一次元移流方程式の数値解法

2 次精度中心差分を用いた線形移流方程式の離散化

1 次元線形移流方程式は以下の様に表される.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

式 (1) の一般解は,

$$u = f(x - ct) \tag{2}$$

である. 最も簡単な離散化は, 時間方向にはオイラースキーム (前進差分), 空間方向には上流差分を用いたものである.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \tag{3}$$

この離散化方法の精度は, 誤差

$$\epsilon \equiv u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t) \tag{4}$$

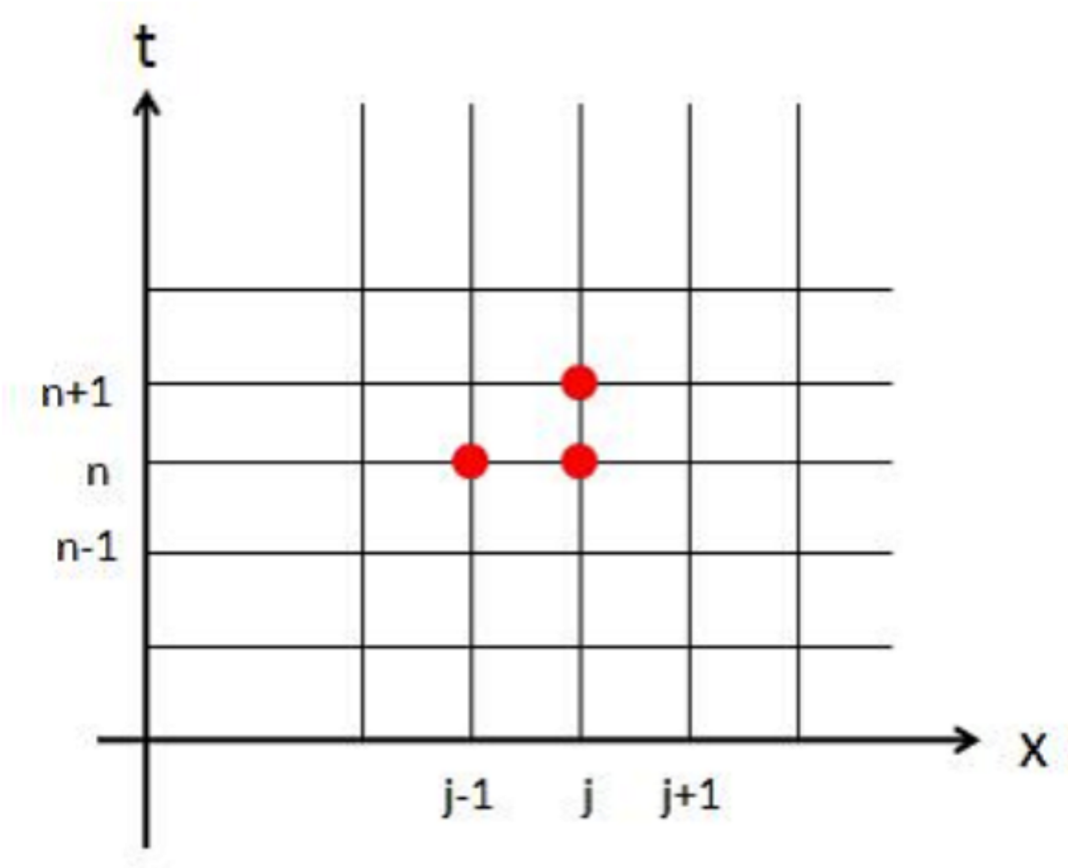

図 1　$t - x$ 平面において, 式 (3) で考えている格子点を示した図. 赤丸で示された点が考えている格子点である.

によって評価することができる. GFD ワークノート「有限差分法の基礎 (1)」での考察より,

$$\epsilon = O(\Delta t, \Delta x) \tag{5}$$

であり, 時間方向, 空間方向共に 1 次精度であることがわかる.

ここで, もう少し精度の良い離散化方法を考えてみる. 空間微分を中心差分を用いて離散化すると,

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -c\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} \tag{6}$$

となる. また, 時間方向にリープフロッグスキームを用いて離散化すると,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = -c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \tag{7}$$

となる. 式 (7) の性質を知るため, u のとある波数成分を取り出して考えることにする. まず, u を以下のように表す.

$$u(x,t) = \mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{\infty} U_k(t) e^{-ikx}\right], \tag{8}$$

$$u_j^n = \mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{\infty} U_k(n\Delta t) e^{-ikj\Delta x}\right] \tag{9}$$

ここで, 式 (7) に式 (9) の u_j^n を代入すると,

$$\begin{aligned}
\frac{U_k^{n+1}e^{-ik(j\Delta x)} - U_k^{n-1}e^{-ik(j\Delta x)}}{2\Delta t} &= -c\frac{U_k^n e^{-ik[(j+1)\Delta x]} - U_k^n e^{-ik[(j-1)\Delta x]}}{2\Delta x} \\
&= -c\frac{U_k^n e^{-ik\Delta x} - U_k^n e^{ik\Delta x}}{2\Delta x} e^{-ik(j\Delta x)} \\
&= c\frac{U_k^n[2i\sin(k\Delta x)]}{2\Delta x} e^{-ik(j\Delta x)}, \\
\frac{U_k^{n+1} - U_k^{n-1}}{2\Delta t} &= i\left[\frac{c}{\Delta x}\sin(k\Delta x)\right] U_k^n
\end{aligned} \tag{10}$$

