

北海道大学大学院理学院 物性物理学専攻・宇宙理学専攻 修士（博士前期）課程入学試験 専門科目問題（午後）

受験に関する注意

- 試験時間： 13:00～15:30 の2時間30分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の間が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の間を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者（宇宙理学専攻を併願する者を含む）：問題 III, IV を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
 - － 観測天文学、素粒子・宇宙論、原子核理論、理論宇宙物理学、情報メディア科学、原子核反応データ科学を志望するものは問題 III, IV を解答すること。
 - － 惑星宇宙グループ、宇宙物質科学、相転移ダイナミクス、飛翔体観測を志望するものは問題 III, IV, V, VI の中から2つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子 問題 III 3枚 (A4)

問題 IV 3枚 (A4)

問題 V 2枚 (A4)

問題 VI 3枚 (A4)

解答紙 2問題分 6枚 (B4) (各問題3枚)

草案紙 2問題分 2枚 (B4) (各問題1枚)

問題 III

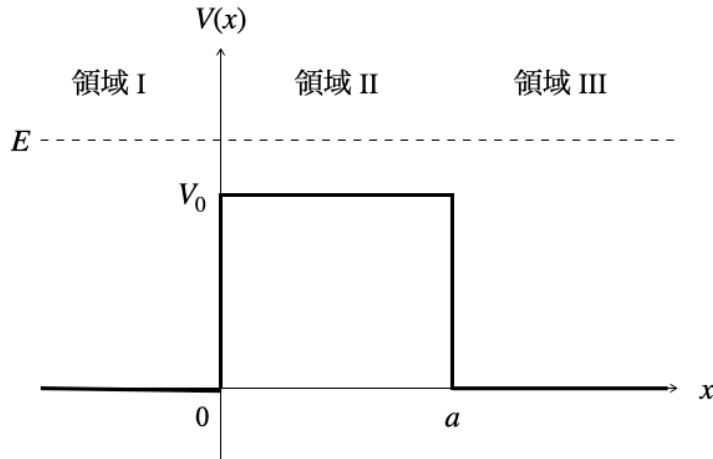
問 1 高さ $V_0 (> 0)$ 、幅 $a (> 0)$ を持つ一次元の箱型ポテンシャル障壁（下図）に、エネルギー E 、質量 m の量子力学的な粒子が入射する問題を考える。 $E > V_0$ のとき、図中の領域 I ($x < 0$)、II ($0 < x < a$)、III ($a < x$) 各々におけるシュレーディンガー方程式の解は、以下のように書ける。

$$\psi_{\text{I}}(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad (1)$$

$$\psi_{\text{II}}(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} \quad (2)$$

$$\psi_{\text{III}}(x) = Fe^{ik_1x} \quad (3)$$

ここで、波数 $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$, $k_2 = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$ である。



1-1. 一般に、波動関数が $\psi(x)$ で与えられる一次元での粒子の確率密度の流れ $j(x)$ は、

$$j(x) = -\frac{i\hbar}{2m} \left[\psi^* \frac{d}{dx} \psi - \left(\frac{d}{dx} \psi^* \right) \psi \right]$$

である。領域 III での $j(x)$ を計算せよ。

1-2. $x = 0$ での連続条件

$$\psi_{\text{I}}(0) = \psi_{\text{II}}(0), \quad \left. \frac{d\psi_{\text{I}}(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\psi_{\text{II}}(x)}{dx} \right|_{x=0},$$

および $x = a$ での連続条件

$$\psi_{\text{II}}(a) = \psi_{\text{III}}(a), \quad \left. \frac{d\psi_{\text{II}}(x)}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{d\psi_{\text{III}}(x)}{dx} \right|_{x=a}$$

