

# 1 地球惑星の慣性モーメント

物体を「持った」ときの重さが質量、慣性モーメントは物体を「回す」ときの重さである。質点毎の質量  $m$  と回転軸からの距離  $r$  の二乗の和が慣性モーメント  $I$  になる。

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

地球・月惑星のダイナミクスを理解するためには、質量に加えて慣性モーメントの理解が重要である。

## 1.1 慣性モーメントの物理的意味

質点の運動に関する方程式（運動方程式）で質量  $m$  が果たす役割を、剛体の回転に関する方程式の中で果たすのが慣性モーメント  $I$  である。速度  $v$  に相当する角速度を  $\omega$  とすると

- 運動量  $mv$           角運動量  $I\omega$
- 運動方程式  $F = m\dot{v}$           剛体の回転の方程式  $L = I\dot{\omega}$

ここで  $F$  は力、 $L$  は剛体に働くトルク（回転させる作用：偶力）である。

- 運動エネルギー  $\frac{1}{2}mv^2$           回転のエネルギー  $\frac{1}{2}I\omega^2$

## 1.2 慣性モーメントの求め方

球の慣性モーメントを求める。またその準備として様々な回転対称の物体の慣性モーメントを求める。

### 1.2.1 半径 $R$ の細い輪

質量  $M$  の輪全体が軸から  $R$  の距離にあるから、

$$I_z = MR^2$$

$z$  軸方向に薄い物体では  $r_x^2 + r_y^2 = r_z^2$  だから  $I_z = I_x + I_y$  となる。したがって

$$I_x = I_y = \frac{1}{2}MR^2$$

### 1.2.2 半径 $R$ の薄い円盤

上で求めた細い輪の慣性モーメントを利用して円盤の慣性モーメントを求める。半径  $r$  の微小な輪の慣性モーメント  $dI_z = r^2 \cdot 2\pi r \sigma dr$  を積分する。

$$I_z = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\sigma}{2} R^4 = \frac{1}{2}MR^2$$

( $\sigma$  面密度,  $M = \sigma\pi R^2$  円盤の質量)

### 1.2.3 半径 $a$ の薄い球殻

$$I_x = I_y = I_z = I \quad I_x = \int r_x^2 dm = \int (y^2 + z^2) dm$$

$I_y, I_z$  も同様だから

$$3I = 2 \int (x^2 + y^2 + z^2) dm = 2MR^2$$

$$I = \frac{2}{3}MR^2$$

### 1.2.4 半径 $R$ の一様な球、球殻からの積分

$$dI = \frac{2}{3}r^2 dm, \quad dm = \rho 4\pi r^2 dr (\rho \text{ は密度})$$

だから

$$I_z = \int_0^R \frac{2}{3}r^2 \rho 4\pi r^2 dr = \frac{8}{15} \rho \pi R^5 = \frac{2}{5}MR^2 \quad (M = \frac{4}{3}\rho\pi R^3)$$

### 1.2.5 半径 $R$ の一様な球、直接積分

極座標  $(r, \theta, \phi)$  を用いて直接体積積分で一様球の慣性モーメントを求めることもできる。

$$\int_V \rho (r \sin \theta)^2 dV = \int_0^R \left( \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} \rho (r \sin \theta)^2 r \sin \theta d\phi \right) r d\theta \right) dr = \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin^3 \theta d\phi d\theta dr = \frac{2}{5}MR^2$$

## 1.3 慣性モーメントと地球惑星の内部構造

天体の慣性モーメントを  $MR^2$  で割ったものが、その天体内部における中心への質量集中度の指標となる。地球の場合この係数はおよそ 0.33 となり、0.4 より有意に小さい。これは密度の大きい金属でできた中心核が地球半径の半分を占めていることを反映している。一月の慣性モーメントは約  $0.3932 \pm 0.0002$  で、小さいながら金属核のある可能性を示唆する。木星の四大衛星（ガリレオ衛星）は木星に近い方から、イオ 0.378、エウロパ 0.330、ガニメデ 0.3105、カリスト 0.406 と、内側の三衛星が中心核を持つのに比べて最も外側のカリストのみ一様な内部構造を持つことを示す。これは木星の潮汐加熱による内部の分化が内側の三衛星にまでしか及ばなかったことを意味する。

## 1.4 慣性モーメントの計測

$A, B, C$  をそれぞれ  $x$  軸、 $y$  軸、 $z$  軸周りの慣性モーメントとすると

$$A = \int_V (y^2 + z^2) \rho dV \quad B = \int_V (z^2 + x^2) \rho dV \quad C = \int_V (x^2 + y^2) \rho dV$$

となる。地球のような回転楕円体の場合  $A \approx B < C$  となる。

天体の慣性モーメントは間接的に求められる。地球の回転変動のうち、歳差章動の周期やチャンドラー運動の周期は、慣性モーメントの軸ごとの違いを表す力学的扁平率  $h$  に依存する。今、 $A = B$  とすると  $h$  は

$$h = \frac{C - A}{A}$$

で表され、この値は地球の回転変動から知ることができる。一方重力でみた地球の扁平さを示す指標である  $J_2$  は、

$$J_2 = \frac{1}{MR^2} \int_V \left( \frac{x^2 + y^2}{2} - z^2 \right) \rho dV$$

で定義され、その天体を周回する衛星の軌道進化から知ることができる。 $A, B, C$  と  $J_2$  の定義から

$$\frac{C - (A + B)/2}{MR^2} = J_2$$

となるが、 $A \simeq B$  の場合は

$$J_2 = \frac{C - A}{MR^2}$$

となる。したがって、天体を周回する衛星の軌道変化から決定した  $J_2$  を、地球回転変動から求めた  $h$  で割ると慣性モーメントが求められる。すなわち

$$\frac{J_2}{h} = \frac{A}{MR^2}$$

地球や月の慣性モーメントはこうして求められたものである。適当な成層構造を仮定すると  $J_2$  のみから慣性モーメントを推測することも可能である。ガリレオ衛星の慣性モーメントは衛星のフライバイに伴って計測した  $J_2$  のみから推定したものである。

