

# 流体力学的散逸の基礎理論について

## The basic theory of Hydrodynamic Escape

学生番号 22060169

梅本 隆史

UMEMOTO Takafumi

北海道大学 理学部 地球科学科

惑星宇宙グループ

Department of Earth Sciences, Undergraduate school of Science,

Hokkaido University

Planetary and Space Group

指導教官 倉本圭教授

2010年3月11日

## 要旨

流体力学的散逸 (Hydrodynamic escape) は初期の惑星において大気の種類や組成を決める最も重要なプロセスの一つとされている。流体力学的散逸は恒星風と同じ物理プロセスで働いている。そこで本論文は、流体力学的散逸の物理プロセスを理解するために恒星風の基礎理論を記述した J.G.L.M.Lamer and Joseph P.Cassinelli, 1999: Introduction to stellar wind) p.60-111 についてレビューを行った。

流体の持つ熱エネルギーが天体重力による束縛エネルギーよりも大きくなると流体力学的散逸が起こる。基礎方程式は質量保存・運動方程式・エネルギー方程式・状態方程式である。定常球対称を仮定すると、これらから速度方程式を得ることができる。これは天体からの距離に対する流体の動径速度の依存性を記述する微分方程式である。速度方程式は、境界条件によって様々な解を含んでいる。しかし、これらの解の中で流体力学的散逸を表している解は、流体が遠方に向かって加速し続けている遷音速解のみである。遷音速解に従う流体のエネルギーは遠方に向かって負から正に増大する。エネルギー流入は流体の熱エネルギーを有限に保ち、さらに天体重力場からの脱出に使われ、流体の運動エネルギーへ転換される。その遷音速解から求められる散逸フラックスは、惑星質量・大気下端の温度・大気の種類・平均分子量・エネルギー流入量の各パラメータによって大きく変化する。

## 目次

1	はじめに	3
1.1	目的 . . . . .	3
1.2	構成 . . . . .	3
2	様々な大気散逸過程の概観	4
2.1	熱的散逸 . . . . .	4
2.2	非熱的散逸 . . . . .	5
2.3	Impact Erosion . . . . .	6
3	流体力学的散逸条件	7
3.1	散逸パラメータ . . . . .	7
3.2	流体力学的散逸条件の導出 . . . . .	7
4	流体力学的散逸の基礎理論	9
4.1	等温大気モデル . . . . .	9
4.2	ポリトロップ大気モデル . . . . .	15
5	ジーンズ散逸	23
5.1	外圏と外圏底 . . . . .	23
5.2	散逸フラックス . . . . .	23

---

6	モデルの適用	25
6.1	平均分子量に対する散逸フラックスの変化 . . . . .	26
6.2	底の温度に対する散逸フラックスの変化 . . . . .	27
6.3	$\Gamma$ に対する散逸フラックスの変化 . . . . .	28
6.4	流体力学的散逸とジーンズ散逸の散逸規模の比較 . . . . .	29
7	まとめ	31
付録 A	Henny J.G.L.M.Lamer and Joseph P.Cassinelli (1999) p.60-111 部分訳	33
A.1	等温風の場合 . . . . .	33
A.2	非等温風の場合 . . . . .	58
付録 B	散逸フラックスの平均分子量・質量・温度・ $\Gamma$ に対する依存性	80
B.1	H の場合 . . . . .	80
B.2	H <sub>2</sub> の場合 . . . . .	83
B.3	H <sub>2</sub> O の場合 . . . . .	85
	参考文献	87

# 1 はじめに

## 1.1 目的

太陽系の大きな特徴の一つとして惑星大気が多様性が挙げられる。例えば、地球とほぼ同じ大きさを持つ金星は厚い二酸化炭素の大気に覆われ、表面温度は 460 K にも達する。明らかにその様相は地球のそれとは大きく異なっている。また土星の衛星タイタンと木星の衛星ガニメデ・カリストはほぼ同じ大きさを持つているが、タイタンが厚い窒素の大気を持っているのに対し、ガニメデとカリストにはない。さらに近年の観測により今日までに 400 を超える系外惑星が発見され、徐々にその大気に関する情報が得られつつある。これによりさらなる惑星大気が多様性が明らかになるだろう。

惑星大気が多様性を生んでいるのは大気進化である。これに大きな影響を及ぼす要素として大気の散逸が考えられる。中でも、流体力学的散逸は初期の惑星において大気量や組成を決める最も重要な散逸プロセスの一つとされる。

そこで、本論文では流体力学的散逸の物理的意味とこの散逸フラックスのパラメータ依存性について理解し、これからの流体力学的散逸を用いた研究の布石とすることが目的である。

## 1.2 構成

本論文では、まず 2 章で様々な大気散逸過程を概観する。3 章で散逸条件の議論に必要な散逸パラメータを定義し、流体力学的散逸条件の導出を行う。4 章で定常状態の等温大気モデルとポリトロップ大気モデルにおける流体力学的散逸の基礎理論について詳しく述べる。質量保存の式・運動方程式・エネルギーの式を示し、流体の速度分布・密度分布・散逸フラックスを導出する。さらにこの物理的意味についても述べる。5 章では流体力学的散逸と比較するためにジーンズ散逸について述べる。6 章では 4 章のモデルを用いてパラメータを変化させ散逸フラックスを算出し、考察した。7 章でまとめを述べる。付録として Henny J.G.L.M.Lamer and Joseph P.Cassinelli, 1999, p.60-111 の部分訳と散逸フラックスの平均分子量・質量・温度・ $\Gamma$  に対する依存性に関する図を掲載した。

## 2 様々な大気散逸過程の概観

大気の散逸は火星よりも小さい惑星・衛星では大気の組成と量を規定する主要な要因である。大きな惑星では重力が大きくなるため散逸は重要ではなくなるが、地球や金星サイズでは進化初期段階では大規模な散逸が起こっていた可能性がある。大気の散逸は熱的散逸と非熱的散逸と Impact Erosion に大別される。

### 2.1 熱的散逸

熱的散逸は熱平衡状態にある気体分子の全部もしくは一部の熱運動エネルギーが、惑星の重力エネルギーよりも大きくなって散逸する過程である。

#### 2.1.1 流体力学的散逸

流体力学的散逸 (Hydrodynamic escape) は、圧力勾配が惑星から無限遠であっても有限の値をとり、流体が重力に束縛されずに流出する過程である。その結果、惑星大気の静水圧平衡が破れる。流体力学的散逸をしている流体の速度は、惑星近傍から遠方に向かって、亜音速から超音速に達する。定常状態の流体力学的散逸の基礎理論については 4.1, 4.2 節で述べる。

形成初期の太陽による極端紫外線 (EUV) は原始惑星大気の加熱を起こしていたと考えられ、流体力学的散逸を引き起こしていたと考えられている。水素に富む大気はこの散逸プロセスに弱く、水素が流出する際に他の重い原子や分子を引きずり運び去る。この水素の風は軽い原子や分子ほど多く運び去る。このため、現在の大気組成、特に希ガスの同位体比を調べることでこのプロセスが起こっていたかを知ることができる。

#### 2.1.2 ジーンズ散逸

ジーンズ散逸 (Jeans Escape) は、静水圧平衡が成り立ち、惑星に束縛されている大気からの散逸過程である。下層大気では密度が高く、高速で運動する気体分子はすぐに他の気体粒

子に衝突・減速するために宇宙空間に脱出できないが、上層大気では密度が低いため他の気体分子と衝突せず、ある確率で脱出速度を超えて惑星重力から飛び去る。大気の「蒸発」とも例えられ、大気の「流出」と言われる流体力学的散逸とは区別される。5章で述べる。

## 2.2 非熱的散逸

非熱的散逸は化学反応や粒子同士の衝突により原子が加速されて散逸する過程である。気体の温度、すなわち平均的な熱運動の速度が低くても起こりうる。非熱的散逸の多くはイオンを伴っている。現在の地球を含むいくつかの惑星では、熱的散逸よりも非熱的散逸の方が重要である。

### 2.2.1 電荷交換

高速の水素イオンが中性水素原子に衝突し、その電子を捕獲する。その結果、高速の中性原子が作られる。中性原子は磁場の制約をうけないため、同じエネルギーでも散逸しやすい。

### 2.2.2 極風

惑星磁場の磁力線は一方の磁極からもう一方との磁極間で閉じているが、最も広がっている磁力線は太陽風によって外側に引っ張られて磁極につながらずに星間空間に開いている。この開いた磁力線に沿って水素やヘリウムのような軽いイオンは惑星の重力圏から逃げることができる。極風は、こうしてできた荷電粒子の流れのことである。

### 2.2.3 光化学反応

酸素や窒素、一酸化炭素分子は大気中を漂いながら上層大気まで達し、太陽放射によって電離する。電離した分子は電子と再結合したり、互いにぶつかる。その際に放出されるエネルギーによって分子は重力を振り切るのに十分な速度を持つ原子へと分解する。

火星やおそらくタイタンで起こっていたとされるプロセスである。

#### 2.2.4 スパッタリング

惑星磁場が存在しない場合, 上層大気は太陽風に直接さらされる. イオンは太陽風によって流され, その後電荷交換を起こして散逸する.

### 2.3 Impact Erosion

Impact Erosion は天体衝突による散逸プロセスである. 熱的散逸や非熱的散逸に比べると, 規模は大きい. 例としては, 6500 万年前に恐竜を絶滅させた小惑星の衝突の場合, 全大気量の 10 万分の 1 が散逸したとされている.

衝突天体が十分に大きく, かつ高速である場合, 衝突天体とそれと同程度の質量の地表岩石が蒸発する. その際に生成した高温のプルームは脱出速度よりも高速で膨張し, 周囲の大気は惑星から剥ぎとられる可能性がある. 衝突エネルギーが大きくなるほど, 吹き飛ばされる大気円錐は広がる. 吹き飛ばされる大気円錐の広さは大気密度によっても変わり, 大気が希薄なほど失われる大気量は増える.

地球の脱出速度が大きいため Impact Erosion による散逸は起こらないとされているが, 火星は小惑星帯近くの環境で生まれたために衝突頻度が多く, さらに質量が小さいために天体衝突による大気散逸が起こりやすかったとされている. 木星の内側の衛星もまた, 木星の重力が衝突天体を加速させるため, 大気を失いやすい環境と言える.



### 3 流体力学的散逸条件

#### 3.1 散逸パラメータ

惑星が大気を保持する指標, または散逸条件を示す際に散逸パラメータを用いることがある.

散逸パラメータ  $\lambda$  を次のように定義する.

$$\lambda \equiv \frac{GMm}{rkT(r)} = \frac{GM\mu}{rRT(r)}. \quad (3.1)$$

$G$  は万有引力定数,  $k$  はボルツマン定数,  $m$  は一分子あたりの質量,  $R$  は気体定数である. 散逸パラメータは熱運動エネルギーに対する重力ポテンシャルの比になっており, 大気がどれだけ強く重力で束縛されているかを表す尺度である. 重力が強いほど値は大きくなり, 束縛が強い. 分子量が小さいほど, 温度が高いほど小さくなり, 束縛は弱くなり大気は逃げやすくなる.

