

Asselin (1972) の時間フィルター

吉川 鳩真

2025 年 03 月 05 日

本稿では、大気・海洋の数値モデルにおいてよく用いられている Asselin (1972) の時間フィルターについて解説する。

1 はじめに: Robert (1966) の時間フィルター

Asselin (1972) の時間フィルターは Robert (1966) の時間フィルターに基づいて考案されたものである。Robert (1966) の時間フィルターは以下のようなものである。常微分方程式

$$\frac{dU}{dt} = f(U, t)$$

をリープ・フロッグスキームを用いて差分化すると、

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2\Delta t f(U^n, n\Delta t) \quad (1)$$

と表される。ここで Δt は時間格子間隔, $U^n = U(n\Delta t)$ である。これを基に Robert (1966) は以下のようなスキームを考案した。

$$U^{n+1,*} = U^{n-1} + 2\Delta t f(U^{n,*}, n\Delta t), \quad (2)$$

$$U^n = U^{n,*} + 0.01(U^{n+1,*} - 2U^{n,*} + U^{n-1}). \quad (3)$$

上付き添字 * はフィルターをかける前の値であることを表す。

Robert (1966) がこのようなフィルターを考案した目的は、摩擦項を含むプリミティブ方程式を安定に計算することであった。そこで摩擦方程式に上記のスキームを当てはめた場合の数値解の振舞いを、フォン・ノイマン法を用いて調べる。

まず式(1)を用いて摩擦方程式を差分化すると,

$$U^{n+1} = U^{n-1} - 2\alpha\Delta t U^n \quad (4)$$

となる. 増幅係数を $\lambda \equiv U^{n+1}/U^n$ と定義すると, λ の満たす方程式は

$$\lambda^2 + 2\alpha\Delta t\lambda - 1 = 0.$$

したがって

$$\lambda_{\pm} = \alpha\Delta t \pm \sqrt{1 + (\alpha\Delta t)^2} \quad (5)$$

となる. λ_+ が物理モード, λ_- が計算モードに対応する. 明らかに物理モードの増幅係数の絶対値は 1 より大きくなるので, 数値解は不安定である.

次に Robert (1966) のスキームを用いて摩擦方程式を差分化する. 式(3)を作用する前後での数値解の比を $\mu = U^n/U^{n,*}$ と定義すると,

$$\mu U^{n,*} = U^{n,*} + 0.01(U^{n+1,*} - 2U^{n,*} + \mu U^{n-1,*})$$

である. 摩擦方程式の解 $U^{n,*} = U_0 e^{-\alpha n \Delta t}$ を代入すると,

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1 + 0.01(e^{-\alpha \Delta t} - 2)}{1 - 0.01e^{\alpha \Delta t}} \\ &\approx \frac{1 + 0.01(1 - \alpha \Delta t - 2)}{1 - 0.01(1 + \alpha \Delta t)} \\ &= \frac{1 - 0.01(1 + \alpha \Delta t)}{1 - 0.01(1 + \alpha \Delta t)} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (6)$$

$e^x \approx 1 + x$ とおくと 1 になった. ここで $\alpha \Delta t \ll 1$ として近似を行った. よって, フィルターの前後で U の値は変わらないことになるが, それではフィルターの意味がない. (数値解の不安定性は抑制されない.) よってこの計算は間違っていると思われるが, よくわからない. 詳しくは Robert(1965) を参照する必要がある.¹

2 Asselin (1972) の時間フィルター

Asselin (1972) は Robert (1966) で用いられたフィルターを一般化した

$$U^n = U^{n,*} + 0.5\nu(U^{n+1,*} - 2U^{n,*} + U^{n-1}) \quad (7)$$

をリープ・フロッグスキームで離散化された振動方程式において, 計算モードと高周波の物理モードを減衰させるために用いることを提案した.

¹ 1 次近似だと近似が粗すぎるため, 結果として増幅係数が 1 になってしまふが, より高次の項まで考慮すれば, 増幅係数は 1 より小さくなり, 数値解の不安定性は抑制される. 具体的な計算式の記述については 2025 年度以降に引き継ぐ. (2025/03/05)

2.1 基本的な性質

式(7)のフィルターを振動方程式に適用した際の基本的な性質は、振動方程式

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U \quad (8)$$

の厳密解 $U^* = U_0 e^{i\omega t}$ と、それにフィルターを作用させた解 U との比 $\mu \equiv U/U^*$ を考察することである程度把握することができる。式(7)において $U^{n,*} = U_0 e^{i\omega n \Delta t}$, $U^n = \mu U^{n,*}$ を代入すると、

$$\mu e^{i\omega n \Delta t} = e^{i\omega n \Delta t} + 0.5\nu(e^{i\omega(n+1)\Delta t} - 2e^{i\omega n \Delta t} + \mu e^{i\omega(n-1)\Delta t}). \quad (9)$$

$$\mu = 1 + 0.5\nu(e^{i\omega \Delta t} - 2 + \mu e^{-i\omega \Delta t}). \quad (10)$$