ここで,

$$p \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x}\sin(k\Delta x)$$

とおくと, 式 (10) は以下のように書き換えられる.

$$
\begin{aligned}
U_k^{n+1} &= U_k^{n-1} + 2i\left[\frac{c}{\Delta x}\Delta t\sin(k\Delta x)\right]U_k^n \\
&= U_k^{n-1} + 2ipU_k^n.
\end{aligned} \tag{11}
$$

また,

$$
\omega \equiv \frac{c}{\Delta x}\sin(k\Delta x) \tag{12}
$$

とおくと, 式 (10) は振動方程式に一致する. リープフロッグスキームを用いた場合の振動方程式の安定性条件は $|p| \le 1$ であるため, これを式 (11) について考えると,

$$
|p| = \left|\frac{c\Delta t}{\Delta x}\sin(k\Delta x)\right| \le 1. \tag{13}
$$

ここで $|\sin(k\Delta x)| \le 1$ であるため,

$$
\begin{aligned}
|p| &\le \left|\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right| \\
&= |c|\frac{\Delta t}{\Delta x} \le 1.
\end{aligned} \tag{14}
$$

式 (14) は CFL 条件と呼ばれる.

高周波成分を用いた安定性の考察

計算が発散してしまわないためには, すべての場合において $|p| \le 1$ が成り立てば良い. よって, $|p|$ が最大となる波数 k の値, 及びそのときの波長を考える. Δx 及び Δt を固定したとき, 式 (11) において $|p|$ が最大となるのは, $\sin(k\Delta x)$ が極値を取るときである. この

条件に当てはまる最小の波数 k の値は $k = \pi/(2\Delta x)$ であり, この波数 k に対応する波長(つまり式 (11) において $|p|$ が最大となる最大の波長) は $2\pi/k = 4\Delta x$ である. これは, 図 2 より, 解像可能な最小の波長の二倍である. また, $|p|$ が最大となる $2\pi/k = 4\Delta x$ よりも短い波長については, 解像可能な最小の波長よりも短くなってしまうため, 波としては計算結果に現れない.

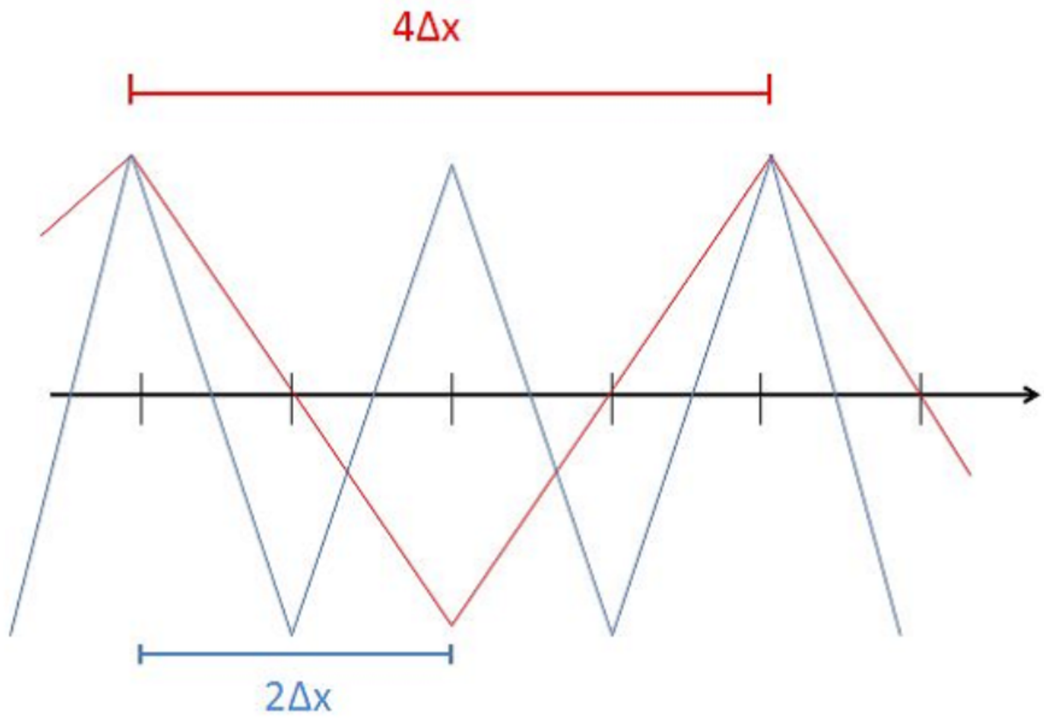

図 2　解像可能な最小の波長を持つ波と, $|p|$ が最大となる波長を持つ波を示した図. 青い線が解像可能な最小の波長を持つ波, 赤い線が式 (11) において $|p|$ が最大となる最大の波長を持つ波を示している. また, 横軸が x 軸, 縦軸が u の値である.