#### 3.2 流体力学的散逸条件の導出

流体力学的散逸をする大気は, 惑星から無限遠離れた遠方であっても有限な圧力の値をとるために静水圧平衡が破れている. 本節では, ポリトロープ大気を静水圧平衡に適用し, これが成立しない条件を求めることによって流体力学的散逸する条件を導出する.

まずポリトロープ大気について論じる. ポリトロープとは温度・密度・圧力がある関係を満たしているときに使う概念である. 以下でポリトロープ関係式を示す.

$$T = T_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\Gamma-1} \quad (3.2)$$

もしくは

$$p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\Gamma} \quad (3.3)$$

ここで,  $\Gamma$  はポリトロピック指数と呼ばれる.  $\Gamma$  は  $r$  に依らず一定であるとする. ポリトロピック指数は等温大気の場合は 1, 断熱変化の場合は比熱比になる.

ここで鉛直方向に運動していない、平行平面大気を考える。鉛直方向の圧力分布は以下の静水圧平衡の式によって与えられる。

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{GM_*}{r^2} = 0 \quad (3.4)$$

ここで、 $p$  は大気の圧力、 $\rho$  は大気の密度である。

(3.4) 式に (3.3) 式を代入、積分し、理想気体の状態方程式

$$p = \frac{\rho \mathcal{R} T}{\mu} \quad (3.5)$$

を用いて整理すると、圧力分布の式を求めることができる。

$$p = p_0 \left\{ \frac{\Gamma-1}{\Gamma} \lambda_0 \left( \frac{r_0}{r} - 1 \right) + 1 \right\}^{\frac{\Gamma}{\Gamma-1}} \quad (3.6)$$

ここで、添字 0 は惑星表面での値とする。(3.2), (3.3), (3.6) 式を用いると、次式を導出できる。

$$T = T_0 \left\{ \frac{\Gamma-1}{\Gamma} \lambda_0 \left( \frac{r_0}{r} - 1 \right) + 1 \right\} \quad (3.7)$$

$$\rho = \rho_0 \left\{ \frac{\Gamma-1}{\Gamma} \lambda_0 \left( \frac{r_0}{r} - 1 \right) + 1 \right\}^{\frac{1}{\Gamma-1}} \quad (3.8)$$

$$\lambda = \left\{ \frac{\Gamma-1}{\Gamma} + \frac{r}{r_0} \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{\Gamma-1}{\Gamma} \right) \right\}^{-1} \quad (3.9)$$

静水圧平衡が成立しない場合、どの  $r$  においても常に  $p > 0$  である。(4.22) 式に  $p > 0$  を適用すると、次式を導出できる。

$$\lambda_0 < \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{r}{r-r_0} \quad (3.10)$$

$r$  を無限大まで大きくするとき、 $\frac{r}{r-r_0} \rightarrow 1$  となるので、静水圧平衡が破れる条件は次式である。

$$\lambda_0 < \frac{\Gamma}{\Gamma-1}. \quad (3.11)$$

これは散逸パラメータによる流体力学的散逸条件の上端である。下端については後述する。

ここで等温大気  $\Gamma = 1$  の場合、 $\Gamma/(\Gamma-1) \rightarrow \infty$  より、流体力学的散逸条件の上限はない。

## 4 流体力学的散逸の基礎理論

本章では流体力学的散逸の基本的な性質を理解するために球対称, 定常の一次元モデルを用いて論じる. 流体力学的散逸をする流体の持つ熱エネルギーが天体重力による束縛エネルギーよりも大きくなると, その流体は圧力勾配によって動径方向に加速されるため, 静水圧平衡は破れ惑星間空間へ流出する. 大気の底では流体は惑星重力によって束縛されるが, 遠方に向かってポテンシャルエネルギーは距離に反比例して減少する. 一方, 流体の温度はエネルギー流入によって遠方までより高く維持できるかもしれない. つまり惑星から離れるにつれて, 流体の熱エネルギーは惑星重力による束縛エネルギーにうちかって惑星から流出できる可能性がある. このとき, 流体の密度は重力の影響のため惑星との距離とともに急激に減少し, 超音速の流れができる. この流れの仕組みを理解するために, 単純な仮定 (等温大気・ポリトロップ大気) における流体力学的散逸の理論について論じる.

以下でそれぞれのモデルにおける共通の仮定を示す. 惑星大気は理想気体として扱い, 半径  $r_0$  の惑星表面から, 球対称に定常的に流出しているとする. つまり, 流体力学的散逸をする流体の速度, 密度, 温度などの物理量は惑星中心からの距離  $r$  にのみに依るものとする. また, 流体力学的散逸をする流体には圧力勾配による力と重力のみが働いているとする.

### 4.1 等温大気モデル

温度一定の仮定は, それを維持する何らかのエネルギー流入があることに等しい. 惑星から距離が離れると, 流体のポテンシャルエネルギーは減少するが, この場合熱エネルギーは変化しないため, 重力による束縛にうちかって必ず散逸する. つまりこの仮定は必ず流体力学的散逸をすることを意味している. これは 3.2 節で示された.

本節では, 流体力学的散逸の基本的な物理過程を理解するために等温大気における流体力学的散逸について論じる.

### 4.1.1 基礎方程式と臨界点

等温大気モデルを記述する基礎方程式と、これから導かれる臨界点について論じる。

流体力学的散逸をする流体の運動を記述する方程式を以下に示す。

$$4\pi r^2 \rho v = \text{constant}. \quad (4.1)$$

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{GM_*}{r^2} = 0. \quad (4.2)$$

ここで、 $M_*$ ,  $v$ ,  $\rho$ ,  $T$ ,  $p$  はそれぞれ惑星大気の質量, 流体の速度, 密度, 温度, 圧力である。また  $\mathcal{R}$ ,  $\mu$  は気体定数, 流体の平均分子量である。(4.1) 式は質量連続の式で, 任意の半径  $r$  の球面を単位時間に通過する質量が一定であることを示す。(4.2) 式は運動方程式で, 流体に働く力が圧力勾配 (第二項), 重力 (第三項) であることを示す。なお, エネルギー方程式は等温の条件  $T(r) = T = \text{constant}$  である。(4.2) 式の圧力勾配の項は理想気体の状態方程式 (3.5) 式を用いて次のように書くことができる。

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \frac{dT}{dr} + \frac{\mathcal{R}T}{\mu\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{\mathcal{R}T}{\mu} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr}. \quad (4.3)$$

(4.3) 式の密度勾配は (4.1) 式を用いて速度勾配の形で書くことができる。

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} - \frac{2}{r}. \quad (4.4)$$

(4.2), (4.3), (4.4) 式を用いて次の速度方程式を導くことができる。

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \left\{ \frac{2a^2}{r} - \frac{GM_*}{r^2} \right\} / \{v^2 - a^2\}. \quad (4.5)$$

また (4.5) 式の右辺分子がゼロになる  $r$  を次のように定義する。

$$r_c \equiv \frac{GM_*}{2a^2}. \quad (4.6)$$

$r_c$  を臨界距離と呼ばれ,  $r_c$  の位置を臨界点と呼ぶ。下付き文字  $c$  は臨界点での値とする。以下では  $r_c > r_0$  の場合について論じる。

(4.5) 式は微分方程式で図 1 のように境界条件によって様々な解をとることができるが, 惑星から流体力学的散逸をする流体の場合, どの  $r$  においても  $dv/dr > 0$  の解である。なぜ

ならこの場合、流体は圧力勾配の方向に加速され、惑星近傍から遠方に向かって速度が増大しなければ散逸できないためである。

(4.5) 式は  $v(r) = a$  のとき分母がゼロとなり、特異点をもつ。  $r = r_c$  の場合、  $v = a$  のとき以外、(4.4) 式の右辺は 0 になる。  $v = a$  の場合、  $r = r_c$  のとき以外、(4.5) 式の右辺は  $\pm\infty$  になる。つまり、  $dv/dr > 0$  を満たす解は (4.5) 式の右辺が 分子 = 0, 分母 = 0 となる

$$r = r_c \text{ かつ } v(r_c) = a = \frac{v_{\text{esc}}(r_c)}{2} \quad (4.7)$$

の点を通る。この点は臨界点と呼ばれる。ここで  $v_{\text{esc}}(r_c) = \sqrt{2GM_*/r_c}$  は臨界点での脱出速度である。上記より、  $r = r_c$  と  $v(r_c) = a$  を通る臨界解のみが流体力学的散逸をする流体の挙動を示す。

次に運動方程式 (4.5) 式の解を求める。(4.5) 式は積分することができ、以下の解をもつ。

$$\frac{v^2}{2} - a^2 \ln(v) = 2a^2 \ln(r) + \frac{GM_*}{r} + \text{constant} \quad (4.8)$$

この解のトポロジーは図 1 に示した。上記の議論から、図の太線が (4.7) 式を通る流体力学的散逸をする流体を表す解である。速度が音速より小さい場合は亜音速、大きい場合は超音速と呼ばれる。この場合、臨界点は  $v(r_c) = a$  より音速点でもあるので、流体の速度は  $r < r_c$  で亜音速、  $r > r_c$  で超音速となる。この解が唯一  $v = a$  である音速点を通って遠方に向かって加速する解であるので、遷音速解と呼ばれる。

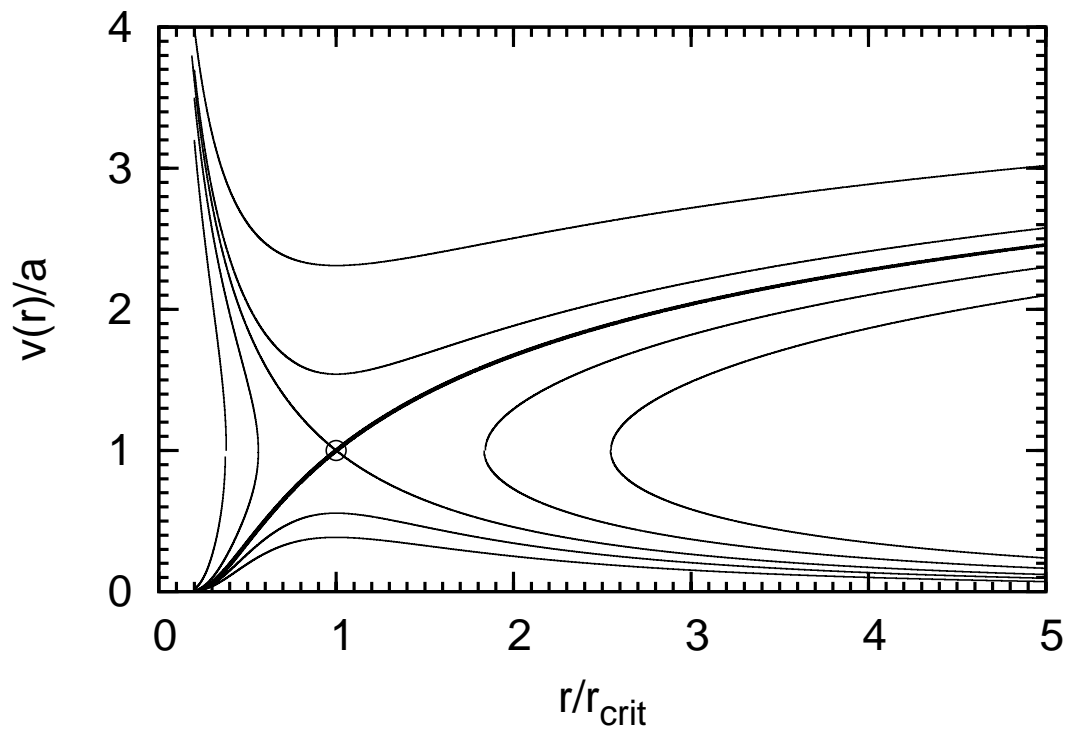


図1 流体に圧力勾配による力と重力が働いている場合の運動方程式の解のトポロジー。  
 $r_c = 5r_0$  の場合である。丸印は臨界点で、太線が臨界解である。