これを μ について解くと、

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1 + 0.5\nu(e^{i\omega \Delta t} - 2)}{1 - 0.5\nu e^{-i\omega \Delta t}} \\ &= \frac{1 + 0.5\nu(e^{i\omega \Delta t} - 2)}{1 - 0.5\nu \cos \omega \Delta t + 0.5\nu i \sin \omega \Delta t} \\ &= \frac{\{1 + 0.5\nu(e^{i\omega \Delta t} - 2)\}(1 - 0.5\nu \cos \omega \Delta t - 0.5\nu i \sin \omega \Delta t)}{(1 - 0.5\nu \cos \omega \Delta t)^2 + (0.5\nu)^2 \sin^2 \omega \Delta t} \\ &= \frac{\{1 + 0.5\nu(e^{i\omega \Delta t} - 2)\}(1 - 0.5\nu e^{i\omega \Delta t})}{1 - \nu \cos \omega \Delta t + (0.5\nu)^2 \cos^2 \omega \Delta t + (0.5\nu)^2 \sin^2 \omega \Delta t} \\ &= \frac{1 - 0.5\nu e^{i\omega \Delta t} + 0.5\nu(e^{i\omega \Delta t} - 2) - (0.5\nu)^2 e^{i\omega \Delta t}(e^{i\omega \Delta t} - 2)}{1 - \nu \cos \omega \Delta t + (0.5\nu)^2} \\ &= \frac{1 - \nu - (0.5\nu)^2 e^{i\omega \Delta t}(e^{i\omega \Delta t} - 2)}{1 - \nu \cos \omega \Delta t + (0.5\nu)^2} \\ &= \frac{4 - 4\nu - \nu^2 e^{2i\omega \Delta t} + 2\nu^2 e^{i\omega \Delta t}}{4 - 4\nu \cos \omega \Delta t + \nu^2} \\ &= \frac{(2 - \nu)^2 - \nu^2 - \nu^2 e^{2i\omega \Delta t} + 2\nu^2 e^{i\omega \Delta t}}{(2 - \nu)^2 + 4\nu(1 - \cos \omega \Delta t)} \\ &= \frac{(2 - \nu)^2 + \nu^2 e^{i\omega \Delta t}(-e^{-i\omega \Delta t} - e^{i\omega \Delta t} + 2)}{(2 - \nu)^2 + 4\nu(1 - \cos \omega \Delta t)} \\ &= \frac{(2 - \nu)^2 + 2\nu^2(1 - \cos \omega \Delta t)e^{i\omega \Delta t}}{(2 - \nu)^2 + 4\nu(1 - \cos \omega \Delta t)} \\ &= R(\nu, \omega) e^{i\delta(\nu, \omega)}. \end{aligned} \quad (11)$$

ここで

$$R(\nu, \omega) \equiv \frac{\sqrt{[(2 - \nu)^2 + 2\nu^2(1 - \cos \omega \Delta t) \cos \omega \Delta t]^2 + [2\nu^2(1 - \cos \omega \Delta t) \sin \omega \Delta t]^2}}{(2 - \nu)^2 + 4\nu(1 - \cos \omega \Delta t)} \quad (12)$$

$$\delta(\nu, \omega) \equiv \tan^{-1} \left(\frac{2\nu^2(1 - \cos \omega \Delta t) \sin \omega \Delta t}{(2 - \nu)^2 + 2\nu^2(1 - \cos \omega \Delta t) \cos \omega \Delta t} \right) \quad (13)$$

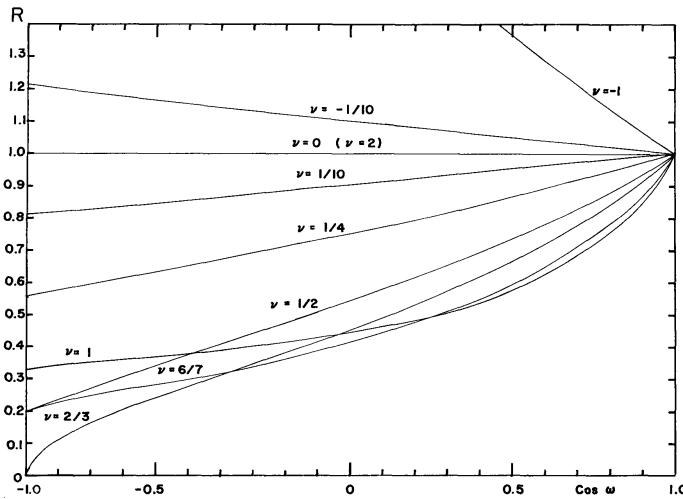


FIGURE 1.—Amplitude response due to application of the time filter to a periodic function for a few values of the filter coefficient. The response of a conventional centered filter is a straight line with intercepts $1-\nu$ at $\cos \omega=0$ and 1 at $\cos \omega=1$.