から、振幅 A, B を、 k_1, k_2, a, F を用いて表せ。

- 1-3. 入射波がポテンシャルによって反射される確率 $R = |B|^2/|A|^2$ が以下で与えられることを示せ。

$$R = \frac{V_0^2 \sin^2(k_2 a)}{4E(E - V_0) + V_0^2 \sin^2(k_2 a)}$$

さらに、ポテンシャルを透過する確率 $T = |F|^2/|A|^2$ を計算し、 R と T の関係を調べよ。

- 1-4. 透過率が $T = 1$ となるための条件を求めよ。古典論における粒子のポテンシャル障壁への衝突と比較し、古典論との違いを簡潔に述べよ。

- 1-5. 次に、 $0 < E < V_0$ の場合を考える。このとき、領域 I、III での波動関数はそれぞれ式 (1)、(3) で与えられ、領域 II についてのみ式 (2) で $ik_2 \rightarrow \rho$ と置き換えられる。ただし、 $\rho = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ である。この場合、粒子がポテンシャル障壁を透過する確率 T は、

$$T = \frac{4k_1^2 \rho^2}{4k_1^2 \rho^2 + (k_1^2 + \rho^2)^2 \sinh^2(\rho a)}$$

と求められる。ポテンシャルが入射エネルギー E に比べて十分に高く ($\rho \gg k_1$)、かつ幅が広い極限 ($\rho a \gg 1$) での透過率 T を計算し、 $0 < E < V_0$ の量子力学的な粒子がポテンシャル障壁に入射するときの振る舞いを、古典論との違いに着目して簡潔に説明せよ。

問 2 量子力学における角運動量について考える。一粒子の軌道角運動量と固有スピンを \hat{l} , \hat{s} としたとき、全角運動量 \hat{J} は $\hat{J} = \hat{l} + \hat{s}$ である。まずは軌道角運動量のみ存在する場合を考える。演算子 \hat{l}^2 と、 \hat{l} の z 成分 \hat{l}_z は可換であり、その同時固有状態を $|l, m\rangle$ としたとき、

$$\hat{l}^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle, \quad \hat{l}_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle$$

のように、それぞれ固有値 $\hbar^2 l(l+1)$ と $\hbar m$ を持つ。また、 \hat{l} の各成分は交換関係 $[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = i\hbar \hat{l}_z$, $[\hat{l}_y, \hat{l}_z] = i\hbar \hat{l}_x$, $[\hat{l}_z, \hat{l}_x] = i\hbar \hat{l}_y$ を満たす。

2-1. 軌道角運動量 $\hat{l} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla$ の定義を用いることで、 $[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = i\hbar \hat{l}_z$ を示せ。

2-2. $\hat{l}_\pm = \hat{l}_x \pm i\hat{l}_y$ で定義される昇降演算子を導入する。交換関係 $[\hat{l}_\pm, \hat{l}_z]$, $[\hat{l}^2, \hat{l}_\pm]$ を求めよ。ただし、 \hat{l}^2 と \hat{l} の各成分が可換であることは用いてよい。

2-3. 昇降演算子 \hat{l}_\pm を状態 $|l, m\rangle$ に作用させた状態 $\hat{l}_\pm |l, m\rangle$ は、 \hat{l}^2 と \hat{l}_z の同時固有関数になっており、状態 $|l, m \pm 1\rangle$ と比例関係にある。その時の比例係数を求め、次式

$$\hat{l}_\pm |l, m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} |l, m \pm 1\rangle$$

を証明せよ。ただし、規格直交性 $\langle l, m | l, m' \rangle = \delta_{m, m'}$ 、および関係式 $\hat{l}^2 = \hat{l}_\mp \hat{l}_\pm + \hat{l}_z^2 \pm \hbar \hat{l}_z$ は証明なしに用いてよい。

次にスピン自由度を導入する。演算子 \hat{l}^2 , \hat{l}_z , \hat{s}^2 , \hat{s}_z は互いに可換であり、それぞれの固有値 $\hbar^2 l(l+1)$, $\hbar m$, $\hbar^2 s(s+1)$, $\hbar m_s$ を与える同時固有状態 $|l, m; s, m_s\rangle$ が存在する。一方、全角運動量については、 \hat{J}^2 と \hat{J}_z もまた互いに可換なので、それぞれの固有値 $\hbar^2 J(J+1)$, $\hbar M$ を与える同時固有状態 $|J, M\rangle$ も存在する。以下では $l = 1$, $s = 1/2$ の場合を扱う。この時、 J のとりうる値は $3/2$ または $1/2$ である。

2-4. 一電子原子系への 1 次の摂動として、スピン・軌道相互作用 $\hat{V}_{ls} = \zeta \hat{l} \cdot \hat{s}$ を考える ($\zeta > 0$ は定数)。基底 $|J, M\rangle$ での \hat{V}_{ls} の行列要素は対角的であり、 M によらない。この場合の対角成分を計算し、 \hat{V}_{ls} によるエネルギー分裂の大きさを求めよ。