### 4.1.2 エネルギー

単位質量あたりのエネルギーの式は運動エネルギーとポテンシャルエネルギー、エンタルピーの和で表すことができ、

$$e(r) = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_*}{r} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\mathcal{R}T}{\mu} \quad (4.9)$$

である。よって等温流体の場合、次式のように表すこともできる。

$$e(r) = e(r_0) + \frac{v^2 - v_0^2}{2} + \frac{GM_*}{r_0} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right). \quad (4.10)$$

この式はエネルギーが一定ではなく、遠方まで等温に保つために右辺の最後の2項が加わらなければならないことを示している。また、底では  $v^2 < a^2 < v_{\text{esc}}^2$  で  $a^2 \ll v_{\text{esc}}^2$  であり、遠方では  $v^2 > a^2$  と  $v^2 > GM_*/r$  で  $v \gg a$  であるため、エネルギーは  $e(r_0) \simeq -GM_*/r$  から  $e(r \rightarrow \infty) \simeq v^2/2$  に増大する。これは負から正に増えている。付加されたエネルギーは流体を重力ポテンシャルの井戸から脱出させ、運動エネルギーを与え、さらに等温に保つ。

### 4.1.3 密度分布における静水圧平衡との比較

遷音速解の密度分布を導出し、静水圧平衡の密度分布と比較する。

(4.8) 式の積分定数は臨界点  $(r_c, v_c)$  から求めることができ、次式の遷音速解を得る。

$$v \exp\left(-\frac{v^2}{2a^2}\right) = a \left(\frac{r_c}{r}\right)^2 \exp\left\{-\frac{2r_c}{r} + \frac{3}{2}\right\} \quad (4.11)$$

$r = r_0$  とすると、 $v_0 \ll a$  であるので、

$$\begin{aligned} v_0 &\simeq a \left(\frac{r_c}{r_0}\right)^2 \exp\left\{-\frac{2r_c}{r_0} + \frac{3}{2}\right\} \\ &= a \left(\frac{v_{\text{esc}}(r_0)}{2a}\right)^4 \exp\left\{-\frac{v_{\text{esc}}^2(r_0)}{2a^2} + \frac{3}{2}\right\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

この  $v_0$  を初速度とする解は遷音速解である  $r \rightarrow \infty$  の速度は (4.8) 式より  $v(r \rightarrow \infty) \simeq 2a \sqrt{\ln(r/r_0)}$  となり、無限に増大する。この結果は温度一定の仮定によるものである。

(4.11) 式を (4.12) 式で割り, (4.1) 式より  $r^2 v \rho = r_0^2 v_0 \rho_0$  を用いて  $v$  を消去すると, 密度分布を得る.

$$\frac{\rho}{\rho_0} \exp \left\{ +\frac{1}{2} \left( \frac{v_0 \rho_0 r_0^2}{a \rho r^2} \right)^2 \right\} = \exp \left\{ -\frac{GM_*}{a^2} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \right\} \quad (4.13)$$

ここで, 等温大気の静水圧平衡の密度分布を求める. 静水圧平衡の式 (3.4) 式を理想気体の状態方程式 (3.5) 式を用いて圧力勾配を変形し次式を得る.

$$\frac{r^2}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{GM_*}{a^2} \quad (4.14)$$

$a = (RT/\mu)^{1/2}$  は等温音速である. これを積分すると静水圧平衡の密度分布の式が得られる,

$$\frac{\rho(r)}{\rho_0} = \exp \left\{ -\frac{GM_*}{a^2} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \right\} \quad (4.15)$$

$v_0 \ll a$  の場合, (4.15) 式は (4.13) 式と等しくなる. つまり亜音速領域の密度構造は静力学大気によく似ていると言える. これは運動方程式からも示すことができる. 亜音速領域では運動方程式 (4.2) 式の第一項  $v dv/dr$  の項が圧力  $(1/\rho) dp/dr$  に比べて無視できるため静力学平衡の式と同じになる. つまり, 音速点より近傍では密度構造は主に静力学平衡によって決められ, 音速点より遠方では主に速度増加を作る力によって決められる.

#### 4.1.4 散逸フラックス

単位時間あたりに惑星から散逸する大気の質量を散逸フラックスと呼び, ここでは,  $\dot{M}$  で表す. (4.13) 式に  $r = r_c$  を代入すると,

$$\rho_c = \rho_0 \exp \left\{ -\frac{GM_*}{a^2} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_c} \right) - \frac{1}{2} \right\} \quad (4.16)$$

等温大気モデルの散逸フラックスは次式で表される.

$$\begin{aligned} \dot{M} &= 4\pi r_c^2 a \rho(r_c) \\ &= 4\pi \rho_0 a r_0^2 \exp \left\{ -\frac{GM_*}{a^2} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_c} \right) - \frac{1}{2} \right\} \\ &= 4\pi \rho_0 a r_0^2 \left\{ \frac{v_{\text{esc}}(r_0)}{2a} \right\}^4 \exp \left\{ -\frac{v_{\text{esc}}^2(r_0)}{2a^2} + \frac{3}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.17)$$



ただし,  $v_0 \ll a$  とする. 臨界点の位置と散逸フラックスの値は等温領域の底と臨界点の間の条件にのみに依存する.

#### 4.1.5 流体力学的散逸条件

$r_c = GM/2a^2 > r_0$  は, 散逸パラメータを用いて次のように表すことができる.

$$\lambda_0 > 2. \quad (4.18)$$

これを満たさない場合, 臨界点は底の下にある. つまり, (4.18) 式は流体力学的散逸条件の下端である.

(3.11), (4.18) 式から, 等温の場合の流体力学的散逸条件は (4.18) 式である.

## 4.2 ポリトロープ大気モデル

温度勾配の存在する流体力学的散逸モデルであるポリトロープ大気モデルについて論じる. 温度勾配は新たな圧力勾配を運動方程式に加え, それにより速度分布は変わる. また温度が  $r$  に依存するため, 音速も  $r$  に依存し, 臨界点の位置とそれに伴って散逸フラックスにも影響を及ぼす.

### 4.2.1 基礎方程式と臨界点

ポリトロープ大気モデルの基礎方程式は, (3.5), (4.1), (4.2) 式と理想気体のポリトロープ関係式 (3.2), (3.3) 式である.

(4.2) 式の圧力勾配の項は, (3.3) 式から  $d \ln p = \Gamma \ln \rho$  であることに注意し, (3.5), (4.1) 式を使って圧力勾配を変形し

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{p}{\rho} \frac{d \ln p}{dr} = \frac{\Gamma RT}{\mu} \left\{ -\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} - \frac{2}{r} \right\} \quad (4.19)$$

したがって, 運動方程式 (4.2) 式は次式のように変形できる.

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{\Gamma RT}{\mu} \left\{ -\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} - \frac{2}{r} \right\} + \frac{GM_*}{r^2} = 0. \quad (4.20)$$

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \left\{ \frac{2\Gamma a^2}{r} - \frac{GM_*}{r^2} \right\} / \{v^2 - \Gamma a^2\}. \quad (4.21)$$

臨界点  $r_c$ , 臨界速度  $v(r_c)$  は (4.21) 式の分子=0, 分母=0 とすることによって次のように得られる.

$$r_c = \frac{GM_*}{2\Gamma a^2(r_c)}. \quad (4.22)$$

$$v^2(r_c) = \Gamma a^2(r_c) = \frac{GM_*}{2r_c} = \frac{v_{\text{esc}}^2(r_c)}{4}. \quad (4.23)$$

上記より,  $a$  が  $\sqrt{\Gamma}a$  になったことを除いて等温大気モデルと同じである. しかし, 非等温流体では等温音速  $a$  は  $r$  に依存しているために解析解をもっていないことに注意する.

#### 4.2.2 エネルギー

運動方程式 (4.20) 式の圧力勾配の項はポリトロープ関係式  $p \propto (p/\rho)^{\Gamma/\Gamma-1}$  を用いて次式のようにできる.

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{p}{\rho} \frac{d \ln p}{dr} = \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{p}{\rho} \frac{d \ln(p/\rho)}{dr} = \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{d}{dr}(p/\rho). \quad (4.24)$$

ただし  $\Gamma \neq 1$  とし, 以下でも同様とする. これは次式を与える.

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{d}{dr} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \frac{GM_*}{r^2} = \frac{d}{dr} \left\{ \frac{v^2}{2} + \left( \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) \frac{\mathcal{R}T}{\mu} - \frac{GM_*}{r} \right\} = 0. \quad (4.25)$$

したがって流体力学的散逸するポリトロープ大気は一定値のパラメーターを持っていることを意味し, これを  $e_\Gamma$  とする.

$$e_\Gamma \equiv \frac{v^2}{2} + \left( \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) \frac{\mathcal{R}T}{\mu} - \frac{GM_*}{r}. \quad (4.26)$$

$e_\Gamma$  は時間・空間座標に依存しない保存量となる. 以降慣習に従い, エネルギー定数と呼ぶ. これは運動エネルギー (第一項), 熱エネルギーとポリトロープ関係を満たすためのエネルギー流入の項 (第二項), ポテンシャルエネルギー (第三項) を含んでいる.

