10.2　数値分散

一次元線形移流方程式を数値的に解くと, 使用する空間差分法によっては「数値分散」という現象が現れる. ここでは数値分散とその仕組みに関して解説する．元の方程式について考える.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{10.2.1}$$

$u(x,t)$ をフーリエ展開し, そのとある波数成分の解,

$$u(x,t) = Re[U(t)e^{ikx}] \tag{10.2.2}$$

について考える. これを (10.2.1) 式に代入すると $U(t)$ の満たす式

$$\frac{dU(t)}{dt} + ikcU(t) = 0 \tag{10.2.3}$$

を得る. この式は振動方程式

$$\frac{dU(t)}{dt} + \nu U(t) = 0$$

と同じ形をしている. 位相速度 c_{ph} は定義から,

$$c_{ph} \equiv \frac{\nu}{k} = \frac{kc}{k} = c.$$

以上のように, 元の式 (連続形の式) では分散性はない. 図 10.2.1 のように，波形を変えずに進んでいく (位相速度は波形によらない).

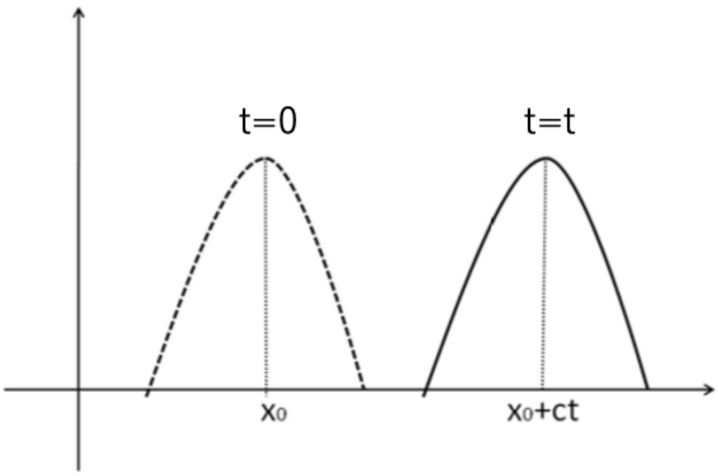

図 10.2.1: 移流方程式の解の例.

次に, 空間微分のみ差分化した式

$$\frac{\partial u_j(t)}{\partial t} + c\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = 0 \tag{10.2.4}$$

について考える. ここで, 空間微分を中心差分で表した (10.2.4) 式の時間微分を適当な方法で差分化すると, 元の (10.2.1) 式の有限差分法が得られる.

ex) オイラー法を用いると

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \tag{10.2.5}$$

(10.2.4) 式は (10.2.5) 式における $\Delta t \to 0$ の極限になっている.

連続形の式 (10.2.1) 式について考察したのと同様に, (10.2.4) 式に対し,

$$u_j(t) = \mathrm{Re}[U_j(t)e^{ikj\Delta x}]$$

を代入する. この時, $U_j(t)$ の満たす式として

$$\frac{dU_j}{dt} + ik\left(c\frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}\right)u_j = 0 \tag{10.2.6}$$

$\nu^* = k\left(c\frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}\right)$ と置くと位相速度 c_{ph}^* は

$$c_{ph}^* = \frac{\nu^*}{k} = c\frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \tag{10.2.7}$$

となる. 位相速度は波数 k に依存するため, (10.2.4) 式の解には分散性がある. 離散化したことにより, 解に分散性が現れることを数値分散とよぶ.
(10.2.4) 式の k 依存性を調べる. $k\Delta x$ が 0 から増加するにつれ c_{ph}^* は単調減少する. 解像可能な最小波長の成分 $(\lambda = 2\Delta x)$ に対し, $c_{ph}^* = 0$ になる. $(k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\Delta x})$

まとめると
・どの波数成分の位相速度も解析値よりも小さい
・$\lambda = 2\Delta x$ の成分の位相速度は 0 (定常波になる)

次に (10.2.7) 式の解の群速度を計算する. 定義から群速度 c_g は

$$c_g = \frac{d\nu}{dk}$$

連続形の式 (10.2.3) 式では $\nu = kc$ なので,

$$c_g \equiv \frac{dkc}{dk} = c$$

となる. 一方,

$$\nu^* = kc^* = k\left(c\frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}\right)$$

より, (10.2.6) 式の解の群速度 c_g^* は

$$\begin{aligned} c_g^* &= \frac{d}{dk}\left(c\frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}\right) \\ &= c\cos k\Delta x \end{aligned} \tag{10.2.8}$$

となる.

$k\Delta x$ が 0 から増加するとともに c_g^* は単調減少し,
$k\Delta x = \frac{\pi}{2}(k = 4\Delta x)$ の時, $c_g = 0$
$k\Delta x = \pi(k = 2\Delta x)$ の時, $c_g = -c$ となる.

群速度の分散性の具体例

図 10.2.2 のような空間的に滑らかな関数 $Y(x)$ を考える. (例えば波長の長い正弦波) $Y(x)$ を空間方向に離散化したものを Y_j とし,

$$Y_j = Y(x)$$

とおく.

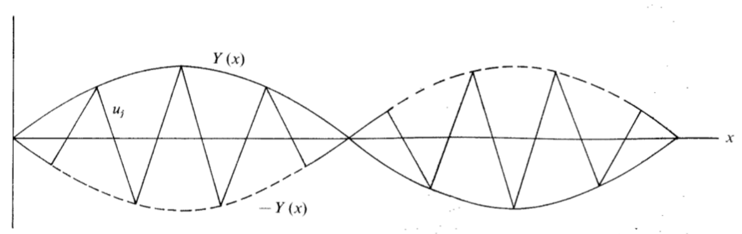

図 10.2.2: 空間的に滑らかな関数の離散化. 原図は Mesinger and Arakawa (1976).