図 1: 時間フィルターのフィルター係数のグラフ. 縦軸は振幅の変調, 横軸は周期関数である. 図には横軸は $\cos \omega$ となっているが, 本文中の $\cos \omega \Delta t$ のことである.

である. R はフィルターによる振幅の変調, δ は位相のずれを表す. ν をパラメータとし, R, δ を $\cos \omega \Delta t$ の関数として図示したものが図 1 と図 2 である.

- $0.5 \leq \nu \leq 1$ の範囲では, R の $\cos \omega \Delta t$ に対する変化の様子はあまり ν の値によらない.
- 振動数が大きいほど解析解に比べ位相は早く進む. $\nu = 0.25$ になると位相のずれはほとんどなくなる.

3 振動方程式への適用

次に実際に式(8)を離散化した式に時間フィルター(7)を適用した場合の数値解の振舞いについて考察する. 実際の問題への応用を考慮し, 式(8)における振動数は低周波成分 ω_L と高周波成分 ω_H の重ね合わせで表されるとする.

$$\frac{dU}{dt} = i(\omega_L + \omega_H)U \quad (14)$$

そして低周波成分に対してはリープフロッグスキーム, 高周波成分に対しては陰的な時間差分スキームである台形スキームを用いて離散化する.

$$\frac{U^{n+1,*} - U^{n-1,*}}{2\Delta t} = i\omega_L U^{n,*} + i\omega_H \frac{U^{n+1,*} + U^{n-1,*}}{2}.$$

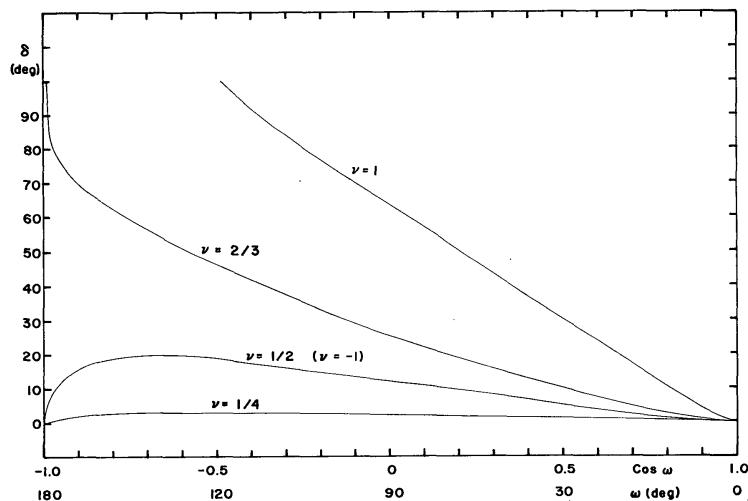


FIGURE 2.—Phase increase due to application of the time filter to a periodic function for a few values of the filter coefficient.

図 2: 時間フィルターのフィルター係数のグラフ. 縦軸は位相のずれ, 横軸は周期関数である.

ここで時刻 $(n-1)\Delta t$ における数値解には時間フィルター (7) がかけられているとすると,

$$\frac{U^{n+1,*} - U^{n-1}}{2\Delta t} = i\omega_L U^{n,*} + i\omega_H \frac{U^{n+1,*} + U^{n-1}}{2} \quad (15)$$

となる.

增幅係数 λ を $\lambda \equiv U^{n+1,*}/U^{n,*}$ と定義し, 式(15), (7) から λ を求めると以下のよう

になる².

$$\lambda_{\pm} = \frac{\nu + 2i\omega_L \Delta t \pm \sqrt{(\nu - 2)^2 + 4(\omega \Delta t)^2(1 - \nu) + 4\omega \omega_L (\Delta t)^2(\nu - 2)}}{2(1 - i\omega_H \Delta t)}. \quad (16)$$

