摩擦方程式への応用

前節では様々なスキームを振動方程式に適用し, その安定性を考察した. 本節では様々なスキームを摩擦方程式に適用し, その安定性を考察する. 摩擦方程式は以下のように表される.

$$\frac{dU}{dt} = -\kappa U, \qquad U = U(t), \qquad \kappa > 0. \tag{1}$$

例) 熱伝導方程式

熱伝導方程式は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \sigma > 0, \tag{2}$$

と表される. ここで,

$$u(x,t) = \mathrm{Re}[U(t)e^{ikx}] \tag{3}$$

とおくと,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\sigma k^2 U. \tag{4}$$

これは (1) 式において, $\kappa = \sigma k^2$ とした場合に等しい. (1) 式の一般解は,

$$U(t) = U(0)e^{-\kappa t}. \tag{5}$$

よって, 実部も虚部も時間の経過とともに指数的に減少する.

反復しない 1 段階スキーム

それでは, 様々なスキームを (1) 式に適用したときの性質を, 再びフォンノイマン法を用いて調べてみる.

まず, 反復しない 1 段階スキーム, 時間差分スキームの (9) 式を摩擦方程式に適用すると,

$$U^{n+1} = U^n - \kappa \Delta t(\alpha U^n + \beta U^{n+1}) \tag{6}$$

となる. $K \equiv \kappa\Delta t$ と定義すると,

$$U^{n+1} = U^n - K(\alpha U^n + \beta U^{n+1}). \tag{7}$$

U^{n+1} について解くと,

$$U^{n+1} = \frac{1-\alpha K}{1+\beta K} U^n \tag{8}$$

となる.

オイラースキーム

オイラースキームの場合, (8) 式において, $\alpha = 1, \beta = 0$ である. よって, (8) 式は,

$$U^{n+1} = (1-K)U^n. \tag{9}$$

フォンノイマンの安定性条件は $\lambda \leq 1$ であったので,

$$|1-K| \leq 1, \tag{10}$$

すなわち,

$$0 < K \leq 2 \tag{11}$$

がオイラースキームを摩擦方程式にあてはめた場合の安定性条件となる. ただし, $\lambda = 1 - K$ であるので, 解を振動させないためには $K < 1$ とする必要がある. 振動方程式にオイラースキームをあてはめた場合の安定性条件は $p \ll 1$ であった. したがって, 同じスキームを用いた場合でも, 対象となる方程式が異なれば安定性の条件もまた異なることがわかる.

後退差分スキーム

後退差分スキームの場合 $\alpha = 0, \beta = 1$ なので, (8) 式は,

$$U^{n+1} = \frac{1}{K+1} U^n. \tag{12}$$

よって, 安定性条件は,

$$\left|\frac{1}{1+K}\right| \leq 1, \tag{13}$$

すなわち,

$$0 < K \tag{14}$$

に対して後退差分スキームは常に安定であり, 解は振動しない.

台形スキーム

台形スキームの場合 $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$ なので, (8) 式は,

$$U^{n+1} = \frac{1 - \frac{1}{2}K}{1 + \frac{1}{2}K} U^n. \tag{15}$$

よって安定性条件は,

$$\left| \frac{1 - \frac{1}{2}K}{1 + \frac{1}{2}K} \right| \leq 1, \tag{16}$$

$$0 \leq K. \tag{17}$$

ゆえに, $0 \leq K$ に対して台形スキームは安定である. また, (15) 式より, 解が振動しない条件は $K \leq 2$ である.

反復する 1 段階スキーム

次に, 反復する 1 段階スキームを考える. 反復する 1 段階スキームは (18) 式, (19) 式で表される. 今, $f^n = -\kappa U^n$ なので,

$$U^{(n+1)^*} = U^n - \kappa \Delta t U^n, \tag{18}$$

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= U^n + \Delta t \{\kappa \alpha U^n + \beta(-\kappa)(U^n - \kappa \Delta t U^n)\} && (19)\\ &= U^n - \kappa \Delta t \alpha U^n + (\kappa \Delta t)^2 \beta U^n - \kappa \Delta t \beta U^n && (20)\\ &= \{1 - \kappa \Delta t(\alpha + \beta) + (\kappa \Delta t)^2 \beta\} U^n && (21)\\ &= \{1 - \kappa \Delta t + (\kappa \Delta t)^2 \beta\} U^n && (22)\\ &= (1 - K + K^2 \beta) U^n. && (23) \end{aligned}$$

ゆえに, 松野スキームもホインスキームも, 十分小さい K に対して安定となる.