2-5. $|J, M\rangle$ 基底での状態 $|J = 3/2, M = 3/2\rangle$ は、 $|l, m; s, m_s\rangle$ 基底を用いて

$$|J = 3/2, M = 3/2\rangle = |l = 1, m = 1; s = 1/2, m_s = 1/2\rangle$$

と書ける。これに合成系の昇降演算子 $\hat{J}_\pm = \hat{l}_\pm + \hat{s}_\pm$ を順次作用させることにより、 J , M で指定される各状態の固有関数 $|J, M\rangle$ を、基底 $|1, m; 1/2, m_s\rangle$ の線型結合として求めよ。

問題 IV

問 1 系の内部エネルギーを U , エンタルピーを H , エントロピーを S , 絶対温度を T , 圧力を p , 体積を V として以下の間に答えよ。

1-1. 熱力学第一法則より、系に $d'Q$ の熱量を準静的に与えた場合、以下の式が成り立つ。

$$d'Q = dU + pdV$$

$H = U + pV$ と表されることを用いて、以下の式が成り立つことを示せ。

$$d'Q = dH - Vdp$$

1-2. エンタルピー H を温度と圧力の関数 $H(T, p)$ と考えると、 $d'Q$ が以下の式で表されることを示せ。

$$d'Q = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT + \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T - V \right\} dp$$

1-3. 定圧条件下で $d'Q$ の熱量を系に準静的に与えるとき、系の温度が dT 上昇した場合、系の定圧熱容量は $C_p = \left(\frac{d'Q}{dT} \right)_p$ と表される。1-2 の結果と $dS = \frac{d'Q}{T}$ の関係を用いて、以下の関係式を示せ。

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = C_p$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = \frac{C_p}{T}$$

問 2 問 1 の結果を用いて以下の問に答えよ。

過冷却状態とは物質が凝固点（融点）以下まで液体状態を保った準安定な状態である。ここでは以下の仮定のもとで、過冷却状態を示すある物質 X が凝固点以下の温度で過冷却液体から固体に状態変化する過程でのエントロピー変化について図 1 を参考にしながら考える。

物質 X の 1 気圧での固体状態での定圧モル比熱を C_s 、液体状態での定圧モル比熱を C_l とする。 C_s, C_l は温度によらず一定であり、 $C_s < C_l$ とする。また、過冷却状態での液体の定圧モル比熱も C_l であり、平衡状態での液体と同様に扱うことができるものとする。物質 X の 1 気圧での融点は T_0 であり、1 気圧、温度 T_0 でのモル融解熱を Q_0 とする。過冷却液体から固体に変化する温度を $T_1 (< T_0)$ とし、 $T_1 < T$ の範囲で液体状態のエントロピーは固体状態のエントロピーより大きいものとする。全て 1 モルの物質 X の 1 気圧での定圧変化を考えるものとして、以下の問いに C_s, C_l, T_0, T_1, Q_0 を用いて答えよ。

2-1. 物質 X を温度 T_1 の固体から温度 T_0 の液体に変化 (図 1 で $A \rightarrow B \rightarrow C$ の変化) させるのに必要となる熱量 Q_1 と物質 X のエントロピー変化 ΔS_1 を求めよ。

同様に、温度 T_0 の液体から温度 T_1 の過冷却液体に変化 (図 1 で $C \rightarrow D$ の変化) させるのに必要となる熱量 Q_2 と物質 X のエントロピー変化 ΔS_2 を求めよ。

2-2. 物質 X が温度 T_1 の過冷却液体から温度 T_1 の固体に変化する過程は図 1 で $D \rightarrow A$ の変化に対応する。この過程が不可逆過程であることに注意して、物質 X が温度 T_1 の過冷却液体から温度 T_1 の固体に変化する過程での物質 X のエントロピー変化 ΔS_3 を求めよ。