## 2 極運動の力学

地球の自転軸は空間に固定されていないため、軸そのものが空間を移動する。ここでは前章で定義した慣性モーメント  $I$  を三次元のテンソル、角速度  $\omega$  を三次元化のベクトルと考える。 $I$  は軸を慣性主軸に一致させると非対角成分をゼロとすることができ、

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

と表せる。 $A, B, C$  はそれぞれ  $x, y, z$  軸周りの慣性モーメントである。角運動量ベクトル  $H$  は

$$H \equiv I\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 A \\ \omega_2 B \\ \omega_3 C \end{pmatrix}$$

と表される。慣性系における回転の方程式は  $L = \dot{H}$  であるが、回転する物体に固定した座標では見かけ上の項が生じ（質点の運動を加速度運動する座標で記述するとき生じる慣性力に相当する）、 $L = \dot{H} - H \times \omega$  の形になる。これを成分毎に記述すると

$$L_1 = A\dot{\omega}_1 - (B - C)\omega_2\omega_3$$

$$L_2 = B\dot{\omega}_2 - (C - A)\omega_3\omega_1$$

$$L_3 = C\dot{\omega}_3 - (A - B)\omega_1\omega_2$$

外力トルク  $L$  がゼロとすると

$$A\dot{\omega}_1 = (B - C)\omega_2\omega_3$$

$$B\dot{\omega}_2 = (C - A)\omega_3\omega_1$$

地球の場合  $C > A = B$  (赤道部分が張り出している) として  $A$  を  $B$  で置き換えると、

$$A\dot{\omega}_1 = (A - C)\omega_2\omega_3$$

$$A\dot{\omega}_2 = (C - A)\omega_3\omega_1$$

とかける。さらに  $\omega_3$  は一定となるが、それを  $n$  とする (自転の角速度、24 時間で  $2\pi$ )。上記の方程式は次のようになる。

$$\dot{\omega}_1 = -hn\omega_2$$

$$\dot{\omega}_2 = hn\omega_1$$

ただし  $h$  は力学的扁平率で、 $h = (C - A)/A$  である。この解は、最初の式を時間微分してあとの式に代入して得られる。

$$\omega_1 = a \cos(hnt + \alpha)$$

$$\omega_2 = a \sin(hnt + \alpha)$$

地球では  $C : A = 0.326094 : 0.325029$  であり、 $h \approx 1/306$  となる。極運動の角速度  $hn$  は地球の自転角速度  $n$  の  $h$  倍であるため、極運動の周期は約 306 日 (オイラー周期) となる。実際の極運動周期 (チャンドラー周期) は 427 日。この周期の差には様々な要因が働いているが、最大のもは移動した極位置に合わせて地球が赤道の膨らみを再調整する作用 (極潮汐) のため、実質的な  $h$  が小さくなるためである。

### 3 地球の回転速度変動

自転速度の変動を支配する原理は地球の自転角運動量 ( $I\omega$ ) の保存である。地球の形状の変化に伴う  $I$  の時間変化によって  $\omega$  が変動する。これは長周期の潮汐にともなうものが知られている。大気、海洋、流体核などからなる地球の各部分が差動回転するために、我々が乗る固体地球の回転角速度が変動することもある。季節変動やより短周期の不規則な変動の原因の多くは、大気と固体地球の角運動量の交換によるものである。

気象学的に測った大気角運動量の変動と測地的に測った自転速度変動は良く相関するが、その相関係数から流体核とマンツルの結合状態に関する情報が得られる。地球中心核の半径を地球半径の半分、核の密度をマンツル密度の倍として、固体地球の慣性モーメントのうち核の慣性モーメントが占める割合を見積もってみる。マンツルと核の体積比を 7 : 1、核の密度をマンツルの倍とすると、マンツルと核の質量比は 7 : 2 となる。既に導出した均質球の慣性モーメントの公式を用いると慣性モーメントの比は 31 : 2 となる。すなわち核とマンツルが結合している場合と非結合の場合で大気と固体地球の角運動量変動の比例係数が 1/15 ほど異なることが予測される。コアマンツル非結合の上限のタイムスケールをスピンアップタイムと呼ぶが、地球回転の観測によるとこれは一年より長い。

地球-月系の角運動量の保存を仮定して、それぞれの自転と公転の角速度の進化を考える。

$$I_e\omega_e + M_m r_m^2 n_m = \text{一定}$$

ただし  $I$  は慣性モーメント、 $M$  は天体の質量、 $\omega$  と  $n$  はそれぞれ自転と公転の角速度をあらわす。添え字の  $e$  と  $m$  は地球と月をあらわすものとする。上式の  $M_m r_m^2$  は、月を質点と考えたときの地球の周りの慣性モーメントである。月は巨大衝突で生じたかけらがロシュ半径（6章に登場）のすぐ外側、軌道半径約二万キロのところに生成されるとする。月の軌道半径と公転周期はケプラーの第三法則によると  $r_m^3 n_m^2 = GM_e$  であるから、上の式は

$$I_e \omega_e + M_m \sqrt{GM_e r_m} = \text{一定}$$

と書き直すことができる。月が誕生したときの地球自転角速度と月の軌道半径をそれぞれ  $\omega'_e$  および  $r'_m$  とあらわすと、

$$I_e(\omega_e - \omega'_e) = -M_m \sqrt{GM_e} (\sqrt{r_m} - \sqrt{r'_m})$$

ここで  $I_e$  を  $0.33 \times M_e \times (\text{地球半径})^2$ 、 $GM_e$  を  $3.99 \times 10^{14}$ 、 $r_m$  と  $r'_m$  をそれぞれ 38 万キロおよび 2 万キロとおくと、 $\omega_e - \omega'_e$  はおよそ  $3 \times 10^{-4}$  となる。現在の角速度  $\omega_e$  が  $2\pi / (24 \times 60 \times 60) \approx 0.73 \times 10^{-4}$  であるから  $\omega'_e$  は  $\omega_e$  のおよそ 5 倍、すなわち月生成当時の一日の長さは約 5 時間であったと思われる。