次に Y_j を用いて表される

$$u_j = (-1)^j Y_j \tag{10.2.9}$$

という波を考える. これを (10.2.4) 式

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + c\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = 0$$

へ代入すると,

$$\begin{aligned} (-1)^j \frac{\partial Y_j}{\partial t} + c\frac{(-1)^{j+1} Y_{j+1} - (-1)^{j-1} Y_{j-1}}{2\Delta x} &= 0 \\ \frac{\partial Y_j}{\partial t} - c\frac{Y_{j+1} - Y_{j-1}}{2\Delta x} &= 0 \end{aligned} \tag{10.2.10}$$

したがって, (10.2.9) 式で定義された u_j は $-c$ で移流される.
(x の負の方向に移流される.)

(10.2.4) 式に戻り, その解析解を考える.

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + c\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = 0$$

無次元座標 τ を導入する.

$$\tau = \frac{ct}{\Delta x} \tag{10.2.11}$$

(10.2.4) を $\frac{c}{2\Delta t}$ で割り,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial \left(\frac{c}{2\Delta x}\right)} + (u_{j+1} - u_{j-1}) &= 0 \\ 2\frac{\partial u_j}{\partial \tau} &= u_{j-1}(\tau) - u_{j+1}(\tau) \end{aligned} \tag{10.2.12}$$

(10.2.12) 式は第一種ベッセル関数の満たす漸化式に等しい. [1]j 次の第一種ベッセル関数を J_j と表すと,

$$u_j(\tau) = J_j(\tau) \tag{10.2.13}$$

(10.2.4) 式において $j = 0$ とする点は任意にとることが出来るので一般的には

$$u_j(\tau) = J_{j-p}(\tau)$$

[1]資料は一通り読んだ. 次回はベッセル関数について調べる.

と表される. ここで p は任意の整数である. (10.2.4) は線形方程式なので一般解は,

$$u_j(\tau) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p J_{j-p}(\tau). \tag{10.2.14}$$

$\tau = 0$ のとき, J_0 を除く全ての J_k の値は定義より 0 になる. $J_0(\tau = 0) = 1$ より, $\tau = 0$ を (10.2.14) に代入して,

$$u_j(0) = a_j. \tag{10.2.15}$$

a_j は初期条件 $u_j(0)$ より与えられる. 具体例として次のような初期条件を与えた場合を考える.

$$u_j(0) = \begin{cases} 1(j = 0) \\ 0(j \neq 0) \end{cases}$$

この場合, 解は図 10.2.3 のようになる.

初期条件 $u(x)$ が δ 関数の場合, これをフーリエ余弦展開すると,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^{\infty} a(k) \cos kx dk \\ a(k) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u(x) \cos kx dx \end{aligned}$$

δ 関数は

$$\delta(x) = \begin{cases} 1(x = 0) \\ 0(x \neq 0) \end{cases}$$

より $a(k)$ を数値的に求めると,

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{2}{\pi} u(j\Delta x) \cos k(j\Delta x) \Delta x \\ &= \frac{2}{\pi} u(0) \cos(0) \Delta x \\ &= \frac{2}{\pi} \Delta x \end{aligned}$$

光学のアナロジーからこの様な擾乱は白色雑音 (white noize) と呼ばれる.

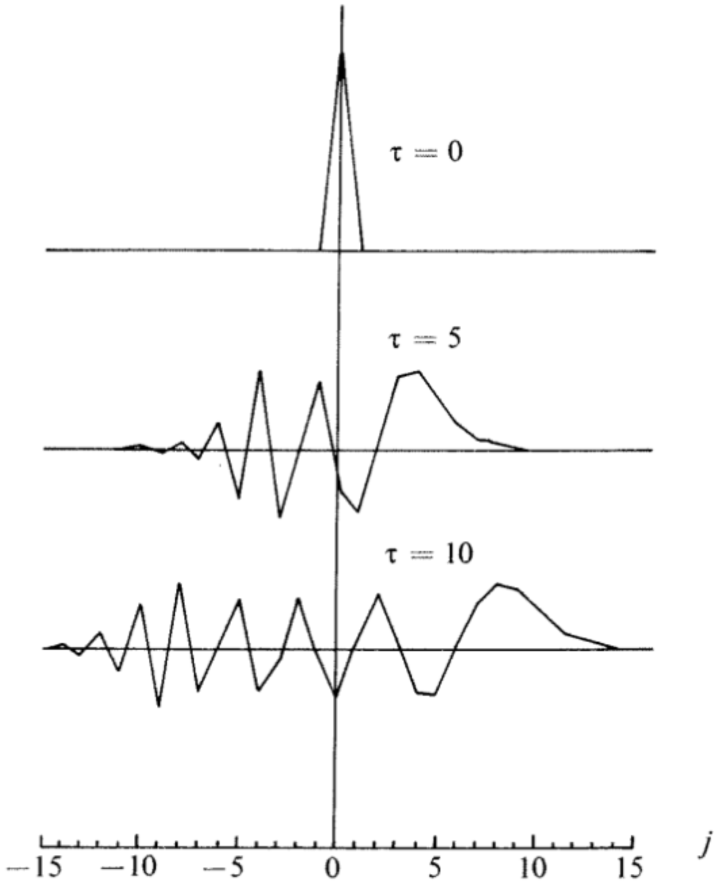

図 10.2.3: 一番上の図を初期条件とした時の (10.2.4) 式の解析解. 原図は Mesinger and Arakawa (1976).