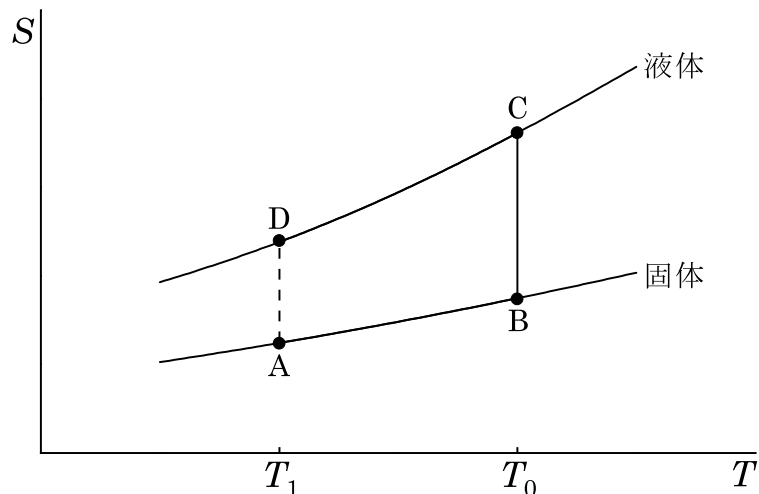


図 1

問 3 N 個の角振動数 ω の量子力学的な調和振動子からなる系を考える。1 個の調和振動子の固有エネルギーは $\epsilon_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) である。ボルツマン定数を k_B 、絶対温度を T として以下の問いに答えよ。

3-1. この系の分配関数 $Z = Z(T, N)$ を求めよ。

3-2. この系の内部エネルギー $E = E(T, N)$ を求めよ。

3-3. この系の定積比熱 $C_V = C_V(T, N)$ を求めよ。

3-4. C_V の高温極限 ($T \rightarrow \infty$) での値を求めよ。

問題 V

以下の問に答えよ。解答にあたっては結果だけでなく、導出過程についても記すこと。

問 1 $u(x)$ は $x \geq 0$ の領域で定義される実関数であり、微分方程式

$$\frac{d^3u}{dx^3} + \frac{d^2u}{dx^2} - 2u = 0 \quad (1)$$

を満たす。以下の問に答えよ。

1-1. (1) 式の一般解を求めよ。

1-2. 以下の境界条件を満たす $u(x)$ を求めよ。

$$u(0) = 1, \quad \frac{du}{dx}(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

問 2 以下の連立漸化式を考える。

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \text{ただし } n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2-1. 行列 \mathbf{M} のすべての固有値とそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。

2-2. 初項が $a_0 = 3, b_0 = 6$ である場合に一般項 a_n, b_n を求めよ。

問 3 ベクトルに関する以下の問に答えよ。

3-1. 直交直線座標表示で $\mathbf{U} = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ となる 3 次元ベクトルについて、

$$\nabla \cdot \{\mathbf{U} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{U})\}$$

の値を求めよ。ここで \mathbf{r} は位置ベクトルである。

3-2. 直交直線座標系中の 3 次元ベクトル場 $\mathbf{V} = (2x^2 - y^2, y^2 - 2xy, -2xz - 2yz)$ について

$$\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

を求めよ。ただし、 S は原点を中心とする半径 1 の球面であり、 \mathbf{n} は S 表面における外向き法線ベクトルである。

3-3. $\nabla \times \mathbf{W} = 0$ を満たす 3 次元ベクトル場 \mathbf{W} を考える。空間中の 2 点 \mathbf{r}_1 と \mathbf{r}_2 を結ぶ経路で \mathbf{W} の線積分を考えたとき、その値は経路のとり方によらないことを示せ。

問 4 x を実数、 z を複素数、 a を実定数として、以下の間に答えよ。

4-1. $\cosh z = 0$ を満たす複素数 z を求めよ。

4-2. 複素関数 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2 + a^2)}$ のすべての極と、それぞれの極における留数を求めよ。

4-3. 前問の結果を使って以下の実積分の値を求めよ。

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2 + a^2)} dx.$$

問題 VI

以下の問に答えよ。解答にあたっては結果だけでなく、導出過程についても記すこと。

問 1 地球から恒星までの距離について考える。以下の問に答えよ。

1-1. 1 pc (パーセク) の定義を説明せよ。

1-2. 地球から比較的近い位置にある恒星について、地球から恒星までの距離 d pc を推定する手法を図・式を適宜用いつつ説明せよ。

1-3. 地球から遠い位置にある恒星については、恒星の明るさを用いて距離を推定する手法がとられる。 m 等級の恒星 A の見かけの明るさを F_m 、 n 等級の恒星 B の見かけの明るさを F_n とすると、それらには

$$n - m = \frac{5}{2} \log_{10} \left(\frac{F_m}{F_n} \right) \quad (1)$$

という関係が存在する。いま、恒星 A が恒星 B より 100 倍明るく見えるとき、何等級の差があるか (1) 式を用いて求めよ。

1-4. ある恒星 C を違う距離から観測する場合を考える。恒星 C を 10 pc および d pc 離れた場所から観測したときのそれぞれの明るさを F_1 、 F_2 とする。明るさの比 (F_1/F_2) を数式で表せ。

