第12章　球面のスペクトル法

[*1]

スペクトル法を用いて偏微分方程式を解く場合, 境界条件に適した展開関数を選ぶ必要がある. 展開関数としては, 直交性を持つ調和関数を用いる.

球座標系で記述された偏微分方程式を解く場合, 展開関数として球面調和関数 (spherical harmonics) を用いる. 以下では球面上の問題を解くことを念頭におき, 空間方向の独立変数は (λ, φ) とする[*2].

12.1　球面調和関数展開

$g(\lambda, \mu = \sin\varphi)$ を球面調和関数 $Y_n^m(\lambda, \mu)$ で展開する.

$$
\begin{aligned}
g(\lambda, \mu) &= \sum_{n=0}^{M} \sum_{m=-n}^{m} S_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) \\
&= S_0^0 Y_0^0 + \sum_{m=-1}^{1} S_1^m Y_1^m + \sum_{m=-2}^{2} S_2^n Y_2^m + \cdots + \sum_{-M}^{M} S_n^M Y_n^M .
\end{aligned}
$$

M を切断波数という. Y_n^m はルジャンドル陪関数を用いて,

$$
\begin{aligned}
Y_n^m &= Y_n^m(\lambda, \mu) && (1.1) \\
&= P_n^m(\mu) e^{im\lambda} && (1.2)
\end{aligned}
$$

[*1] 本ノートは, 筆者が自身の手書きノートから大量の数式を tex 化することに憂鬱になっていたところへ, それを不憫に思った川畑氏が tex による口述筆記記録を提供してくれたことで出来たものである. この場を借りて深く感謝するとともに, 自分もそれくらい使いこなせないとなぁと自戒するものである.

[*2] ここでいう λ は経度に相当し, φ は緯度に相当する座標軸である.

$Y_n^{-m} = P_n^{-m} e^{-im\lambda}$, $P_n^{-m} = P_n^m$ なので,

$$Y_n^{-m} = P_n^m e^{-im\lambda} \tag{1.3}$$
$$= \{Y_n^m\}^*. \tag{1.4}$$

$g(\lambda, \mu)$ は実関数とすると,

$$S_n^{-m} = \{S_n^m\}^* \tag{1.5}$$

という関係をみたす必要がある. 具体的に $n = 1$ のとき,

$$\sum_{m=-1}^{1} S_1^m Y_1^m = S_1^{-1} Y_1^{-1} + S_1^0 Y_1^0 + S_1^1 + Y_1^1 \tag{1.6}$$
$$= \{S_1^1 Y_1^1\}^* + S_1^0 Y_1^0 + S_1^1 + Y_1^1 \tag{1.7}$$
$$= 2\mathrm{Re}[S_1^1 Y_1^1] + S_1^0 Y_1^0. \tag{1.8}$$

Y_1^0 は実関数なので, S_1^0 は実数である. 以上の関係から,

- S_n^m は $m \geq 0$ の範囲だけ求めれば良い
- S_n^0 は実数

12.1.1 球面調和関数とルジャンドル陪関数

$Y_n^m(\lambda, \mu)$ は球面上の水平ラプラス演算子,

$$\nabla^2 = \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\{(1-\mu^2)\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\} \tag{1.9}$$

の固有関数,

$$\nabla^2 Y_n^m(\lambda, \mu) = -n(n+1) Y_n^m(\lambda, \mu). \tag{1.10}$$

ここで, $Y_n^m(\lambda, \mu) = P_n^m(\mu) e^{im\lambda}$ である. $P_n^m(\mu)$ は 2 に正規化されたルジャンドル陪関数,

$$P_n^m = \sqrt{(2n+1)\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)}} \frac{1}{2^n n!} (1-\mu^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{n+|m|}}{d(\mu^{n+|m|}} (\mu^2 - 1)^n \qquad (n \geq m). \tag{1.11}$$

直交性

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_n^m(\mu) P_{n'}^m(\mu) d\mu = \delta nn' \tag{1.12}$$

これより,

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-}^{2\pi}\int_{-1}^{1} Y_n^m(\lambda, \mu)\{Y_{n'}^m(\lambda, \mu)\}^* d\mu d\lambda = \delta nn' \delta mm' \tag{1.13}$$