## 4 地球の形

赤道部分が外に張り出した地球の形は次数 2 の球関数  $P_{20}(\sin \theta)$  を用いて表すことができる。

$$P_{20}(\sin \theta) = \frac{3 \sin^2 \theta - 1}{2}$$

ただし  $\theta$  は緯度、 $\theta = 0$  (赤道) で  $P_{20} = -1/2$  となり、 $\theta = \pi/4$  (極) で  $P_{20} = 1$  の値をとる。

### 4.1 自転する天体の静水圧平衡形状

表層物質が軽い場合 最初に、天体の質量が中心に集中しており、自転による変形が自己重力に影響を及ぼさない場合を考える。変形した天体の形状を  $R' = R\{1 + \epsilon P_{20}(\sin \theta)\}$  とし、その表面上で重力ポテンシャルと遠心力ポテンシャルの和が一定（緯度によらない）という条件を満たす微小量  $\epsilon$  を決める。

変形した地球表面での重力ポテンシャルは

$$U_G(\theta) = \frac{GM}{R'} \approx \frac{GM}{R} (1 - \epsilon P_{20}(\sin \theta))$$

ここで  $\epsilon$  の高次の項は省略してある。一方地球の遠心力ポテンシャルは

$$U_{rotation}(\theta) = \frac{1}{2} \omega^2 R^2 \cos^2 \theta = \frac{1}{3} \omega^2 R^2 (1 - P_{20}(\sin \theta))$$

緯度依存項のみを取り出せば

$$-\frac{1}{3} \omega^2 R^2 P_{20}(\sin \theta)$$

となる (実際の値を代入して地表の重力で割ると 3.65km の赤道の持ち上がりに相当)。  $U_G(\theta) + U_{rotation}(\theta)$  の緯度依存成分は

$$-\frac{GM}{R} \epsilon P_{20}(\sin \theta) - \frac{1}{3} \omega^2 R^2 P_{20}(\sin \theta)$$

であり、これがゼロになる必要があるから、

$$\epsilon = -\frac{1}{3} \frac{\omega^2 R^3}{GM} \quad \left( = -\frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{G\rho} \right)$$

ただし  $\rho$  は密度である。

一様な密度を持つ天体 一様な密度を持つ天体の静水圧平衡の形を求める。変形した天体の形状を前回同様  $R' = R\{1 + \epsilon P_{20}(\sin \theta)\}$  とする。遠心力ポテンシャルによって持ち上がった赤道部分も質量を持つため、質量の再分配に伴う重力変化を考慮する必要がある。その上で変形した天体表面上で重力ポテンシャルと遠心力ポテンシャルの和が一定になる条件を満たす微小量  $\epsilon$  を決める。

変形した天体表面での重力ポテンシャルは\*

$$U_G(\theta) = \frac{GM}{R'} \left( 1 + \frac{3}{5} \left( \frac{R'}{R} \right)^2 \epsilon P_{20}(\sin \theta) \right) \simeq \frac{GM}{R} \left( 1 - \frac{2}{5} \epsilon P_{20}(\sin \theta) \right)$$

ここで  $\epsilon$  の高次の項は省略してある。一方地球の遠心力ポテンシャルは前回と同じく

$$U_{rotation}(\theta) = \frac{1}{3} \omega^2 R^2 (1 - P_{20}(\sin \theta))$$

であり、緯度依存項は

$$-\frac{1}{3} \omega^2 R^2 P_{20}(\sin \theta)$$

となる。  $U_G(\theta) + U_{rotation}(\theta)$  の緯度依存成分

$$-\frac{2}{5} \frac{GM}{R} \epsilon P_{20}(\sin \theta) - \frac{1}{3} \omega^2 R^2 P_{20}(\sin \theta)$$

がゼロになる必要があるから、

$$\epsilon = -\frac{5}{6} \frac{\omega^2 R^3}{GM} \quad \left( = -\frac{5}{8\pi} \frac{\omega^2}{G\rho} \right)$$

と、前回の 2.5 倍になる。ただし  $\rho$  は密度である。  $P_{20}$  の値は極 (-1) と赤道 (1/2) では 3/2 の差をもつので、扁平率  $f$  は、

$$f \equiv \frac{a-c}{a} = \frac{3}{2} \epsilon$$

となる。地球（実際は成層構造しているが均一と仮定する）にあてはめて  $\omega = 2\pi/(24 \times 60 \times 60)$ 、  $G = 6.6726 \times 10^{-11}$ 、  $R = 6378 \times 10^3$ 、  $M = 5.974 \times 10^{24}$  を代入してみると、  $f$  は約 1/230 となる。実際の  $f$  はおよそ 1/298 である。生まれたての地球の自転角速度が現在の 4 倍と仮定すると扁平率はその二乗の 16 倍である。一見して楕円体と判別できる程度であったに違いない。

\*地形の球関数展開係数  $a_{nm}(b_{nm})$  と重力の係数  $C_{nm}(S_{nm})$  の関係

$$C_{nm}(\text{又は } S_{nm}) = \frac{3}{2n+1} \left( \frac{\sigma_{topo}}{\sigma_{av}} \right) a_{nm}(\text{又は } b_{nm})$$

木星の扁平率 質量は地球の 317 倍、角速度は 2.4 倍、半径は 11.2 倍とすると扁平率は 26 倍の  $\sim 0.11$  (約 1/9) になるはず。実際の木星の扁平率は 0.065。地球、木星のいずれでも現実の扁平率が小さくなるのは密度が成層構造をしているため（表層物質が平均密度より軽いため）である（その場合\*の中の  $\sigma_{topo}$  が小さくなる）。