3.1 台形スキームの場合

$\omega_L = 0$ として台形スキームを用いた場合について考察する。このとき増幅係数は式(16)に $\omega_L = 0$ を代入して

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 + i\omega \Delta t}{1 + (\omega \Delta t)^2} \left(\frac{\nu}{2} \pm \sqrt{1 + (\omega \Delta t)^2 + \frac{\nu^2}{4} - \nu(1 + (\omega \Delta t)^2)} \right) \quad (17)$$

となる。 $\nu \leq 1$ の場合、根号の中の関数の符号は必ず正となるため、位相のずれ

$$\delta \equiv \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}[\lambda_{\pm}]}{\text{Re}[\lambda_{\pm}]} \right) = \tan^{-1}(\omega \Delta t)$$

は ν に依存しなくなる。また、根号の中の関数は

$$\begin{aligned} & 1 + (\omega \Delta t)^2 + \frac{\nu^2}{4} - \nu(1 + (\omega \Delta t)^2) \\ &= \left(\sqrt{1 + (\omega \Delta t)^2} \mp \nu/2 \right)^2 \pm \nu \sqrt{1 + (\omega \Delta t)^2} - \nu(1 + (\omega \Delta t)^2) \\ &< \left(\sqrt{1 + (\omega \Delta t)^2} \mp \nu/2 \right)^2 \end{aligned}$$

であることから、 $\omega > 0, \nu > 0$ の場合の増幅係数の絶対値 $|\lambda_{\pm}|$ は

$$|\lambda_{\pm}| < 1$$

となる。

3.2 リープフロッグスキームの場合

次に $\omega_H = 0$ としてリープフロッグスキームを用いた場合について考察する。このとき増幅係数は式(16)に $\omega_H = 0$ を代入して

$$\lambda_{\pm} = \frac{\nu}{2} + i\omega \Delta t \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)^2 - (\omega \Delta t)^2} \quad (18)$$

となる。

² 詳しい導出は付録を参照。

$\omega\Delta t \leq 1 - \nu/2$ の場合,

$$|\lambda_{\pm}|^2 = (\nu/2)^2 + (1 - \nu/2)^2 - (\omega\Delta t)^2 \pm \nu\sqrt{(1 - \nu/2)^2 - (\omega\Delta t)^2} + (\omega\Delta t)^2 \quad (19)$$

$$= (\nu/2)^2 + (1 - \nu/2)^2 \pm \nu\sqrt{(1 - \nu/2)^2 - (\omega\Delta t)^2} \quad (20)$$

$$\leq (\nu/2)^2 + (1 - \nu/2)^2 \pm \nu\sqrt{(1 - \nu/2)^2} \quad (21)$$

$$= (\nu/2 \pm (1 - \nu/2))^2 \quad (22)$$

$$= \begin{cases} 1 \\ (\nu - 1)^2 \end{cases} \quad (23)$$

となり, $0 < \nu < 2$ であれば $|\lambda_{\pm}| \leq 1$ である.

一方 $\omega^2 > (1 - \nu/2)^2$ となって式(18)の根号の中の関数の符号が負になる場合,

$$|\lambda_{\pm}|^2 = \left(\frac{\nu}{2}\right)^2 + \left(\omega\Delta t + \sqrt{(\omega\Delta t)^2 - \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)^2}\right)^2 \quad (24)$$

から $|\lambda_{\pm}| \leq 1$ となる条件として、

$$(\omega\Delta t)^2 + (\omega\Delta t)\sqrt{(\omega\Delta t)^2 - (1 - \nu/2)^2} - (1 - \nu/2) < 0 \quad (25)$$

が得られる. $\nu = 1$ の場合にこれを満たす $\omega\Delta t$ は $\omega\Delta t < 0.57$ の範囲にある.

付録

式(15), (7) から λ を求める. λ と μ を用いて、式(15)を変形すると、

$$\frac{\lambda^2 U^{n-1,*} - \mu U^{n-1,*}}{2\Delta t} = i\omega_L \lambda U^{n-1,*} + i\omega_H \frac{\lambda^2 U^{n-1,*} + \mu U^{n-1,*}}{2}, \quad (26)$$

$$\frac{\lambda^2 - \mu}{2\Delta t} = i\omega_L \lambda + i\omega_H \frac{\lambda^2 + \mu}{2}, \quad (27)$$

$$\left(\frac{1}{2\Delta t} - i\omega_H \frac{1}{2}\right) \lambda^2 - i\omega_L \lambda - \left(\frac{1}{2\Delta t} + i\omega_H \frac{1}{2}\right) \mu = 0. \quad (a)$$