2 段階スキーム

最後に, 2 段階スキームについて考える.

リープフロッグスキーム

(1) 式にリープフロッグスキームを適用すると,

$$\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t} = \kappa U^n, \tag{24}$$

ゆえに,

$$U^{n+1} = U^{n-1} - 2\Delta t \kappa U^n. \tag{25}$$

ここで, 増幅係数 λ を導入すると,

$$U^{n+1} = U^{n-1} - 2\Delta t\kappa U^n, \tag{26}$$

$$\lambda^2 U^{n-1} = U^{n-1} - 2\Delta t\kappa\lambda U^{n-1}, \tag{27}$$

$$\lambda^2 = 1 - 2K\lambda, \tag{28}$$

$$\lambda^2 + 2K\lambda - 1 = 0. \tag{29}$$

この λ についての 2 次方程式を解くと,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -K + \sqrt{1+K^2}, \\ \lambda_2 &= -K - \sqrt{1+K^2}. \end{aligned} \tag{30}$$

$K \to 0$ のとき, $\lambda_1 \to 1$, $\lambda_2 \to -1$ となる. したがって, λ_1 が物理モードに対応し, λ_2 が計算モードに対応する. $K > 0$ すなわち, 通常の時間積分に対して $\lambda_2 < -1$ なので, 計算モードは常に不安定である. つまり時間ステップごとに解は形をかえ, 大きさは増大してしまう. 前に述べたとおり, 計算モードを完全に取り除くことは難しいうえに, 無視することもできないほどの大きさである. よって, 摩擦方程式に対してリープフロッグスキームは常に不安定である.

アダムス-バッシュフォーススキーム

アダムス-バッシュフォーススキームは,

$$U^{n+1} = U^n - \kappa\Delta t\left(\frac{3}{2}U^n - \frac{1}{2}U^{n-1}\right) \tag{31}$$

と表される. リープフロッグスキームの場合と同様に増幅係数を導入し, $K \equiv \kappa\Delta t$ とおけば,

$$\lambda^2 = \lambda - \frac{3}{2}K\lambda + \frac{1}{2}K, \tag{32}$$

$$\lambda^2 - \left(1 - \frac{3}{2}K\right)\lambda - \frac{1}{2}K = 0. \tag{33}$$

この λ に関する 2 次方程式を解くと,

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2}K \pm \sqrt{1 - K + \frac{9}{4}K^2}\right) \tag{34}$$

を得る. ゆえに, アダムス-バッシュフォーススキームの場合, K が十分小さければ常に安定であり, 計算モードは減衰する.

複数のスキームを組み合わせた場合

例えば, 振動方程式と摩擦方程式を組み合わせたような式, すなわち,

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U - \kappa U \tag{35}$$

という式を数値計算したい場合はどうすればよいだろうか. 振動項 $i\omega U$ に有効なリープフロッグスキームをもちいたいところではある. しかしながら, リープフロッグスキームは先ほど調べたように摩擦項 $-\kappa U$ に対して用いることはできない. この様な場合, 異なるスキームをそれぞれ別の項に適用することができる. すなわちこの例でいえば, 振動項に対してはリープフロッグスキームを, 摩擦項に対してはオイラースキームをそれぞれ用いればよい. すると,

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2\Delta t(i\omega U^n - \kappa U^{n-1}) \tag{36}$$

となる. 他のスキームの組み合わせももちろん可能である[1)].

参考文献

Mesinger, F., and Arakawa, A., 1976, Numerical methods used in atmospheric models, GARP Publications series (World Meteorological Organization), No. 17, Part 1., 64 pp

石岡 圭一, 2004,「スペクトル法による数値計算入門」, 東京大学出版会, ISBN:4130613057

竹野 茂治, 2009,「勾配から角度を求める展開式」
URL:http://takeno.iee.niit.ac.jp/\~{}shige/math/lecture/basic3/data/arctan1.pdf

KIT 数学ナビゲーション, 2007,「微分 arctanx」
URL:http://w3e.kanazawa-it.ac.jp/math/category/bibun/keisan/henkan-tex.cgi?target=/math/category/bibun/keisan/diff-arctan.html

[1)] dcpam では水平拡散およびスポンジ層における減衰項には後方差分を用いていて，ほかにはリープフロッグを用いている．