ここで, 遷音速解が存在する条件を求める. 遷音速解が存在する場合, 亜音速で出発した流体は無限遠で超音速の有限値  $v_\infty$  をとる. よって質量連続の式 (4.1) 式より  $\rho(r \rightarrow \infty) = 0$

である。これとポリトロプ関係式  $T \propto \rho^{\Gamma-1}$  から  $T(r \rightarrow \infty) = 0$  である。さらに星から極めて遠方では、ポテンシャルエネルギーはゼロになるため、エネルギー定数  $e_\Gamma$  は次式のような  $r \rightarrow \infty$  での運動エネルギーになる。

$$e_\Gamma = e(r \rightarrow \infty) = \frac{v_\infty^2}{2} \quad (4.27)$$

流体が惑星から脱出するためにはエネルギー定数は正でなくてはならない。

$e_\Gamma$  は (4.26) 式を  $r_c$  で適用し, (4.22), (4.24) 式を用いて以下のように表すことができる。

$$e_\Gamma = \left( \frac{5-3\Gamma}{\Gamma-1} \right) \cdot \frac{\Gamma a_c^2}{2} = \left( \frac{5-3\Gamma}{\Gamma-1} \right) \cdot \frac{v_c^2}{2} = \left( \frac{5-3\Gamma}{\Gamma-1} \right) \frac{GM_*}{4r_c}. \quad (4.28)$$

これより  $e_\Gamma > 0$  であるので,  $\Gamma$  は  $1 < \Gamma < 5/3$  の範囲にある必要がある。

次にポリトロプ大気へのエネルギー流入について論じる。流体のエネルギー (4.9) 式は  $e_\Gamma$  を用いると次式のように表される。

$$e(r) = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_*}{r} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\mathcal{R}T}{\mu} = e_\Gamma - \frac{\gamma-\Gamma}{(\gamma-1)(\Gamma-1)} \frac{\mathcal{R}T(r)}{\mu}. \quad (4.29)$$

ポリトロプ大気への単位質量あたりの全エネルギー流入は次式で表される。

$$\Delta e = e(\infty) - e(r_0) = \frac{\gamma-\Gamma}{(\gamma-1)(\Gamma-1)} \frac{\mathcal{R}T(r_0)}{\mu}. \quad (4.30)$$

$\Gamma \neq 1$  に関して (4.31) 式を微分することによって, 大気へのエネルギー流入と温度勾配の間の関係を得ることができる。

$$\frac{de}{dr} = - \frac{\gamma-\Gamma}{(\gamma-1)(\Gamma-1)} \frac{\mathcal{R}}{\mu} \frac{dT}{dr}. \quad (4.31)$$

$\Gamma = \gamma$  の場合, 大気へのエネルギー流入はない。これはポリトロプが断熱膨張に対応していることに一致している。この場合, 重力に束縛された大気において流体のエネルギー  $e(r_0)$  は負で, 流体は重力の井戸から脱出できない。  $1 < \Gamma \leq \gamma$  の場合, エネルギー流入は正であり, 温度は外に向かって減少する。  $\Gamma = 1$  の場合は等温であり, 全エネルギー流入は無限大となる。このため, 流体は無限に加速される。(4.31) 式は, ある  $\Gamma$  を持っているポリトロピックな流体で, 温度減率が大きい気層でエネルギー流入量が大きくなることを示している。

## 4.2.3 速度分布と温度分布

速度分布は運動方程式 (4.20) 式もしくはエネルギー方程式 (4.26) 式を解くことによって得ることができるが、ここでは後者を用いて導出する。(4.26) 式はポリトロピックな関係を用いて導出される  $a^2 = a_c^2(T/T_c) = a_c^2(\rho/\rho_c)^{\Gamma-1}$  と質量連続の式を用いて、 $r$  と  $v$  のみで次式のように表すことができる。

$$e_\Gamma = \frac{v^2}{2} + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} a_c^2 \left( \frac{r}{r_c} \right)^{2-2\Gamma} \left( \frac{v}{v_c} \right)^{1-\Gamma} - \frac{v_{\text{esc}}^2(r_c) r_c}{2 r}. \quad (4.32)$$

この式に (4.24) 式の関係と無次元量

$$x = r/r_c, w = v/v_c \quad (4.33)$$

を導入すると次式を得る。

$$\frac{v_c^2}{2} w^2 + \frac{1}{\Gamma-1} v_c^2 x^{2-2\Gamma} w^{1-\Gamma} - \frac{2v_c^2}{x} = e_\Gamma. \quad (4.34)$$

これに (4.28) 式を導入すると、 $x$  と  $w$  の関係を決定する次式を表すことができる。

$$w^{\Gamma+1} - w^{\Gamma-1} \left( \frac{4}{x} + \frac{5-3\Gamma}{\Gamma-1} \right) + \frac{2}{\Gamma-1} x^{2-2\Gamma} = 0. \quad (4.35)$$

$w \ll 1$  の場合、第一項は無視することができ次式を得る。

$$w \simeq \left\{ \frac{2}{\Gamma-1} x^{3-2\Gamma} / \left( 4 + \frac{5-3\Gamma}{\Gamma-1} x \right) \right\}^{1/(\Gamma-1)}. \quad (4.36)$$

これは臨界点から惑星側に十分離れた場所での速度分布である。一方、惑星から十分離れた遠方  $x \rightarrow \infty$  の場合、 $\Gamma > 1$  で  $w \rightarrow \sqrt{(5-3\Gamma)/(\Gamma-1)}$  となるので、遠方での速度は、

$$v_\infty^2 = \left( \frac{5-3\Gamma}{\Gamma-1} \right) v_c^2 = \left( \frac{5-3\Gamma}{\Gamma-1} \right) \frac{GM_*}{2r_c} \quad (4.37)$$

となる。

図 2 は  $\Gamma = 7/6, 4/3, 3/2$  のそれぞれの場合に (4.35) 式を数値的に解いたときの流体の速度、温度分布である。上図は  $M(r) = v(r)/\sqrt{\Gamma}a(r)$  で定義したマッハ数での速度分布、下図は

臨界点での温度で規格化した温度分布である。温度分布  $T(r)$  はポイトロープ関係式 (3.3) 式と質量連続の式を用いて  $r$  と  $u$  を用いて次式のように表せる。

$$\frac{T(r)}{T(r_c)} = \left(\frac{v}{v_c}\right)^{1-\Gamma} \left(\frac{r}{r_c}\right)^{2-2\Gamma} \quad (4.38)$$

$1 < \Gamma < 5/3$  について考える。  $\Gamma$  がより大きい場合、すなわちエネルギー流入がより少ない場合、温度は距離が大きくなるにつれてより速く減少する。温度が外側に向けて減少するので、速度はマッハ数よりも外側に向かってゆっくり変化する。  $v(r)$  は  $1 < \Gamma < 3/2$  のとき増大し、  $3/2 < \Gamma < 5/3$  のとき減少する。  $\Gamma = 3/2$  のとき速度は一定である。ここでこの理由について説明する。これはエネルギー流入  $de/dr$  に流体のエンタルピー損失を足したものが、全てポテンシャルエネルギーの増加に使われ、加速に使われるエネルギーが残らないことを意味している。  $T$  は  $r^{-1}$  に比例し、ポイトロピックな関係  $T \propto \rho^{\Gamma-1}$  より  $\rho \propto r^{1/(1-\Gamma)}$  である。また  $v = \text{一定}$  の場合、質量保存は  $\rho \propto r^{-2}$  を要請する。これら二つの  $\rho$  の条件は  $1/(1-\Gamma) = -2$ 、したがって  $\Gamma = 3/2$  の場合満たされる。

したがって、  $1 < \Gamma < 5/3$  の場合遷音速解は存在する。しかしそのうち  $3/2 < \Gamma < 5/3$  の場合は遠方にマッハ数の増大が音速の減少よりもゆっくりなので、マッハ数で規格化した速度は外に向かって減少する。  $\Gamma = 3/2$  の場合はその速度が一定であるので、流体力学的散逸をしない。したがって加速するつまり流体力学的散逸をする条件は

$$1 < \Gamma < 3/2 \quad (4.39)$$

である。

#### 4.2.4 散逸フラックス

大気の下底の密度  $\rho_0$ 、温度  $T_0$  を与え、さらに  $v_0$  がわかれば散逸フラックス  $\dot{M}$  を計算することができる。大気の下底で (4.38) 式を適用すると (4.33) 式を用いて次式を得る。

$$T_c = T_0 w_0^{\Gamma-1} x_0^{2\Gamma-2} \quad (4.40)$$

さらに (4.40) 式に (4.24) 式を代入すると、

$$\frac{\Gamma R T_0}{\mu} \cdot w_0^{\Gamma-1} x_0^{2\Gamma-2} = \frac{GM_*}{2r_0} \cdot x_0 \quad (4.41)$$

(4.35) 式と (4.41) 式から  $x_0$ 、  $w_0$  を求めることができる。

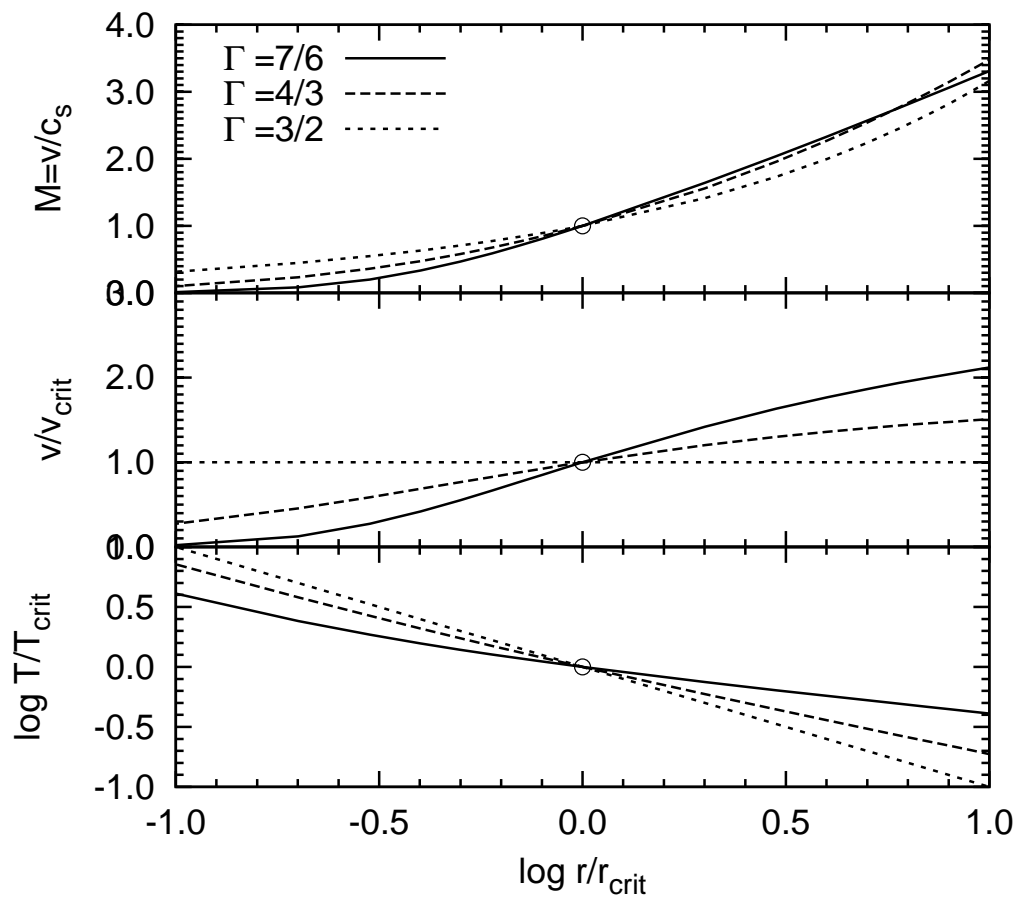


図2  $\Gamma = 7/6, 4/3, 3/2$  においてポリトロップ大気モデルの速度分布と温度分布を規格化した距離  $x = r/r_c$  の関数で表したもの。マッハ数を用いた全ての速度則は遷音速だが、 $\Gamma = 3/2$  に関して  $\text{km s}^{-1}$  の速度が一定で、 $3/2 < \Gamma < 5/3$  (図はない) は外向きに減少する。