P_n^m は n の数が増えるごとに節 (零点) の数が増える. Y_n^m は

- m : 経度方向の節の数
- $n-1$: 緯度方向の節の数

12.1.2 ルジャンドル陪関数と漸化式

$P_n^m(\mu)$ はルジャンドルの陪微分方程式の固有関数である.

$$[\frac{d}{d\mu}\{(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}\}-\frac{m^2}{1-\mu^2}]P_n^m(\mu)=-n(n+1)P_n^m(\mu). \tag{1.14}$$

$P_n^m(\mu)$ は $[-1,1]$ で有界である. P_n^m の昇降演算子,

$$P_n^m=P_n^m\sqrt{\frac{2n+1}{(2n-1)(n^2-m^2)}}\{n\mu-(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}\}P_{n-1}^m, \tag{1.15}$$

$$P_{n-1}^m=P_n^m\sqrt{\frac{2n-1}{(2n+1)(n^2-m^2)}}\{n\mu+(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}\}P_n^m. \tag{1.16}$$

これらを組み合わせると, 元のルジャンドルの陪微分方程式が得られる.

昇降演算子を基に, もっと便利な漸化式を求める. 上昇演算子より,

$$P_{n+1}^m=P_n^m\sqrt{\frac{2n+3}{(2n+1)((n+1)^2-m^2)}}\{(n+1)\mu-(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}\}P_n^m. \tag{1.17}$$

下降演算子を用いて $(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}P_n^m$ 消去する.

$$\sqrt{\frac{(2n+1)((n+1)^2-m^2)}{2n+3}}P_{n+1}^m+\sqrt{\frac{(2n+1)(n^2-m^2)}{2n-1}}P_{n-1}^m=(2n+1)\mu P_n^m. \tag{1.18}$$

ゆえに,

$$\sqrt{\frac{((n)^2-m^2)}{(2n-1)(2n+1)}}P_{n-1}^m+\sqrt{\frac{((n+1)^2-m^2)}{(2n+1)(2n+3)}}P_{n+1}^m=\mu P_n^m. \tag{1.19}$$

12.2 ルジャンドル多項式とガウス-ルジャンドル積分公式

12.2.1 ルジャンドル多項式の性質

$P_n^m(\mu)$ の $m=0$ としたものはルジャンドル多項式と呼ばれる. これを $P_n(\mu)$ と表す. 以下では $\sqrt{2n+1}$ で正規化されているとする. 漸化式はルジャンドル陪関数の

漸化式に $m=0$ を代入して得られる.

$$\frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}P_{n-1}+\frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}P_{n+1}=\mu P_n \tag{2.20}$$

12.2.2　クリストッフェル-ダルブーの公式

$$(x-y)\sum_{k=0}^{n-1}P_k(x)P_k(y)=\frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+3)}}\{P_n(x)P_{n-1}(y)-P_n(y)P_{n-1}(x)\} \tag{2.21}$$

12.2.3　ガウス-ルジャンドルの積分公式

クリストッフェル-ダルブーの公式を用いることで証明される.

ガウス-ルジャンドルの積分公式

$f(\mu)$ が $(2n-1)$ 次以下の多項式であるとき,

$$\int_{-1}^{1}f(\mu)d\mu=\sum_{k=1}^{n}w_kf(\mu_k) \tag{2.22}$$

ここで μ_k $(k=1,2,\cdots,n)$ は $P_n(\mu)$ の n 個の零点で

$$-1<\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_n<1 \tag{2.23}$$

とおく. w_k はガウス重みと呼ばれる量で,

$$w_k=\int_{-1}^{1}\frac{P_n(\mu)}{(\mu-\mu_k)P_n'(\mu_k)}du \tag{2.24}$$

$$=\frac{2\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{nP_{n-1}(\mu_k)P_n'(\mu_k)}. \tag{2.25}$$

証明)

$f(\mu)$ は $(2n-1)$ 次の多項式なので, $P_n(\mu)$ と $(n-1)$ 次以下の多項式 $Q(\mu)$, $R(\mu)$ を用いて,

$$f(\mu)=P_n(\mu)Q(\mu)+R(\mu) \tag{2.26}$$

と表すことができる. すると,

$$\int_{-1}^{1}f(\mu)d\mu=\int_{-1}^{1}\{P_n(\mu)Q(\mu)+R(\mu)\}d\mu. \tag{2.27}$$