また、式(7)は、

$$\mu \lambda U^{n-1,*} = \lambda U^{n-1,*} + 0.5\nu(\lambda^2 U^{n-1,*} - 2\lambda U^{n-1,*} + \mu U^{n-1,*}), \quad (28)$$

$$\mu = \frac{\lambda + 0.5\nu(\lambda^2 - 2\lambda)}{\lambda - 0.5\nu}, \quad (29)$$

$$= \frac{\lambda(2 + \nu(\lambda - 2))}{2\lambda - \nu}. \quad (30)$$

式(a)に代入すると,

$$\left(\frac{1}{2\Delta t} - i\omega_H \frac{1}{2} \right) \lambda^2 - i\omega_L \lambda - \left(\frac{1}{2\Delta t} + i\omega_H \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\lambda(2 + \nu(\lambda - 2))}{2\lambda - \nu} \right) = 0, \quad (31)$$

$$\left(\frac{1}{2\Delta t} - i\omega_H \frac{1}{2} \right) (2\lambda - \nu)\lambda - i\omega_L(2\lambda - \nu) - \left(\frac{1}{2\Delta t} + i\omega_H \frac{1}{2} \right) \{2 + \nu(\lambda - 2)\} = 0, \quad (32)$$

$$(1 - i\omega_H) \lambda^2 - \left(\frac{1}{2} - i\omega_H \Delta t \frac{1}{2} \right) \lambda\nu - i\omega_L \Delta t (2\lambda - \nu) - (1 + i\omega_H) (1 - \nu) - \left(\frac{1}{2} + i\omega_H \Delta t \frac{1}{2} \right) \lambda\nu = 0, \quad (33)$$

$$(1 - i\omega_H) \lambda^2 - (1 - i\omega_H \Delta t) \lambda\nu - i\omega_L \Delta t (2\lambda - \nu) - (1 + i\omega_H \Delta t) (1 - \nu) = 0, \quad (34)$$

$$(1 - i\omega_H \Delta t) \lambda^2 - (\nu + 2i\omega_L \Delta t) \lambda + i\omega_L \Delta t \nu - (1 + i\omega_H \Delta t) (1 - \nu) = 0. \quad (35)$$

よって,

$$\lambda_{\pm} = \frac{\nu + 2i\omega_L \Delta t \pm \sqrt{(\nu + 2i\omega_L \Delta t)^2 - 4(1 - i\omega_H \Delta t) \{i\omega_L \Delta t \nu - (1 + i\omega_H \Delta t)(1 - \nu)\}}}{2(1 - i\omega_H \Delta t)} \quad (36)$$

平方根の中身は,

$$(\nu + 2i\omega_L \Delta t)^2 - 4(1 - i\omega_H \Delta t) \{i\omega_L \Delta t \nu - (1 + i\omega_H \Delta t)(1 - \nu)\} \quad (37)$$

$$= \nu^2 + 4i\omega_L \Delta t \nu - 4\omega_L^2 \Delta t^2 - 4(1 - i\omega_H \Delta t)i\omega_L \Delta t \nu + 4(1 + \omega_H^2 \Delta t^2)(1 - \nu) \quad (38)$$

$$= (\nu - 2)^2 - 4\Delta t^2(\omega_L^2 - \omega_H^2) - 4\omega_H(\omega_H + \omega_L)\Delta t^2 \nu \quad (39)$$

$$= (\nu - 2)^2 - 4\Delta t^2 \omega(\omega_L - \omega_H) - 4\omega_H \omega \Delta t^2 \nu \quad (40)$$

$$= (\nu - 2)^2 - 4\Delta t^2 \omega(\omega_L - \omega + \omega_L) - 4(\omega - \omega_L)\omega \Delta t^2 \nu \quad (41)$$

$$= (\nu - 2)^2 + 4(\omega \Delta t)^2(1 - \nu) + 4\omega \omega_L \Delta t^2(\nu - 2) \quad (42)$$

$$(43)$$

ここで, $\omega = \omega_L + \omega_L$ としている. よって,

$$\lambda_{\pm} = \frac{\nu + 2i\omega_L \Delta t \pm \sqrt{(\nu - 2)^2 + 4(\omega \Delta t)^2(1 - \nu) + 4\omega \omega_L (\Delta t)^2(\nu - 2)}}{2(1 - i\omega_H \Delta t)}. \quad (44)$$

参考文献

Asselin, R. A., 1972: Frequency filter for time integrations. *Mon. Wea. Rev.*, **100**, 487–490.

Robert, A. J. year: 1966 title: The integration of a low order spectral form of the primitive meteorological equations. *J. Meteor. Soc. Japan*, **44**, 237–245.

Robert, A. J. year: 1965 title: The behaviour of planetary waves in an atmospheric model based on spherical harmonics. *Publication in Meteorology No. 77, McGill University, Montreal, Canada.* pp. 95