(4.24) 式から  $v_c = \sqrt{\Gamma \mathcal{R} T_c / \mu}$  が得られ、これに (4.40) 式を代入すると底での速度  $v_0$  を得ることができる。

$$\begin{aligned} v_0 &= w_0 v_c \\ &= w_0 \sqrt{\frac{\Gamma \mathcal{R} T_c}{\mu}} \\ &= \sqrt{\frac{\Gamma \mathcal{R} T_0}{\mu}} \cdot w_0^{(\Gamma+1)/2} x_0^{\Gamma-1}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

であり、散逸フラックスは

$$\dot{M} = 4\pi r_0^2 \rho_0 \sqrt{\frac{\Gamma \mathcal{R} T_0}{\mu}} \cdot w_0^{(\Gamma+1)/2} x_0^{\Gamma-1} \quad (4.43)$$

である。

ここで、底での速度が臨界点での速度よりも十分小さいとき、したがって  $w_0 \ll 1$  の場合は (4.36) 式を用いて  $w_0$  を  $x_0$  で表すことができる。

$$x_0 \simeq \left\{ \frac{8\Gamma \mathcal{R} T_0 / \mu}{v_{\text{esc}}^2(r_0)} - 4\Gamma + 4 \right\} / (5 - 3\Gamma). \quad (4.44)$$

このとき臨界点は次式で表される。

$$r_c = \frac{(5 - 3\Gamma)r_0}{\left\{ 4 - 4\Gamma + 8\Gamma \mathcal{R} T_0 / \mu v_{\text{esc}}^2(r_0) \right\}}. \quad (4.45)$$

大気の底は  $0 < x_0 < 1$  の範囲にあるので、(4.44) 式は次式を導く。

$$\frac{\Gamma - 1}{2\Gamma} < \frac{\mathcal{R} T_0}{\mu v_{\text{esc}}^2(r_0)} < \frac{\Gamma + 1}{8\Gamma}. \quad (4.46)$$

また  $w_0$  は (4.41) 式によって与えられる。

$$w_0 = \left\{ \frac{v_{\text{esc}}^2(r_0)}{4\Gamma \mathcal{R} T_0 / \mu} \right\}^{1/(\Gamma-1)} \cdot x_0^{(3-2\Gamma)/(\Gamma-1)}. \quad (4.47)$$

(4.44), (4.47) 式の値を (4.43) 式に代入することによって、ポリトロップ大気モデルに関する散逸フラックスは次のように見積もることができる。

$$\dot{M} \simeq 4\pi r_0^2 \rho_0 \sqrt{\frac{\Gamma \mathcal{R} T_0}{\mu}} \left\{ \frac{v_{\text{esc}}^2(r_0)}{4\Gamma \mathcal{R} T_0 / \mu} \right\}^{(\Gamma+1)/2(\Gamma-1)} \left[ \left\{ \frac{8\Gamma \mathcal{R} T_0 / \mu}{v_{\text{esc}}^2(r_0)} - 4\Gamma + 4 \right\} / \{5 - 3\Gamma\} \right]^{(5-3\Gamma)/2(\Gamma-1)} \quad (4.48)$$

この式は散逸フラックスが物質固有の比熱比  $\gamma$  に依らず、エネルギー流入に依存する  $\Gamma$  の値に依っていることを示している。

#### 4.2.5 流体力学的散逸条件

散逸パラメータを用いてポリトロープ大気モデルにおける流体力学的散逸をする条件を示し, (4.39) 式と同じ結論になることを示す. ここで  $r_c = GM/2\Gamma a^2(r) > r_0$ , つまり臨界点が惑星表面より遠方にある場合,  $T_c/T_0 < 1$  であるので

$$\lambda_0 > 2\Gamma \quad (4.49)$$

が成り立つ. (4.49) 式と (3.11) 式より

$$2\Gamma < \lambda_0 < \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \quad (4.50)$$

である. これは流体力学的散逸をする条件である.  $1 < \Gamma < 5/3$  の場合について考えていたので, (4.50) 式からも (4.39) 式を導くことができる.



## 5 ジーンズ散逸

平衡状態で分布する気体分子の内、一部の分子の速度はある割合で惑星の脱出速度を上回っている。そのような分子が他の気体分子と衝突することのない大気上端にあり、上向きを持っていけば、宇宙空間に逃げる。ことができる。このような散逸プロセスはジーンズ散逸と呼ばれる。

本章ではジーンズ散逸の物理プロセスを理解し、その散逸フラックスを見積もる。

### 5.1 外圏と外圏底

ジーンズ散逸を定量的に議論するために外圏と外圏底を定義する。外圏とは気体分子が他の分子と一度も衝突せずに宇宙空間に逃げられる領域のことを指し、外圏の下端を外圏底と言う。外圏底の位置  $r_e$  は次式で定義される。

$$\sigma \int_{r_e}^{\infty} n(r) dr = 1. \quad (5.1)$$

ここで  $n$  は  $r$  における分子数密度、 $\sigma$  は気体分子の衝突断面積である。この式は外圏に底面積が気体分子の衝突断面積に等しい鉛直な気柱を立てると、その中には平均 1 つしか気体分子が含まれないことを意味する。

### 5.2 散逸フラックス

散逸量フラックスは、外圏で密度が最も高いのは外圏底なので外圏底から逃げていく分子数で近似できる。

ここで平行平面大気を仮定すると、気体分子の衝突断面積にかかる圧力と気体分子の重力が等しいので、外圏底では

$$p(r_e) = \frac{mg}{\sigma} \quad (5.2)$$

が成り立ち、

$$n(r_e) = \frac{mg}{\sigma kT(r_e)} \quad (5.3)$$

である。

平衡状態にある理想気体では気体分子の運動はマクスウェル分布に従う。分子の速さが  $v$  から  $v+dv$  の間にある確率  $f(v)$  は次式で与えられる。

$$f(v)dv = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT(r_e)} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT(r_e)}\right) v^2 dv. \quad (5.4)$$

$r = r_e$  に仮想的な水平面を考える。この面の単位面積・単位時間あたりに上向きに通過する、速さが  $v$  から  $v+dv$  の気体分子の数は、分子運動の等方性<sup>\*1</sup> を考慮すると、次のように書くことができる。

$$\frac{1}{4} n(r_e) f(v) v dv = \pi n(r_e) \left( \frac{m}{2\pi kT(r_e)} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT(r_e)}\right) v^3 dv. \quad (5.5)$$

これを  $v_e < v < \infty$  で積分すると、外圏底における単位時間・単位面積あたりの気体分子数  $F_e$  を求めることができる。散逸パラメータを使うと  $F_e$  は次式のように書くことができる。

$$F_e = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2G\bar{\rho}}{3}} (\lambda(r_e) + 1) \sqrt{\lambda(r_e)} \exp(-\lambda(r_e)). \quad (5.6)$$

ここで、 $\bar{\rho}$  は外圏底よりも内側の惑星の総質量をエクソベースより内側の体積で割る平均密度で、惑星の平均密度とほぼ同じである。この値は散逸パラメータでほとんど決まる。(5.6) 式より、 $r_e$  の球面からジーンズ散逸をする単位時間あたりの散逸フラックスは次式のように表される。

$$\dot{M} = \frac{4\pi r_e^2 \mu}{\sigma} \sqrt{\frac{2G\bar{\rho}}{3}} (\lambda + 1) \sqrt{\lambda} \exp(-\lambda) \quad (5.7)$$

ジーンズ散逸は大気が重力に十分に束縛されている状況を考えているので、散逸パラメータは 1 以下は考えないことにする。

<sup>\*1</sup> 水平面を上向きに通過する分子は全体の 1/2。また一分子の鉛直方向の経路長は  $r \rightarrow r/\cos\theta$  となり、上半球で積分すると鉛直上向きに通過する分子数は水平面を上向きに通過する分子数の 1/2 に等しくなる。つまり数密度は  $n(r_e)/4$  と見積もることができる。

## 6 モデルの適用

4章で論じたモデルにパラメータを適用し、散逸フラックスを算出する。各パラメータの増減が散逸パラメータにどのような影響を及ぼすか見ていく。底の温度、大気の間平均分子量、惑星質量をパラメータとして変える。温度変化は惑星とその中心恒星との距離の違い、平均分子量の違いは大気組成の違い、惑星質量の変化は重力の変化にそれぞれ対応し、多種多様な惑星に対して大まかな議論を行うことができるだろう。

以下6章では次の仮定と条件を用いた。大気の下はほぼ静水圧平衡(大気の下では  $v_0 \ll v_c$ )で、その位置は惑星半径と仮定した。

それぞれH, H<sub>2</sub>あるいはH<sub>2</sub>Oを想定した一成分大気とし、温度は  $T = 300, 1000, 2000, 3000\text{K}$  をそれぞれに与える。地球質量の惑星の大気下の密度  $\rho_0$  は静水圧平衡を仮定し、大気質量と惑星サイズから算出した。大気質量は現在の地球の海水に含まれるH<sub>2</sub>O分子の総個数に等価なH, H<sub>2</sub>あるいはH<sub>2</sub>O量を与える。大気質量は惑星質量に比例させ、惑星密度は  $5.0 \times 10^3 \text{kg/m}^3$  とする。

6.1節では平均分子量  $\mu$ , 6.2節ではエネルギー流入に依存する  $\Gamma$ , 6.3節では底の温度  $T_0$  と惑星質量に対する流体力学的散逸による散逸フラックスを(4.17)式と(4.48)式から算出し、それぞれについて考察する。また、6.4節では流体力学的散逸とジーンズ散逸の規模の比較をするために(5.7)式も用いた。

### 6.1 平均分子量に対する散逸フラックスの変化

$T = 1000\text{K}$  の (4.15) 式において  $\mu = 1.0 \times 10^{-3}, 2 \times 10^{-3}, 1.8 \times 10^{-2} \text{kg/mol}$  を適用し、それぞれの平均分子量に対する散逸フラックスを算出し考察する。