## 4.2 地球のつぶれ具合を現す量のいろいろ

- 離心率  $e$        $e = \sqrt{a^2 - c^2}/a$  (地球の形状にはあまり用いられない)
- 扁平率  $f$        $f = (a - c)/a$
- 力学的扁平率  $h$        $h = (C - A)/A \approx 1/306$
- 形の力学係数  $J_2$        $J_2 \equiv -C_{20} = (C - A)/MR^2 = 1.083 \times 10^{-3} \approx 1/923$

従って質量の中心への集中度を示す慣性モーメントの係数は  $J_2$  と  $h$  を組み合わせて求められる。

$$\frac{A}{MR^2} = \frac{J_2}{h} \approx 0.33$$

$J_2$  は地球を周回する衛星の軌道進化 (昇交点経度の変化率) から、また  $h$  は地球の回転変動から計測できる。同様の議論を月に当てはめると慣性モーメントの係数は  $0.3932 \pm 0.0002$  となりわずかではあるが質量の中心への集中 (中心核の存在) を示唆する。

## 5 地球潮汐

太陽や月の引力の空間的な不均一 (太陽や月に近い側で大きく反対側で小さい) は潮汐力として地球を変形させる。潮汐力 (潮汐ポテンシャル) に対する固体地球のレスポンスの大きさは地球の弾性的な性質を反映する。例えば月の方向と  $\theta$  の角度にある地表の点における月の潮汐力ポテンシャル  $U_{tide}$  は

$$U_{tide} = \frac{GM_{moon}r^2}{R^3} P_{20}(\cos \theta)$$

ただし、 $R$  と  $r$  はそれぞれ地球-月間の距離、および地球の半径であり、 $R \gg r$  と仮定して高次項を無視してある (この式の導出はやや高度)。地球の形の議論では緯度を  $\theta$  としたため、球関数の引数は  $\sin \theta$  であったが、ここでは  $\theta$  として月の天頂角 (真上と月の方向のなす角度) をとっているため  $\cos \theta$  になっている (地球の形の議論でも緯度の代りに余緯度を用いると同様の表現になる)。地球天頂向きの力  $Z$  と水平線向きの力  $X$  は、

$$X \equiv \frac{\partial U_{tide}}{r \partial \theta} = -\frac{3}{2} \frac{GM_{moon}r}{R^3} \sin 2\theta$$

$$Z \equiv \frac{\partial U_{tide}}{\partial r} = \frac{GM_{moon}r}{R^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$U_{tide}$  の最大値を求めてみよう。 $G = 6.6726 \times 10^{-11}$ 、 $M_{moon} = 0.0123 \times 5.974 \times 10^{24}$ 、 $r = 6378 \times 10^3$ 、 $R = 384400 \times 10^3$  を代入すると、 $U_{tide}$  の最大値は  $3.51 \text{ m}^2/\text{s}^2$  となり、それによる上下移動は重力加速度  $g$  で割って  $0.36 \text{ m}$  となる。

### 5.1 分潮

潮汐の様々な周波数成分を分潮と呼ぶ。月の起潮力による半日周期の  $M_2$  分潮、太陽の起潮力による  $S_2$  分潮はそれぞれ 12 時間 25 分、12 時間の周期を持つ。両者の周期の差はおよそ一週間で半周期 (1/4 日)、二週間で一周分となる。そのため大潮、小潮が一週間交代で訪れる。そのほかに太陽や月の軌道面 (黄道面と白道面) と地球の赤道面が一致していないことによる一日周期の分潮 ( $O_1, P_1$  等)、半月周期や半年周期の長周期潮などがある。

月に関して、半日周期潮、日周潮、および長周期潮の発生を数式で示す。 $U_{tide}$  の式の二次の球関数月のに含まれる天頂角  $\theta$  は、観測点の緯度  $\phi$ 、経度  $\lambda$ 、月の時角  $H$ 、赤緯  $\delta$  と

$$\cos \theta = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H$$

の関係にある。赤緯は月が地球の赤道面と成す角度、時角 (hour angle) は観測点を含む子午面と月を含む子午面の成す角度である。これを  $P_{20}(\cos \theta)$  に代入すると

$$U_{tide} = \frac{GM_{moon}r^2}{R^3} \left( \frac{1}{2}(3 \sin^2 \phi - 1) \cdot \frac{1}{2}(3 \sin^2 \delta - 1) + \frac{3}{4} \sin 2\phi \sin 2\delta \cos H + \frac{3}{4} \cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos 2H \right)$$

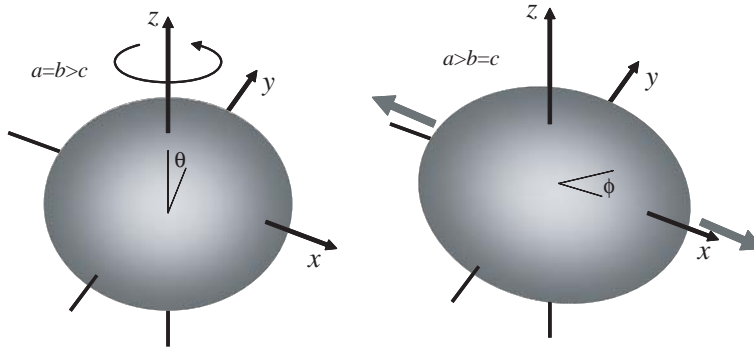
と書ける。括弧内の第一項は  $H$  を含まず、地球の自転に無関係に月の赤緯の変化に伴ってゆっくり変化する。これが長周期潮である。 $\cos H$  を含む第二項が日周潮、 $\cos 2H$  を含む第三項が半日周期潮をあらわす。これらは二次の球関数  $P_{20}(\sin \phi)$ 、 $P_{21}(\sin \phi) \equiv (3/2) \sin 2\phi$ 、 $P_{22}(\sin \phi) \equiv 3 \cos^2 \phi$  を用いると

$$U_{tide} = \frac{GM_{moon}r^2}{R^3} \left( P_{20}(\sin \phi)P_{20}(\sin \delta) + \frac{1}{3}P_{21}(\sin \phi)P_{21}(\sin \delta) \cos H + \frac{1}{12}P_{22}(\sin \phi)P_{22}(\sin \delta) \cos 2H \right)$$