$P_n(\mu)$ の直交性から, $\int_{-1}^{1} P_n(\mu)Q(\mu)d\mu = 0$ ($Q(\mu)$ は $(n-1)$ 次の多項式だから) となる. ゆえに,

$$\int_{-1}^{1} f(\mu)d\mu = \int_{-1}^{1} R(\mu)d\mu. \tag{2.28}$$

$R(\mu)$ は $(n-1)$ 次以下の多項式なので n 個の $(\mu_k, R(\mu_k))$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ を通るラグランジュ補間多項式で表せる.

$$R(\mu) = \sum_{k=1}^{n} R(\mu_k) l_k(\mu). \tag{2.29}$$

$l_k(\mu)$ は $l_k(\mu_j) = \delta_k j$ を満たす $(n-1)$ 次多項式

$$l_k(\mu) = \pi_{i=1}^{n} \frac{\mu - \mu_i}{\mu_k - \mu_i}. \tag{2.30}$$

これらを用いると,

$$\int_{-1}^{1} f(\mu)d\mu = \int_{-1}^{n} R(\mu)d\mu \tag{2.31}$$

$$= \int_{-1}^{n} \{\sum_{k=1}^{n} R(\mu_k) l_k(\mu)\} \tag{2.32}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} R(\mu_k) \int_{-1}^{1} l_k(\mu)d\mu \tag{2.33}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} R(\mu_k) w_k \tag{2.34}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w_k (P_n(\mu_k)Q(\mu_k) + R(\mu_k)) \qquad (P_n(\mu_k) = 0) \tag{2.35}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w_k f(\mu_k) \tag{2.36}$$

$$P_n(\mu) = c(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)\cdots(\mu - \mu_n) \tag{2.37}$$

$$= c\pi_{K=1}^{n} (\mu - \mu_k) \tag{2.38}$$

$$P_n'(\mu) = c[(\mu - \mu_2)\cdots(\mu - \mu_n) + (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)\cdots(\mu - \mu_n) \tag{2.39}$$

$$+ \cdots (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)\cdots(\mu - \mu_{n-1})] \tag{2.40}$$

$$P_n'(\mu_k) = c(\mu_k - \mu_1)(\mu_k - \mu_2)\cdots(\mu_k - \mu_{k-1})(\mu_k - \mu_{k+1})\cdots(\mu_k - \mu_n). \tag{2.41}$$

ゆえに,

$$l_k(\mu) = \frac{P_n(\mu)}{c(\mu-\mu_k)}\frac{c}{P_n'(\mu_k)} \tag{2.42}$$

$$= \frac{P_n(\mu)}{(\mu-\mu_k)P_n(\mu_k)} \tag{2.43}$$

よって,

$$w_k = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(\mu)}{(\mu-\mu_k)P_n'(\mu_k)}d\mu \tag{2.44}$$

さらに, クリストッフェル-ダルブーの公式で $x=\mu, y=\mu_k$ とおくと,

$$(\mu-\mu_k)\sum_{k=0}^{n-1}P_k(\mu)P_k(\mu_k) = \frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}\{P_n(\mu)P_{n-1}(\mu_k) - P_n(\mu_k)P_{n-1}(\mu)\} \tag{2.45}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}P_n(\mu)P_{n-1}(\mu_k). \tag{2.46}$$

ゆえに,

$$\frac{P_n(\mu)}{\mu-\mu_k} = \frac{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{nP_{n-1}(\mu_k)}\sum_{k=0}^{n-1}P_k(\mu)P_k(\mu_k). \tag{2.47}$$

これより,

$$w_k = \int_{-1}^{1}\{\frac{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{nP_{n-1}(\mu_k)}\sum_{k=0}^{n-1}P_k(\mu)P_k(\mu_k)\}\frac{1}{P_k'}d\mu \tag{2.48}$$

$$= \frac{1}{P_k'}\frac{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{nP_{n-1}(\mu_k)}\int_{-1}^{1}\sum_{k=0}^{n-1}P_k(\mu)P_k(\mu_k)d\mu \tag{2.49}$$

$$= \frac{2\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{nP_{n-1}(\mu_k)P_n'(\mu_k)} \tag{2.50}$$