図 3 は横軸に惑星質量, 縦軸に散逸フラックスをとった計算結果である。

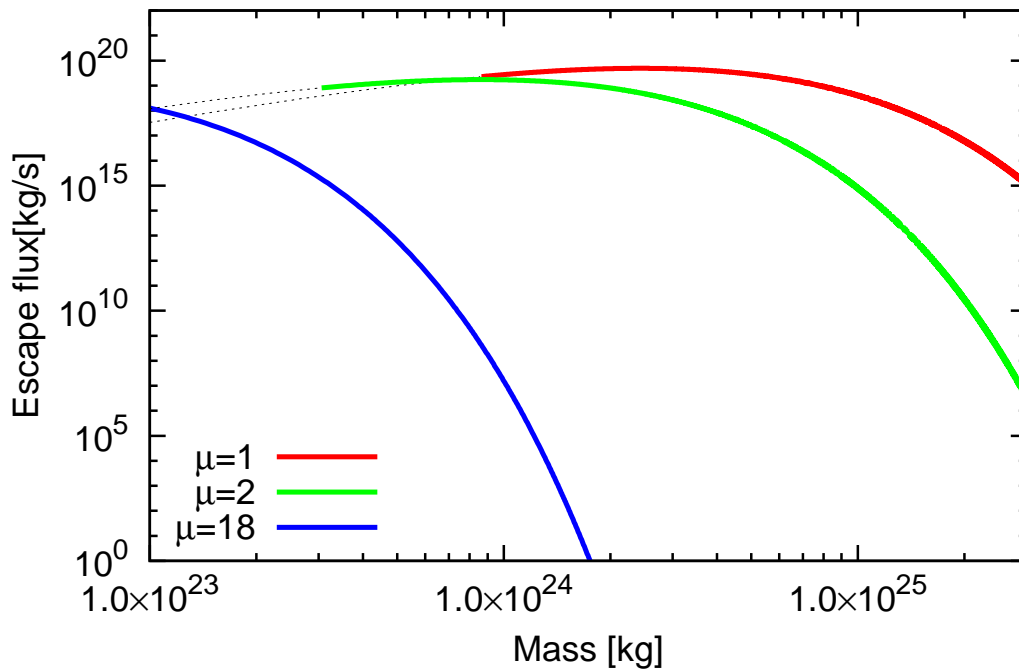


図 3 それぞれの平均分子量に対する散逸フラックスの図． $T = 1000\text{K}$ ,  $\Gamma = 1$  である。

点線は (4.18) 式 (等温の場合) の範囲外の領域である。(4.15) 式を導出する際に用いた近似  $v_0 \ll v_c$  が成立しない領域, つまり実線部分において惑星質量に伴い質量フラックスの増加している領域は無視する。以下, 6.2, 6.3, 6.4 節でも同様である。

平均分子量に対して惑星質量が小さすぎると, 大気は重力的に束縛されない。(4.15), (4.17) 式はこの範囲を決める。これを満たす範囲内において, 平均分子量が小さいほど散逸フラックスが大きいことが図 3 からわかる。

## 6.2 底の温度に対する散逸フラックスの変化

$\mu = 2.0 \times 10^{-3} \text{kg/mol}$ ,  $\Gamma = 1$  (等温大気モデル) において  $T = 300, 1000, 2000, 3000 \text{K}$  を適用し、それぞれの平均分子量に対する散逸フラックスを算出し考察する。図 4 は横軸に惑星質量、縦軸に散逸フラックスをとった計算結果である。

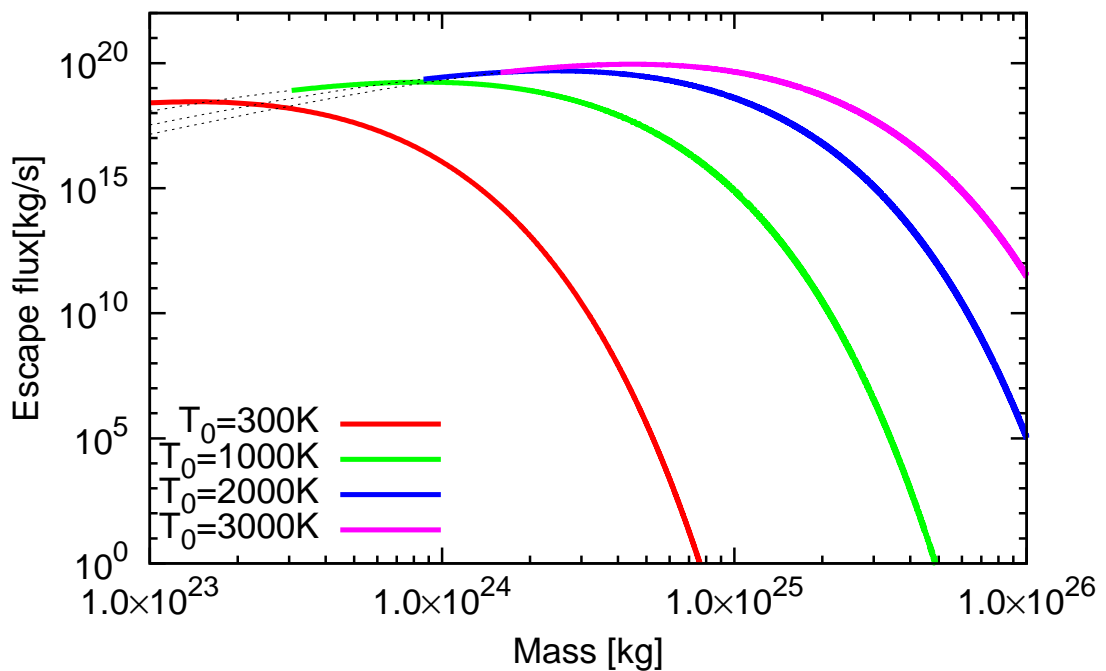


図 4 それぞれの底の温度に対する散逸フラックスの図。  $\mu = 2 \text{g/mol}$ ,  $\Gamma = 1$  である。

底が高温になるほど分子の熱運動が大きくなり、ある質量を持つ惑星に対して分子が重力を振りきって脱出しやすくなる。そのため惑星質量が小さすぎると、大気は重力的に束縛されない。この場合、この範囲を決めるのが (4.18) 式であると考えられる。これを満たす範囲内において、底が高温であるほど散逸フラックスが大きいことが図 4 からわかる。

### 6.3 $\Gamma$ に対する散逸フラックスの変化

$\mu = 2.0 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ ,  $T = 1000 \text{ K}$  において  $\Gamma = 1, 1.05, 7/6, 4/3, 7/5$  を適用し, それぞれの  $\Gamma$  に対する散逸フラックスを算出し考察する. 図 5 は横軸に惑星質量, 縦軸に散逸フラックスをとった計算結果である.

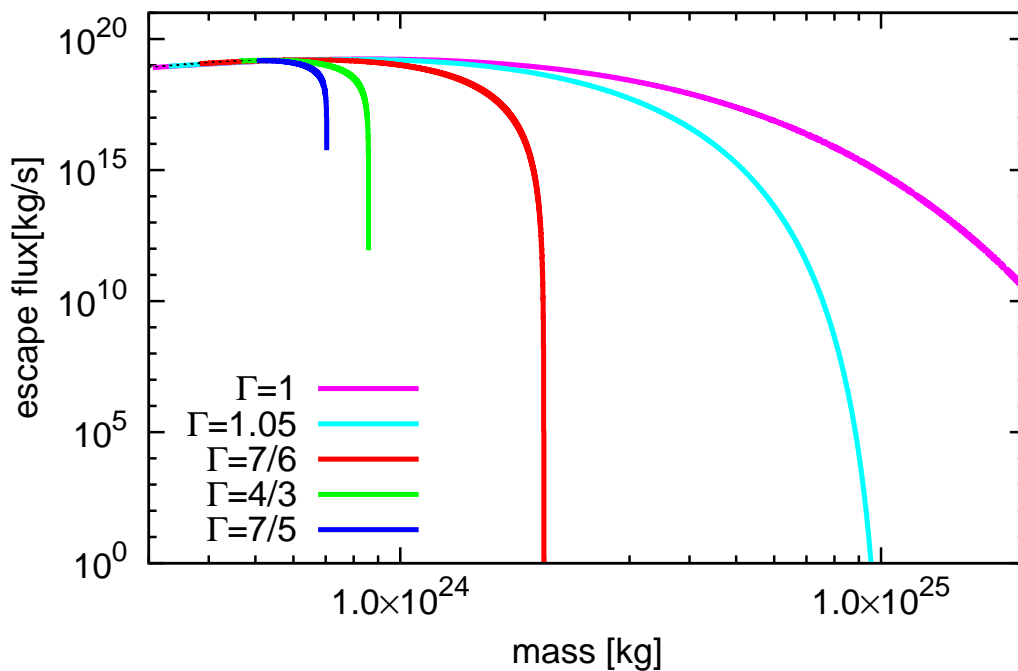


図 5 それぞれ  $\Gamma$  に対する散逸フラックスの図.  $\mu = 2 \text{ g/mol}$ ,  $T = 1000 \text{ K}$  である.

エネルギー流入に依存する  $\Gamma$  を小さくするほど, 散逸フラックスは増大する. またある質量を持つ惑星へのエネルギー流入が増大すると, ある値から急に流体力学的散逸が発生すること, さらに  $\Gamma$  の値を小さくするほど流体力学的散逸できる惑星質量の範囲も大きくなることが図 5 から見てとることができる. これらはポリトロップ大気モデルの流体力学的散逸条件の底の散逸パラメータの上限 (3.11) 式に起因し,  $\Gamma$  が小さくなるほど上限が大きくなるためである.

#### 6.4 流体力学的散逸とジーンズ散逸の散逸規模の比較

$\mu = 2$ ,  $T = 1000\text{K}$  において,  $\Gamma = 1, 1.05, 7/6, 4/3, 7/5$  を適用した流体力学的散逸とジーンズ散逸の規模を比較するために, 仮定した大気が全て散逸する時間を算出し考察する. 図 6 は横軸に惑星質量, 縦軸に散逸時間をとった計算結果である.

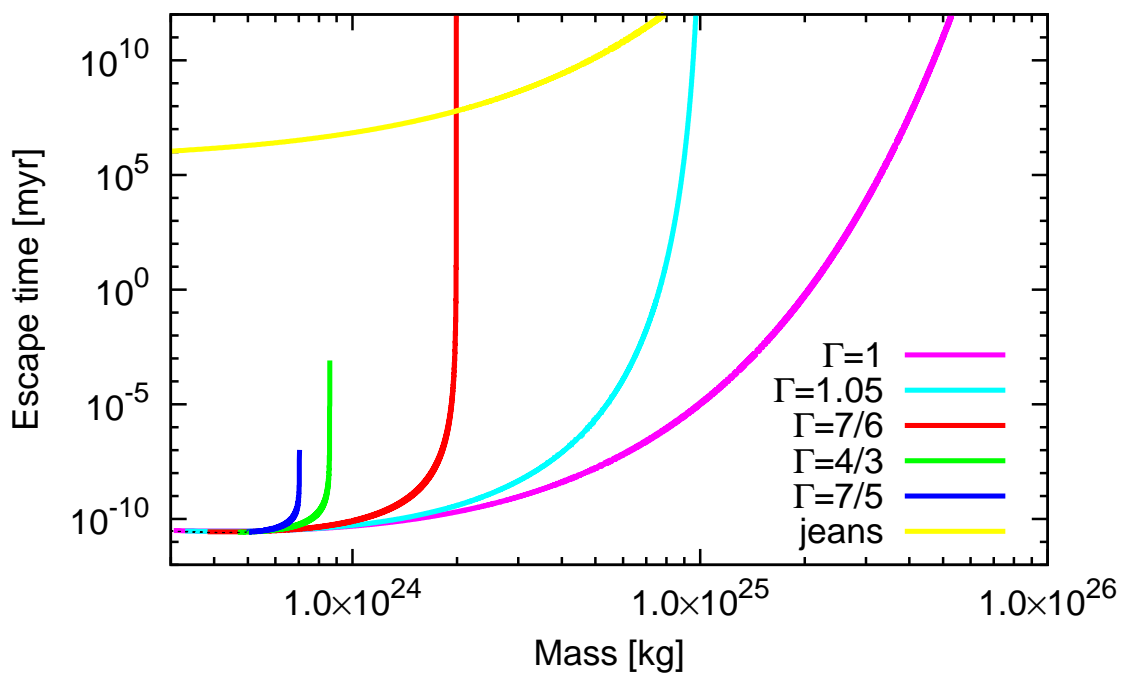


図 6 それぞれの散逸プロセスによる仮定した大気的全散逸時間の図.  $\mu = 2\text{g/mol}$ ,  $T = 1000\text{K}$  である.