と表すことができ、長周期潮、日周潮、半日周潮による地球の変形が、それぞれ zonal, tesseral, sectorial な変形に対応することがわかる。

## 5.2 同期自転天体の形状

中心天体による潮汐力が強い場合、公転 (角速度  $n$ ) 周期と自転 (角速度  $\omega$ ) 周期が一致する同期自転を行う場合がしばしばある。月や、木星の四大衛星 (ガリレオ衛星) などである。月において地球がおよぼす潮汐ポテンシャル  $U_{tide}$  と月自体の自転による遠心力ポテンシャル  $U_{rotation}$  を比較する。



同期自転天体に働く遠心力 (左) と潮汐力 (右) のポテンシャル

$$U_{tide} = -\frac{GM_{earth}r^2}{R^3} P_{20}(\sin \phi)$$

$$U_{rotation} = -\frac{1}{3} \omega^2 r^2 P_{20}(\sin \theta)$$

前者にケプラーの第三法則による  $GM = R^3 n^2$  を代入すると

$$U_{tide} = \omega^2 r^2 P_{20}(\sin \phi)$$

従って  $U_{tide}$  と  $U_{rotation}$  の振幅比は 3 : 1 という尽数関係になる。そのため中心天体の方向、赤道面内で中心天体の方向と直交する方向、極方向の張り出しが 7 : -2 : -5 という単純な比を示す三軸不等の楕円体になる。



ただし月の場合、静水圧平衡を仮定したときの扁平さに比べて現実の扁平さは二桁ほど大きく、かつて地球と月の距離が近かった（潮汐力が今より強かった）時代の記憶を留めている。

### 5.3 ラブ数：固体地球の潮汐への応答

既知の起潮力ポテンシャルに対する地球惑星の応答の大きさを表すラブ数 ( $k, h$ )、志田数 ( $l$ ) は地球惑星の硬さの指標となる。 $k$  は起潮力ポテンシャル  $U$  に対して、固体地球の変形によって二次的な等ポテンシャル面の変形が起こる割合を示す。等ポテンシャル面である海面の盛り上がりは、その分を考慮して  $(1+k)U/g$  となる。 $h$  は起潮力ポテンシャルに対して固体地球が鉛直に変位する割合である。たとえば験潮儀が固定されている固体地球は  $hU/g$  だけ鉛直に動くため、実際に潮汐による「海面高の変化」として験潮で観測されるのは  $(1+k-h)U/g$  である。 $l$  は起潮力ポテンシャルに対して固体地球が水平に変位する割合を示すもので、緯度方向および経度方向の水平変位がそれぞれ  $(l/g)\partial U/\partial\theta$ 、 $(l/g\cos\theta)\partial U/\partial\phi$  であらわされる。潮汐による重力変化や伸縮変化等は異なるラブ数と志田数の組み合わせから成る係数がかかっているため、これらを組み合わせてラブ数等の値を求めることができる。

- 験潮所における潮汐振幅  $U/g (1+k-h)$
- 衛星の軌道の摂動  $GM(1/r + (r_0/r)^3)Uk$
- 重力の潮汐  $2U/r (1-3/2k+h)$   
 (第一項:  $\partial U/\partial r = 2U/r$ , 第二項:  $\partial k U/\partial r = -3kU/r$ ,  
 第三項: free-air gradient による変化  $2g\Delta r/r$  で、潮汐による地面の持ち上がりが  $\Delta r = hU/g$ )

両者の観測を組み合わせると  $k, h$  が求められる。一般に一様な物質（剛性率  $\mu$ ）でできた天体では

$$k = \frac{3/2}{1+\mu} \quad h = \frac{5/2}{1+\mu}$$

となる。従って流体（剛性率がゼロ）でできた天体の  $k, h$  はそれぞれ 1.5, 2.5 になる。この場合、 $1+k-h=0$  であるから、験潮による潮汐の振幅はゼロとなる。一方の剛体（剛性率無限大）天体では  $k, h$  ともにゼロになる。現実の天体ではそれらの中間的な値をとるが、流体核などの存在が大きく影響する。モデル計算によると地球では  $k$  は 0.281、 $h$  は 0.610、 $l$  は 0.082 程度になる（竹内均による）。ちなみに大きな流体核を持たない月の  $k$  は一桁小さい。またガリレオ衛星の一つであるエウロパでは、液体の海がある場合とない場合で  $k$  が一桁異なるため、エウロパを周回する衛星の軌道変化から海が存在を知ることができる。

## 6 重力

地球の重力ポテンシャルは球関数を用いて下記のように展開される。

$$U(r, \theta, \phi) = \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n (C_{nm} \cos m\phi + S_{nm} \sin m\phi) P_{nm}(\sin\theta) \right\}$$

本来は全体にマイナスを付加すべきである（下向き重力  $F_r$  として、 $F_r = -\partial U/\partial r$  とするとマイナスをつけないと重力が下向きにならない）が、自明として省略されることが多い。 $C_{nm}$ 、 $S_{nm}$  をストークス係数と呼ぶ。天体のグローバルな重力場をモデル化するには、 $GM$  に加えてストークス係数のセットを与える。細かい重力場が求められているほど高い次数の係数まで与えられる。地球では数百次、月では百数十次までの係数が求め

られている。 $C_{20}$  は、その符号を逆にした  $J_2$  として与えられることが多く、自転の遠心力による赤道の張り出しの指標とされる。重力の大きさはポテンシャル  $U$  を  $r$  で偏微分して

$$F(r, \theta, \phi) = \frac{\partial U(r, \theta, \phi)}{\partial r} = \frac{GM}{r^2} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+1) \left( \frac{R}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\phi + S_{nm} \sin m\phi) P_{nm}(\sin\theta) \right\}$$