1-5. 恒星を 10 pc の距離から観測した場合の等級を絶対等級という。距離 d pc にある恒星 C を地球から観測したときのみかけの等級を m_c 、絶対等級を M_c としたとき、距離 d を m_c と M_c を用いて表せ。

1-6. 恒星 C の特徴を調べたところ、みかけの等級は $m_c = 0.96$ で、スペクトル型は M 型に分類される超巨星であった。図 1 に示す HR 図中の (ア) ~ (カ) からこの恒星 C に当てはまるものを 1 つ選び出し、地球から恒星 C までの距離 d pc を有効数字 2 桁で求めよ。必要であれば表 1 に示す対数表を用いてよい。

問 2 熱平衡状態にあるプラズマについて考える。以下の問に答えよ。

2-1. 多くのプラズマ粒子のみが存在する閉じた系において、「熱平衡状態」とはどのような状態であるか説明せよ。

2-2. 一次元空間に存在するプラズマ粒子を考える。 x 軸方向の速度を v 、プラズマ粒子の質量を m 、ボルツマン定数を k 、熱平衡温度を T とすると、速度分布関数 $f(v)$ は定数 A を用いて

$$f(v) = A \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) \quad (2)$$

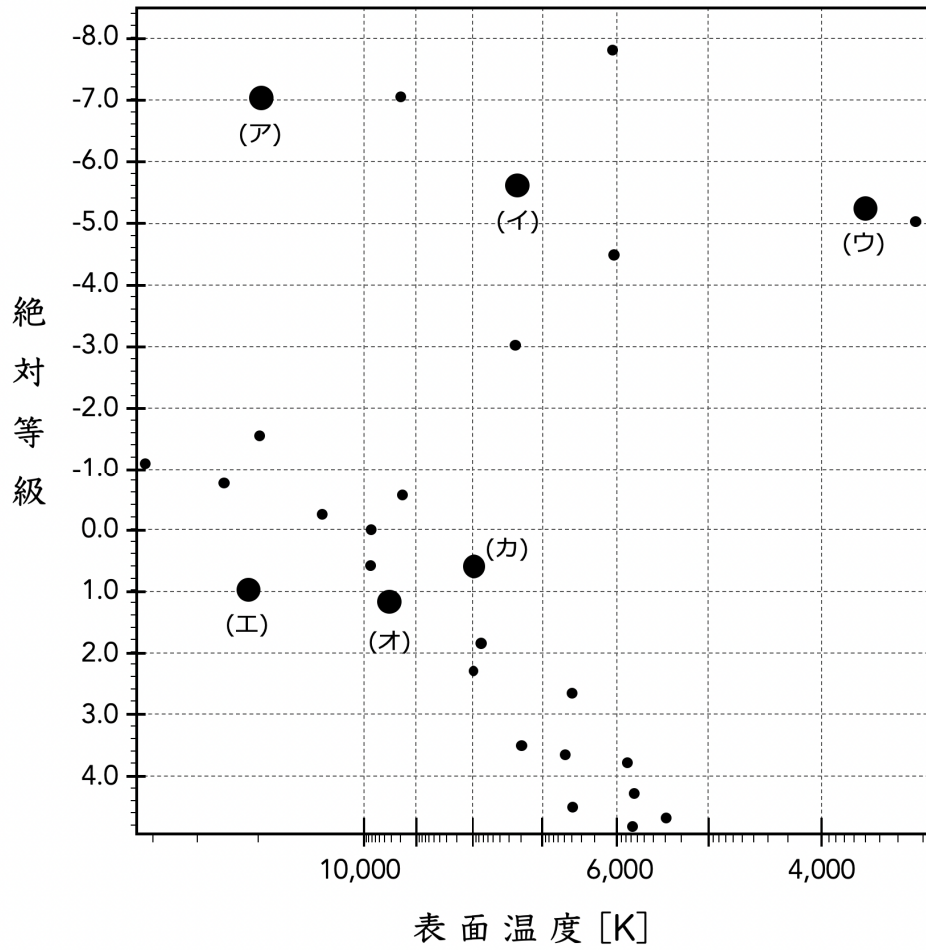


図1 HR図

表1 対数表

x	$\log_{10} x$	x	$\log_{10} x$	x	$\log_{10} x$	x	$\log_{10} x$	x	$\log_{10} x$	x	$\log_{10} x$
7.94	0.900	10.0	1.00	158	2.20	200	2.30	251	2.40	316	2.50
8.13	0.910	10.2	1.01	162	2.21	204	2.31	257	2.41	324	2.51
8.32	0.920	10.5	1.02	166	2.22	209	2.32	263	2.42	331	2.52
8.51	0.930	10.7	1.03	170	2.23	214	2.33	269	2.43	339	2.53
8.71	0.940	11.0	1.04	174	2.24	219	2.34	275	2.44	347	2.54
8.91	0.950	11.2	1.05	178	2.25	224	2.35	282	2.45	355	2.55
9.12	0.960	11.5	1.06	182	2.26	229	2.36	288	2.46	363	2.56
9.33	0.970	11.7	1.07	186	2.27	234	2.37	295	2.47	371	2.57
9.55	0.980	12.0	1.08	191	2.28	240	2.38	302	2.48	380	2.58
9.77	0.990	12.3	1.09	195	2.29	245	2.39	309	2.49	389	2.59

と表せる。また数密度 N は

