物理モードと計算モードについて

物理モードを U_1 , 計算モードを U_2 とする. それぞれのモードに対する増幅係数を λ_1,λ_2 とする. n ステップ目の数値解 $U_1^{(n)}, U_2^{(n)}$ はそれぞれ,

$$U_1^{(n)} = \lambda_1^n U_1^{(0)}, \tag{1}$$
$$U_2^{(n)} = \lambda_2^n U_2^{(0)} \tag{2}$$

となる. ここで, $U_1^{(0)}, U_2^{(0)}$ は初期値. λ_1, λ_2 は (9.2.19) 式[1)]から,

$$\lambda_1 = \sqrt{1-p^2} + ip, \tag{3}$$
$$\lambda_2 = -\sqrt{1-p^2} + ip \tag{4}$$

となる. $|p| < 1$ の場合を考えると $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ より,

$$\lambda_1 = e^{i\theta}. \tag{5}$$

このときの位相は,

$$\theta = \arctan \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \tag{6}$$

になる. $p > 0, p < 0$ の両方の場合を考えると,

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= e^{i(\pm\pi-\theta)} \\ &= -e^{-i\theta}\end{aligned} \tag{7}$$

となる[2)].

数値解 u_j^n は,

$$u_j^n = \sum_k U_k^n e^{-ik(j\Delta t)} \tag{8}$$

[1)]古い章分けの名残. 現在は資料のファイル分けが変わっているので, 整理してどの資料の式を参照すべきか明らかにする. 2025/11/14 現在の Web ページを見るに, 時間差分スキーム (2) に載っていた.

[2)]詳しくは第 9 章 偏微分方程式の数値解法の基礎 2 (Mesinger and Arakawa,1976: Chapt2) の 2.3 三段階スキームの p17-20 を参照されたい.

と表せる. 解が物理モードのみで構成されるとすると,

$$
\begin{aligned}
u_j^n &= \mathrm{Re}\left[\sum_k U_{1,k}^n e^{-ik(j\Delta x)}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\sum_k U_{1,k}^0 \lambda_1^n e^{-ik(j\Delta x)}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\sum_k U_{1,k}^0 e^{-ik(j\Delta x - \frac{n\theta}{k})}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\sum_k U_{1,k}^0 e^{-ik(j\Delta x - \frac{\theta}{k\Delta t} n\Delta t)}\right].
\end{aligned} \tag{9}
$$

解が計算モードのみで構成されるとしても同様に

$$
\begin{aligned}
u_j^n &= \mathrm{Re}\left[\sum_k U_{2,k}^n e^{-ik(j\Delta x)}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\sum_k U_{2,k}^0 \lambda_2^n e^{-ik(j\Delta x)}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\sum_k (-1)^n U_{2,k}^0 e^{-ik(j\Delta x + \frac{\theta}{k\Delta t} n\Delta t)}\right].
\end{aligned} \tag{10}
$$

(9) 式, (10) 式を解析解のフーリエ表現

$$
u(x,t) = \mathrm{Re}\left[\sum_k U_k^{(0)} e^{-ik(x-ct)}\right] \tag{11}
$$

と比べると, 物理モードの位相速度 c_1 は,

$$
c_1 = \frac{\theta}{k\Delta t}. \tag{12}
$$

計算モードの位相速度 c_2 は,

$$
c_2 = -\frac{\theta}{k\Delta t} \tag{13}
$$

となる. ここで $p = c\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x$ より, $\Delta t \to 0$ の極限では, $\theta \to p$ となり[3], さらに

[3] $\Delta t \to 0$ の極限では,

$$
\begin{aligned}
p &= c\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x \\
&\sim 0
\end{aligned}
$$

$\Delta x \to 0$ の極限を考えると,

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\theta}{k\Delta t} \\
&\sim \frac{p}{k\Delta t} \\
&= \frac{c}{k\Delta x}\sin k\Delta x \\
&\sim c
\end{aligned}
\tag{14}
$$

となる. 同様に求めると,

$$
c_2 = -c. \tag{15}
$$

よって, 物理モードの位相速度は $\Delta t \to 0, \Delta x \to 0$ のとき, c に一致し, 計算モードの位相速度は $\Delta t \to 0, \Delta x \to 0$ のとき, $-c$ となる. 更に (10) 式で $(-1)^n$ がかかっているので, 計算モードは 1 ステップごとに符号を変える.

となって,

$$
\begin{aligned}
\theta &= \arctan\left(\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right) \\
&\sim \arctan\left(p - \frac{1}{2}p^3\right) \\
&\sim p
\end{aligned}
$$

となる.