となる。南北方向、東西方向の重力はそれぞれ  $F_\theta = (1/r)\partial U/\partial\theta$  と  $F_\phi = (1/r \cos\theta)\partial U/\partial\phi$  で求められる（等ポテンシャル面であるジオイドでは重力は鉛直下方向きであるが地表を単純に球面とすると重力の東西や南北成分がありえる）。

## 6.1 重力異常

計測された重力値に数々の補正を施してジオイド上（平均海面上）の重力に換算した値と、その緯度における正規重力の差を重力異常と呼ぶ。正規重力は緯度の関数で、楕円体であることの影響と自転による遠心力の影響を加味した得られる。極と赤道で 0.5% 異なり、極では約 983.2 mgal、赤道で約 978.0 mgal である。補正には下記の三種類がある

- フリーエア補正 地球中心からの距離の補正

$g = GM/R^2$  だから  $\partial g/\partial R = -2g/R$  したがって高さ  $h$  の地点で得られた重力値  $g$  からジオイド上の重力値  $g_0$  は次の補正式（およそ 3m で 1mgal の補正）で求められる。

$$g_0 = g + 2gh/R = g + 0.0003086h$$

- 地形補正 地表の凹凸による影響の除去。いつも正の補正となる。
- ブーゲー補正 ジオイドと測定点の間の物質（空気以外）の引力の補正

密度  $\rho$ 、厚さ  $h$  の平たい岩盤の引力は  $2\pi\rho Gh$  であるから、密度  $2.7 \text{ g/cm}^3$  とすると、

$$g_0 = g + 2\pi\rho Gh = g - 0.0001132h$$

以上の三補正をすべて行って得られたブーゲー異常は地下構造を反映する。フリーエア補正のみ施したフリーエア異常はアイソスタシーからのずれとして物理的な意味がある。地球上のフリーエア異常は数十 mgal の桁（ジオイド高さの凹凸で数十 m）だが、月のフリーエア異常は数百 mgal と大きい。これはアイソスタシーの働きの鈍さを反映する。

## 6.2 ロシュ半径

自転による遠心力と自己重力の比を  $q$  とすると

$$q = \frac{\omega^2 R}{GM/R^2} = \frac{\omega^2 R^3}{GM}$$

これが 1 を越えると天体は破壊する。

$$\omega_{max} = \left( \frac{GM}{R^3} \right)^{1/2} \simeq \left( \frac{4\pi}{3} \rho G \right)^{1/2}$$

地球では  $1.2 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$  となり、自転周期は 1.41 時間、木星の場合現在の自転周期 9.9 時間の約三分の一の 2.9 時間となる。同期自転する衛星には、さらに潮汐力が働く。惑星、衛星、軌道半径をそれぞれ  $R_p, R_s, R_{sp}$

とする。今、臨界状態を考えて三つの力が釣り合っているとすると、

$$\frac{2GM_p R_s}{R_{sp}^3} + \omega^2 R_s = \frac{GM_s}{R_s^2}$$

ケプラーの第三法則  $GM_p = R_{sp}^3 n^2$  と同期自転の仮定からくる  $\omega = n$  を代入すると ( $n$  は公転の角速度)

$$\frac{3M_p}{M_s} = \left(\frac{R_{sp}}{R_s}\right)^3$$

となる。従って  $R_{sp}$  の臨界値である Roche 半径は

$$\left(\frac{3M_p}{M_s}\right)^{1/3} R_s = \left(\frac{3\rho_p}{\rho_s}\right)^{1/3} R_p$$

惑星と衛星の密度が等しければ Roche 半径は惑星半径の約 1.44 倍。実際には静水圧平衡のもとで変形するために Roche 半径は惑星半径の 2.46 倍まで伸びる。Roche 半径の内側に入った、自己重力でのみ集合している衛星は、潮汐力によって引き裂かれる。木星や土星の輪はそれらの半径の 1.44 倍から 2.46 倍以内のところ (Roche zone) にある。巨大衝突で月は Roche 半径のすぐ外側に生まれた、潮汐摩擦で現在の距離まで遠ざかってきた。

## 7 地球の弾性と粘性

弾性体は、応力  $\sigma$  と歪  $\epsilon$  が比例する。弾性定数を  $k$  とすると、 $\epsilon = \sigma/k$ 、

粘性流体では歪速度が応力に比例する。すなわち、 $\dot{\epsilon} = \sigma/\eta$ 、 $\eta$  は粘性を表す。両者が直列で結ばれた物体 (マックスウェル物体) が地球の粘弾性を良く説明することが知られている。両者を併せた歪速度は

$$\dot{\epsilon} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}}{k}$$

となる。これを時間で積分すると

$$\epsilon = \left(\frac{\sigma}{\eta}\right)t + \frac{\sigma}{k}$$

と表される。したがって弾性項と粘性項が同じ大きさとなる時間  $\tau_M = \eta/k$  を境に、長い時間スケールでは粘性項 (第一項) が卓越し、短い時間スケールでは弾性項 (第二項) が卓越する。 $\tau_M$  はマックスウェル時間と呼ばれる。アセノスフェアで  $k$  を  $10^{11}$  Pa (100Gpa)、 $\eta$  を  $10^{21}$  Pa s ( $10^{22}$  Poise) とすると、 $\tau_M$  は約 300 年となる。したがって地質学的な時間スケールではアセノスフェアは流体と考えてよい。

### 7.1 マントルの粘性

岩石の粘性は大きいので実験室での計測は一般に困難である。マントルの粘性は地球のゆっくりした変形を観測することによって計測できる。フェノスカンジヤ氷床やローレンタイド氷床だが、それぞれ 8,500 年前、6,500 年前に消失した後の上昇が、地形学的、測地学的な手法で計測されている。フリーエア重力異常と将来の隆起量は

$$\zeta = -\frac{\Delta g}{2\pi\rho_M G}$$

となり、その値はフェノスカンジヤ、ローレンタイド各氷床でそれぞれ 120m、300m である。この回復が起こる速度でマントルの粘性を求めることができる。現在ではフェノスカンジヤ氷床周囲における GPS 観測か