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv \quad (3)$$

で与えられる。このとき、定数 A を m 、 k 、 T を用いて表せ。

- 2-3.** 2-2 において、速度分布関数 $f(v)$ の大きさが A/e となるときの速度 v を求めよ。
- 2-4.** 一次元空間において、プラズマの平均運動エネルギー (E_{av}) は $E_{av} = \frac{1}{2}kT$ となることを証明せよ。
- 2-5.** 温度 T_1 と T_2 ($T_1 > T_2$) のそれぞれで熱平衡状態にある二種のプラズマが一次元空間に存在するとき、それぞれの速度分布関数 $f(v)$ はどのような形状となるか、図示せよ。ただし、どちらのプラズマの数密度も $N = N_0$ とする。
- 2-6.** 一般的にプラズマは電子とイオンが混合し、電気的中性の状態にある。しかし、何らかの擾乱を受けたとき電子は空間的に変位し (図 2)、一時的に分極した状態となる。この状況における電子の数密度 n を、平均値 n_0 と微小変化量 n_δ とで $n(\mathbf{r}, t) = n_0 + n_\delta(\mathbf{r}, t)$ と表す ($\mathbf{r} = (x, y, z)$ は位置ベクトル、 t は時間)。また、変位する速度を $\mathbf{v}_\delta(\mathbf{r}, t)$ 、生じた電場を $\mathbf{E}_\delta(\mathbf{r}, t)$ とする。このとき、①電子密度に対する連続の式、②電子の運動方程式、③電場に対する Gauss の法則の式をそれぞれ書き下せ。ただし、図 2 の系には電場による力しか働いていないとし、素電荷を q 、電子の質量を m_e 、真空の誘電率を ϵ_0 とせよ。

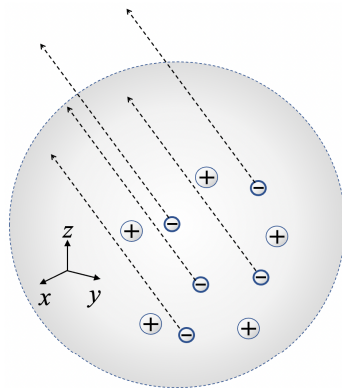


図 2 ある空間におけるイオンと電子の分布

- 2-7.** 2-6 から電子密度の微小変化量 n_δ に関する微分方程式を導き、この微分方程式の振動解が $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 q^2}{\epsilon_0 m_e}}$ という角周波数を持つことを示せ。
- 2-8.** 地表から 100 km 以上の高度には電子が多数存在し、2-7 で表される振動を絶えず行っている。高度 120 km における電子密度を 1.61×10^{11} 個/m³ としたとき、この高度の電子の角周波数 ω_p を有効数字 2 桁で求めよ。ただし、電子の質量は $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg、真空の誘電率は $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m である。