流体力学的散逸の起こっている場合, 流体力学的散逸の散逸規模はジーンズ散逸と比べて  $10^{-10}$  倍程度と非常に小さくなった. これは, 流体力学的散逸は大気全体が圧力勾配により加速され, 静水圧平衡が崩れて流出していくプロセスなのに対し, ジーンズ散逸は静水圧平衡状態で大気上端から分子がマクスウェル分布に従い散逸するプロセスであるため, ジーンズ散逸の散逸フラックスは流体力学的散逸と比べると非常に小さくなっていると考えられる. このように散逸フラックスの規模の違いはそれぞれの散逸プロセスの違いから定性的に理解することができる. また  $\Gamma$  の値がより大きいため流体力学的散逸の

起こらない領域では、ジーンズ散逸のみが起こることもわかる。



## 7 まとめ

熱エネルギーが、惑星重力による束縛エネルギーよりも大きくなると流体力学的散逸が起こる。散逸パラメータにおける流体力学的散逸条件は、静水圧平衡が無限度で破れていることと、臨界点が惑星表面より遠方にあることから求められる。流体力学的散逸をする流体の速度を記述する方程式は、境界条件に依存して様々な解を得られることを示した。その解の中で流体力学的散逸する流体の速度を表しているのは、大気の下から遠方に向かって亜音速から超音速に増大する遷音速解のみである。遷音速解を満たす流体のエネルギーは遠方に向かって負から正に増大する。つまり、流体力学的散逸をする流体はエネルギー流入を必要とする。このエネルギー流入は流体の熱エネルギーを有限に保ち、さらに重力から脱出に使われ、流体の運動エネルギーへ転換される。ポリトロップ大気モデルの場合は  $1 < \Gamma < 3/2$  のときに流体力学的散逸をすることができる。

流体力学的散逸における散逸フラックスは、底の温度が増えると増大し、散逸気体の平均分子量と惑星質量が増えると減少する。また  $\Gamma$  の値がより小さいときに散逸する気体へのエネルギー流入が増大し、散逸フラックスを増大させる。 $\Gamma$  を決めると流体力学的散逸できる惑星質量の範囲を求めることができ、その範囲の上限に近づくと急激に散逸フラックスは減少する。

## 謝辞

この論文を作成するにあたって、多くの方にお世話になりました。

指導教官である倉本圭教授には研究テーマの決定から本論文の内容に至るまで、幅広くご指導を頂きました。

また山下達也氏には多忙にも関わらず論文のチェックをして頂き、さらに多くの助言を頂きました。

惑星宇宙グループの皆様には多くの助言や叱咤激励の言葉を頂き、研究に対する意欲を高めさせて頂きました。

皆様に厚く御礼申し上げます。

## 付録 A Henny J.G.L.M.Lamer and Joseph P.Cassinelli (1999) p.60-111 部分訳

### A.1 等温風の場合

この章の目的は恒星風モデルのいくつかの基本的な性質を記述し、説明することである。これは理想化された単純な風に関する方程式を導くことで成される。これらの単純なモデルについては運動方程式を簡単に解くことができ、その結果風の速度と密度構造がわかる。これらの解は、速度と密度が風の中でどのように種々の力に依存しているかを示している。それらはまた定常的なモデルの質量損失率とその解によって一意的に決められることも示している。つまり風の下部境界条件と力、エネルギーの収支の形を与えると、固有の質量損失率をもった物理的に現実的な解が 1 つ得られる。この章で論じられる単純な解は、このいわゆる臨界解がどのように風を支配している種々の力とエネルギーに依っているのか示している。単純化されたモデルしかこの章では考察しないが、ここから得られる結論は後の章で述べられるより複雑で細かいモデルに対しても定性的に妥当である。

A.1 節は気体の圧力によって外向きの力が与えられている可能な限り最も単純な等温的な風のモデルを示す。A.2, A.3, A.4 節では等温的なモデルに他の力を付け加えた場合の影響について考察する。まず  $r^{-2}$  や  $vdv/dr$  に比例する力のような単純な解析的な式として考え、その後より一般的な場合について考える。A.5 節はこの章の結論を与える。

#### A.1.1 気体圧力のみを含む等温的な風

この節では、ガスが二つの力にしか従わないときの等温的な恒星風の構造を記述する。二つの力とは内向きの重力と、外向きの気体の圧力勾配である。運動量方程式は境界条件に依って多くの解を持つ。しかしそのうちの 1 つの臨界解のみが風の下部境界において亜音速で出発し、遠方で超音速に到達する。質量損失率は臨界解によって決められる。

## A.1.1.1 運動量方程式と臨界点

一定の質量損失率をもつ時間に依らない恒星風に関して、半径  $r$  の任意の球面を通り抜けるガスの量は一定である。これは質量保存の方程式で表される。

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho(r) v(r) = 4\pi F_m \quad (\text{A.1})$$

ここで  $F_m$  は星からの単位立体角あたり質量フラックスである。

恒星風の気体の運動はニュートンの法則  $f = m \times a$  または  $f = \rho dv/dt$  で表される。ここで  $f$  が単位体積当たりの力であるならば、 $f/\rho$  は単位質量当たりの力になる。風の中で加速を受ける単位質量の速度は、距離  $r$  と時間  $t$  に依る。つまりニュートンの法則での速度勾配は、

$$\frac{dv(r,t)}{dt} = \frac{\partial v(r,t)}{\partial t} + \frac{\partial v(r,t)}{\partial r} \frac{dr(t)}{dt} = v(r) \frac{dv}{dr} \quad (\text{A.2})$$

定常、つまり時間に依らない風では、与えられた距離での速度は時間と共に変化しないので、 $\partial v(r,t)/\partial t = 0$  である。気体圧力と重力の他に風に影響を与える力がないとき、運動方程式は次式になる。

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{GM_*}{r^2} = 0 \quad (\text{A.3})$$

この方程式は定常恒星風での気体の運動ないし運動量を記述している<sup>\*2</sup>。それは通常運動量方程式と呼ばれる。運動量方程式の第1項は加速度であり、これは圧力勾配(第2項)と重力(第3項)によって引き起こされる。熱構造は何らかの仕組みによって一定の温度に保たれると仮定しているので、エネルギー方程式は単に  $T(r) = T = \text{一定}$  である。これはこの節の基本的な仮定である。非等温的な風は次の節で論じられる。もしその流れが理想気体のように振舞うとすると次の方程式に従う。

$$p = \mathcal{R} \rho T / \mu \quad (\text{A.4})$$

ここで  $\mathcal{R}$  は気体定数、 $\mu$  は  $m_H$  を単位として表せる粒子の平均分子量である<sup>\*3</sup>。平均分子量  $\mu$  は一定であると仮定し、太陽組成の物質に関しては  $\mu = 0.602$  という数を使う。圧力

<sup>\*2</sup>  $M_*$  は星の質量

<sup>\*3</sup>  $m_H$  は水素原子質量

勾配による力は、等温的な風に関して次式のように書かれる。

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \frac{dT}{dr} + \frac{\mathcal{R}T}{\mu\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{\mathcal{R}T}{\mu} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \quad (\text{A.5})$$

密度勾配は (A.1) 式によって、速度勾配で表すことができる。

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} - \frac{2}{r} \quad (\text{A.6})$$

(A.6) 式と (A.5) 式を (A.3) 式に代入すると、

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{\mathcal{R}T}{\mu} \left\{ -\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} - \frac{2}{r} \right\} + \frac{GM_*}{r^2} = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \left\{ \frac{2a^2}{r} - \frac{GM_*}{r^2} \right\} / \{v^2 - a^2\} \quad (\text{A.8})$$

が得られる。ここで

$$a = \left( \frac{\mathcal{R}T}{\mu} \right)^{1/2} \quad (\text{A.9})$$

は等温音速であり、等温的な風では一定である。(A.8) 式の下部境界条件は等温領域の底  $r = r_0$  において、 $v(r_0) = v_0$  である。星が等温的なコロナに囲まれているならば、一般に  $r_0$  はだいたい光球面の半径かそれより少し大きい。

運動量方程式 (A.8) 式は  $v(r) = a$  となる点で特異点を持つ。下記で示すが、この特異点はとても重要である。なぜなら質量損失率が定まることを暗に示しているからである。最初に風の構造に関するいくつかの (A.8) 式の直接の帰結を考えてみよう。この式の分子は  $r^{-1}$  と  $r^{-2}$  を含み、距離

$$r = r_c \equiv GM_*/2a^2 \quad (\text{A.10})$$

でゼロになる。この  $r$  を臨界距離もしくは臨界点までの距離と呼ぶ。

$$GM_*/2a^2 > r_0 \quad \text{または} \quad GM_*/2r_0 \equiv \frac{v_{\text{esc}}^2}{4} > a^2 \quad (\text{A.11})$$

であれば、そのような距離は下部境界の外側  $r_c > r_0$  に存在する。もし臨界点が  $r_c < r_0$  に位置するならば、それは等温領域にではなく、その下層に位置する光球面か遷移領域にあるのだろう。その場合では、この章で置いた等温的な風の仮定が妥当でないだろう。 $v(r_c) = a$  にならない限りは、臨界距離での速度勾配はゼロになるだろう。同様に、 $v = a$  のときここで  $r = r_c$  にならない限り、速度勾配は分母 = 0 になるため  $\pm\infty$  になるだろう。つまり、すべ