ら、上部マントルが  $10^{21}$ Pa s、下部マントルで  $10^{22}$ Pa s の値が得られている。他の方法としては地震の余効変動、プレート境界での移動性地殻変動などから粘性が求められる。

## 7.2 マントルの密度

マントルの密度は直接計測が難しいので、地震の観測から求められた地震波速度構造から間接的に求める。組成が一樣な部分では下記の取り扱いが可能である。静水圧  $p$  の半径 ( $r$ ) 方向の勾配は密度を  $\rho$  として

$$\frac{dp}{dr} = -g\rho$$

である。 $g$  は半径  $r$  での重力加速度である。

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{dr}$$

であるが、体積弾性率 (bulk modulus)  $K$  を用いると  $d\rho/dp = \rho/K$  であるので

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2 K}$$

となる。 $m$  は半径  $r$  より内部の質量である。地震学的に求めた P 波、S 波速度  $V_p$  と  $V_s$  を組み合わせて様々な深さでの  $\rho/K$  が求められる。さらに  $dm/dr = 4\pi r^2 \rho$  を利用すれば、マントル最上部から下に向かって数値積分で  $\rho$  を求めてゆくことができる。上記の  $d\rho/dr$  を与える式を Adams-Williamson の式と呼ぶ。実際には地球全体の質量 (地球を周回する衛星の軌道周期から得られる) や慣性モーメント (重力係数  $J_2$  と力学的扁平率  $h$  の組み合わせで得られる) や、室内実験で得られた相転移に伴う密度変化などの拘束条件を入れてマントル中の密度構造を求める。

## 7.3 粘性と熱対流

岩石の粘性は温度に敏感である。一般的に固体の粘性は融点  $T_m$  と次の関係にある。

$$\eta = \eta_0 \exp\left(a \frac{T_m}{T}\right) \quad T < T_m$$

岩石を例にとって適当な値を入れると温度 80 度の上昇で一桁かわる。マントル中の温度は地表付近と深部で 1000 度も異なるため、粘性率の違いは 10 桁を超える。熱対流の発生の目安となるレーリー数  $R_a$  (浮力の粘性抵抗に対する比) は  $\Delta u$  を温度差、 $d$  を流体層の厚さ、 $g$  を重力加速度、 $\alpha$  を熱膨張率、 $\kappa$  を熱拡散率 ( $\equiv k/\rho c_p$ 、 $k$  は熱伝導率、 $\rho$  は密度、 $c_p$  は等圧比熱)、 $\nu$  を動粘性率 ( $\equiv \eta/\rho$ 、 $\eta$  は粘性係数) として、

$$R_a = \frac{\alpha g \Delta u d^3}{\nu \kappa}$$

であらわされ、これが 1000 程度以上になると熱対流が生じる。マントルのレーリー数は  $10^6$  から  $10^7$  であり、熱境界層と等温核で特徴付けられる対流を行う。温度が 1600K 程度のところより浅い部分はリソスフェアとしてふるまう。そこでの熱分布は熱伝導で支配される。リソスフェアの下では熱対流が生じ、そこでの温度勾配は断熱温度勾配 (0.3K/km 程度) となる。

## 7.4 リソスフェアの厚さ

地球型天体の表面の熱境界層であるリソスフェアの厚さ（等温面までの厚さ）は表面での熱流量に比例する。リソスフェア中では熱伝導が主な heat transfer となる。熱伝導の法則によると熱流量  $q$  は温度勾配（球対称の場合半径  $r$  の方向）と熱伝導率  $k$  の積で表され、

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial r}$$

となるので、剛性を失う温度に達する深さは温度勾配、すなわち熱流量に比例する。天体の表面の熱流量を表面全体で積分した値は天体内部で発生する熱量に等しい。天体は均一（密度  $\rho$ ）で単位質量あたりの発熱量を  $H$  とすると

$$4\pi r^2 q = \frac{4}{3}\pi r^3 H \rho \quad \rightarrow \quad q = \frac{1}{3}rH\rho$$

熱流量は半径に比例するため、リソスフェアの厚さも天体の半径に比例する。すなわち小さな天体ほどリソスフェアが厚く、大きな天体ほどリソスフェアが薄い。地球ではおよそ 100km であるが、火星では 200-300 km、金星では地球並みかやや厚いとされている。天体表面のテクトニクスはリソスフェアの厚さに大きく依存し、地球型のプレートテクトニクス、月のような動かない蓋 (stagnant lid) 型、金星のようなブルーム・マントルオーバーターン (global resurfacing) 型などが生じる。火星にはプレートテクトニクスがある（過去にあった）という説があるが不明である。

上記の比例関係は (1)  $H$  が一定でない（金属核など）、(2) 水の存在、(3) 大気の温室効果による表面温度の違い、(4) 熱平衡のやぶれ（天体の内部が温まりつつある、または冷えつつある）などで修正を受ける。

## 7.5 リソスフェアの運動学

地球のリソスフェアは数枚のプレートに分かれて互いに運動している。プレートの相互運動により地表で見られる多彩な現象を説明する考え方の体系がプレート・テクトニクスである。

### 7.5.1 絶対運動

プレートは基本的に剛体的に動く。球面上の剛体の動きはある固定点の周りの回転運動として一意に記述できる。固定点（オイラー極）の座標を  $(\theta_e, \phi_e)$  とし、回転速度を  $\omega$  とすると、プレートの角速度ベクトル（オイラーベクトル） $\Omega$  が定義できて、地球の中心においた直交座標系で

$$\Omega \equiv \begin{pmatrix} \omega \cos \theta_e \cos \phi_e \\ \omega \cos \theta_e \sin \phi_e \\ \omega \sin \theta_e \end{pmatrix}$$

と表すことができる。任意の点  $(\theta_s, \phi_s)$  の速度を求めるときは地球中心からその点に向かうベクトル  $r$  と  $\Omega$  のベクトル積から

$$v = \Omega \times r \quad r \equiv \begin{pmatrix} R \cos \theta_s \cos \phi_s \\ R \cos \theta_s \sin \phi_s \\ R \sin \theta_s \end{pmatrix}$$

として求められる ( $R$  は地球の半径)。  $v \equiv (v_x, v_y, v_z)$  は適当な座標回転で水平速度  $v_u, v_e$  に変換できる ( $v_u$  は必ずゼロになる)。

## 7.5.2 相対運動

実際に地上で観測されるのはプレートの相対運動である。絶対運動は、観測から求めた相対運動からある仮定（ホットスポット不動、あるいは全プレートの角運動量の和がゼロ等）のもとに得られる。オイラーベクトルには加法則が成り立ち、プレート A とプレート B の絶対運動のオイラーベクトルをそれぞれ  $\Omega^A$ 、 $\Omega^B$  とすると、プレート B を不動としたときにプレート A のオイラーベクトル  $\Omega^{AB}$  は

$$\Omega^{AB} = \Omega^A - \Omega^B$$

となる。プレート B から見たプレート A の回転中心（相対運動のオイラー極）と回転速度は以下のようにして求められる。

$$\omega^{AB} = |\Omega^{AB}| \quad \theta^{AB} = \sin^{-1} \frac{\Omega_z^{AB}}{\omega^{AB}} \quad \phi^{AB} = \tan^{-1} \frac{\Omega_y^{AB}}{\Omega_x^{AB}}$$

## 8 地磁気

### 8.1 地磁気ポテンシャルの球関数による表現

地球の外部における地磁気のポテンシャル  $W$  は重力ポテンシャルと同じく調和方程式 ( $\nabla^2 W = 0$ ) を満たすため、同様に球関数を用いて表される。

$$W(r, \theta, \phi) = R \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} (g_{nm} \cos m\phi + h_{nm} \sin m\phi) P_{nm}(\sin\theta)$$

ここで  $\theta, \phi$  はそれぞれ緯度と経度、 $r$  が地球中心からの距離にとってある。 $R$  は地球の半径である。 $g_{nm}$ 、 $h_{nm}$  は重力のストークス係数に相当するもので、ガウス係数と呼ばれる。重力ポテンシャルとの顕著な相違点は、重力の係数が無次元であるのに対してガウス係数は磁場の単位を持つことである。また重要なのは重力の主要項であるゼロ次の項（重力で  $GM/r$  の部分）がないかわりに重力でゼロであった一次の項が主要項となる点である。これは重力が基本的に正の質量によるモノポール重力場であるのに対して、磁場が基本的に一次の球関数で現される、SN 両極のペアがつくる双極子のつくる磁場であるためである。逆に重力場でゼロ次の次がすぐ  $J_2$  に代表される二次の項に続き、一次の項が省略されているのは、座標系の原点が一次の項がゼロになるように（地球の重心に一致するように）定義されているからである。

$g_{10}$ 、 $g_{11}$ 、 $h_{11}$  は双極子モーメントのそれぞれ  $z, x, y$  軸成分を表す。実際には  $g_{10}$  が圧倒的に大きく、双極子モーメントの方向が地軸 ( $z$  軸) におおむね一致していることを示す。なお磁場ベクトルは

$$\mathbf{F} = -\nabla W$$

であるが、地磁気ポテンシャルの各項から地球中心においた地軸方向の双極子である  $g_{10}$  のみを取りだすと、 $P_{10}(\sin\theta) = \sin\theta$  であるから

$$W = \frac{R^3}{r^2} g_{10} \sin\theta$$

となる。任意の点（地心距離  $r$ 、緯度経度  $\theta, \phi$ ）における地磁気ベクトルの鉛直成分と南北成分はそれぞれ

$$F_r = -\frac{\partial W}{\partial r} = 2 \frac{R^3}{r^3} g_{10} \sin\theta$$

$$F_{\theta} = -\frac{\partial W}{r\partial\theta} = -\frac{R^3}{r^3} g_{10} \cos\theta$$

となる。なお東西成分  $F_{\phi}$  はゼロである。正磁極期では  $g_{10}$  は負であるから、 $F_r$  は北半球では下向き、南半球で上向きとなる。また  $F_{\theta}$  は全球で北向きとなる。

## 8.2 岩石の放射年代

放射性元素  $P$  が壊変定数  $\lambda$  で壊変すると、

$$\frac{dP}{dt} = -\lambda P$$

となり、 $P$  の量は  $t = t_0$  での値  $P_0$  から

$$P = P_0 \exp(-\lambda t)$$

で減少する。同時に壊変で生じたあらたな元素が増加してゆく。

岩石中の放射性同位体と安定同位体の比から岩石の年代が得られる。良く知られているのは  $^{14}\text{C}$  法で、大気中の  $^{14}\text{C}$  が放射性壊変による減少と宇宙線によって窒素から生じるための増加がバランスして一定値となっている。生物が死亡後外部から炭素を取り込むことがなくなるため、半減期約 5700 年で  $^{14}\text{C}$  は最初の値から減少してゆく。これを利用して動物の骨や木片から年代が推定できる。しかし半減期が短いため地質学的な年代の決定には用いられない。

より半減期の長い放射壊変現象として、 $^{40}\text{K}$  の電子捕獲による  $^{40}\text{Ar}$  への壊変（半減期  $1.25 \times 10^9$  年）や、 $^{87}\text{Rb}$  の  $\beta$  壊変による  $^{87}\text{Sr}$  への壊変（半減期  $4.88 \times 10^{10}$  年）が用いられる。K-Ar 法では、火成岩の生成時には Ar が存在しなかったという仮定から、岩石中の  $^{40}\text{Ar}$  と  $^{40}\text{K}$  の比が  $(1 - e^{-\lambda t})/e^{-\lambda t}$  となることを利用して年代  $t$  を求める（実際にはもう少しややこしい）。岩石の放射年代と残留磁化の正逆から地磁気反転の歴史をたどることができる。このようにして求められた地磁気逆転年代（Geomagnetic reversal timescale）は、海底の磁気異常から海洋底拡大の速度を推定する際に用いられる。