での距離で正の速度勾配を持つことができる唯一の解は臨界点を經由するものである。これは

$$r_c = \frac{GM_*}{2a^2} \text{において } v(r_c) = a \quad (\text{A.12})$$

を満たす臨界解である。つまり臨界点において、

$$v(r_c) = a = \frac{v_{\text{esc}}(r_c)}{2} \quad (\text{A.13})$$

が成り立つのがわかる。ここで  $v_{\text{esc}} = \sqrt{2GM_*/r_c}$  は臨界点での脱出速度である。  $v(r) = a$  となる点は音速点と呼ばれる。また  $v(r) = v_{\text{esc}}(r)$  となる点は脱出点と呼ばれる。さらに運動量方程式の分子がゼロになる点は、1958年に太陽風に関する方程式を導き解いた Eugene Parker にちなんで Parker Point と呼ばれる。等温的な風において臨界点は音速点と一致するが、これは後に議論するモデルに関しては必ずしも当てはまらない。臨界解は遷音速解である。なぜなら近傍において亜音速で出発し遠方で超音速に達するからである。

(A.8) 式の解のトポロジーは多様な初速  $v(r_0)$  に関する図 (A.1) で示される。  $r < r_c$  つまり (A.8) 式の分子が負になる領域では、速度勾配は  $v(r) < a$  であれば正になり  $v(r) > a$  であれば負になる。同様に  $r > r_c$  つまり (A.8) 式の分子が正になる領域において、速度勾配は  $v(r) < a$  であれば負になり、  $v(r) > a$  であれば正になる。曲線 1 は、亜音速で出発し臨界点を通り、遠方で超音速の値に達する解である。曲線 2 もまた臨界点を通るが、超音速で出発している。曲線 3 は下部境界速度  $v_0$  が小さすぎて臨界点に達することのできない場合の解である。つまり、それは  $r_c$  において極大値をとっても亜音速のままである。曲線 4 は超音速の初期値  $v_0$  の解である。曲線 5 と 6 は多価であるために物理的な意味を持たない数学的な解である。それらは (A.8) 式に従いその方程式の分子がゼロにならなければ、  $v = a$  において  $dv/dr \rightarrow \infty$  であることを示す。  $r_c$  における臨界解の傾きは、(A.8) 式の分子と分母をそれぞれ  $f(r)$ ,  $g(r)$  とおき、ロピタルの定理を (A.8) 式に適用することで導くことができる。ロピタルの定理を使うと、次の式を得る。

$$\frac{1}{v} \left( \frac{dv}{dr} \right)_{r_c} = \left\{ -\frac{2a^2}{r_c^2} + \frac{2GM_*}{r_c^3} \right\} \left\{ \frac{2vdv}{dr} \right\}_{r_c}^{-1} = \frac{a^2}{r_c^2} \left\{ \frac{vdv}{dr} \right\}_{r_c}^{-1} \quad (\text{A.14})$$

この式から次の式が得られる。

$$\left( \frac{dv}{dr} \right)_{r_c} = \frac{\pm 2a^3}{GM_*} \quad (\text{A.15})$$

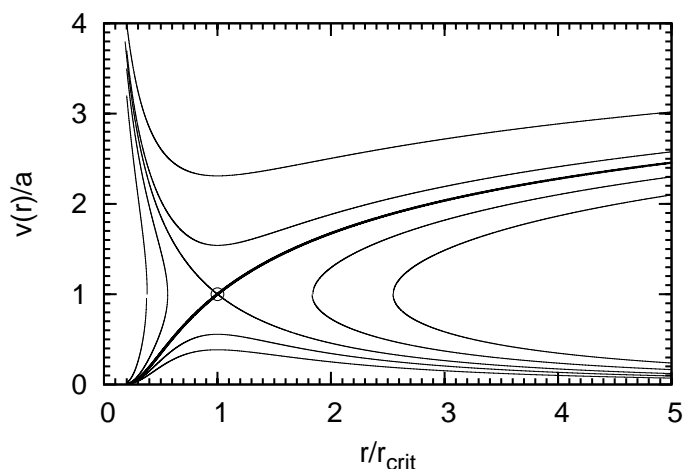


図 A.7 気体圧力と重力をもつ等温恒星風の運動量方程式の解.  $r_c = 5R_*$  の場合である. 丸印は臨界点で, 太線が臨界解である.

正と負の符号が表れるのは, ロピタルの定理から  $(dv/dr)^2$  を表す式が導かれることによる. 臨界点において絶対値の等しい正と負の二つ勾配をもつ特異点は, そのトポロジーから X 型特異点と呼ばれる (図??参照). 前の議論では, 亜音速で出発し超音速で終わる唯一の解を示した. この臨界解は, 下部境界における唯一の特定の速度をおいた場合に生じる. その値を  $v_0(\text{crit})$  とする. これは次式が成り立つときのみ, 底で与えられた密度  $\rho_0$  を持つ等温の大気は遷音速の風を生成できることを暗に示している.

$$\dot{M} = 4\pi r_0^2 \rho_0 v_0(\text{crit}) \quad (\text{A.16})$$

これは下部境界 ( $\rho_0$ ,  $T_0$  及び重力) を与えられた等温風が, 唯一特定の質量損失率の値を持つときにのみ超音速に達することができることを示すとても重要な結果である. 一見すると, このことに驚くかもしれない. なぜなら, 直観的に等温風がある幅を持った様々な質量損失率を保持できると予測したかもしれないからである. その場合, それぞれの質量損失率に対しては気体圧力と重力による力から得られるそれぞれの速度分布が対応していることになる. しかしながらこれは事実ではない. なぜなら, 風は運動量保存と質量保存だけでなく, エネルギー保存も満たすべきだからである. 下記でこのことを示す.

## A.1.1.2 風のエネルギー

ここで論じられる等温の場合, エネルギー保存では  $T(r) = T$  という条件が隠れている. 単位質量当たりの流出している物質の全エネルギー

$$e(r) = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_*}{r} + \frac{5RT}{2\mu} \quad (\text{A.17})$$

について考える. ここで第 1 項は運動エネルギー, 第 2 項はポテンシャルエネルギー, 第 3 項は内部エネルギー  $3RT/2\mu$  と断熱過程の仕事に関するポテンシャル  $RT/\mu$  の和であるエンタルピーである.  $v^2/2 = a^2/2, GM_*/r_c = 2a^2$  である臨界点では, 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーと内部エネルギーの合計は丁度ゼロになる. この条件は等温の場合に特有であり, 一般には臨界点で適用できないことを後で見えていく. エネルギー方程式 (A.17) 式は次のように書かれる.

$$e(r) = e(r_0) + \frac{v^2 - v_0^2}{2} - \frac{GM_*}{r} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) \quad (\text{A.18})$$

この式は等温風のエネルギーが一定でなく, 第 2 項と第 3 項の合計に等しいエネルギーは等温を維持するために風の至る所で付加されなくてはならないことを示している. これは等温近似が不自然で現実的でないようにさせている. しかし, 加熱と冷却が主に放射過程を原因とする種々の風は等温風に近いかもしれないということが分かる\*4.

等温風の下限  $v^2 < a^2 < v_{\text{esc}}^2$  では,  $a^2 \ll v_{\text{esc}}^2$  の場合, エネルギーは負になりほぼポテンシャルエネルギーと同程度の

$$e(r_0) \simeq -\frac{GM_*}{r_0} \quad (\text{A.19})$$

になる.  $v^2 > a^2$  と  $v^2 > GM_*/r$  が成り立つような遠方では,  $v \gg a$  の場合エネルギーは正になりほぼ運動エネルギーと同程度

$$e(r \rightarrow \infty) \simeq \frac{v^2}{2} \quad (\text{A.20})$$

である.  $e(r_0)$  と  $e(\infty)$  の差は, 重力の井戸から抜け出すために風に付加されたものである. そして風に運動エネルギーを与え等温を保つ.

\*4 恒星の場合その星自身の放射熱など



### A.1.1.3 速度分布と密度分布

風の密度分布に対して大気の膨張が持っている影響を見るために、同じ重力と温度下における風と静水力学的な大気の密度構造を比べるのは興味深い。この目的のために、まず風の速度則を導く。運動量方程式 (A.8) 式は (A.7) 式の第 1 項と第 2 項を  $d(v^2/2)/dr$  と  $-a^2 d(\ln v)/dr$  とすることで簡単に得られる解析解を持っている。解は次のようになる。

$$\frac{v^2}{2} - a^2 \ln(v) = 2a^2 \ln(r) + \frac{GM_*}{r} + \text{constant} \quad (\text{A.21})$$

定数は臨界点で  $v(r_c) = a$  という条件によって決められる。ここから次の解が得られる。

$$v \exp\left(-\frac{v^2}{2a^2}\right) = a \left(\frac{r_c}{r}\right)^2 \exp\left\{-\frac{2r_c}{r} + \frac{3}{2}\right\} \quad (\text{A.22})$$

ここで、 $r_c = GM_*/2a^2$  である。(A.22) 式は (A.21) 式を  $a^2$  で割り、両辺の自然対数をとることによって導かれる。等温領域での下部境界の初速は  $r_0$  において (A.22) 式を適用することで得られる。重力的に束縛された  $v_0 \ll a < v_{\text{esc}}$  の亜音速の風の底で、次のことがわかる。

$$\begin{aligned} v_0 &\simeq a \left(\frac{r_c}{r_0}\right)^2 \exp\left\{-\frac{2r_c}{r_0} + \frac{3}{2}\right\} \\ &= a \left(\frac{v_{\text{esc}}(r_0)}{2a}\right)^4 \exp\left\{-\frac{v_{\text{esc}}^2(r_0)}{2a^2} + \frac{3}{2}\right\} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

これは興味深い結果である。というのは、気体圧力で駆動される等温風は初速が極めて特別な (A.23) 式の値をとる場合に限り、超音速になることができるからである。この速度は等温領域の下部境界  $r_0$  での密度  $\rho_0$  と一緒に、星の質量損失率を定める。以下で  $\dot{M}$  の値を導く。風一帯の速度は次のように表される。

$$\frac{v}{v_0} \exp\left(-\frac{v^2}{2a^2}\right) = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \exp\left\{\frac{GM_*}{a^2} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\right\} \quad (\text{A.24})$$

$r \gg r_0$  の遠方では、速度則は次の値に近づく。

$$v(r \rightarrow \infty) \simeq 2a \sqrt{\ln(r/r_0)} \quad (\text{A.25})$$

この値は無限に増大する。このことは遠方に至るまで風が等温であるという仮定の結果である。それはエネルギーの継続的な付加を必要とし、結果として生じる気体圧力は無限に

風を加速させる。明らかにこれは現実的な状況ではない。現実には風はある距離までしか近似的に等温でなく、速度はその距離を越えるとそれほど増大しない。

密度構造は質量連続の式 (A.1) 式によって与えられ、次の式を得る。

$$\frac{\rho}{\rho_0} \exp \left\{ + \frac{1}{2} \left( \frac{v_0 \rho_0 r_0^2}{a \rho r^2} \right)^2 \right\} = \exp \left\{ - \frac{GM_*}{a^2} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \right\} \quad (\text{A.26})$$

この方程式は数値的に解かれ、 $\rho(r)/\rho_0$  が求まる。その結果の 1 つの例を図 (3.2) に示す。ここでは温度を  $a^2 = 0.05GM_*/r_0$  を満たすようにとった。この場合臨界点の位置は  $r_c = 10r_0$  となる。これと静水圧大気密度分布を比べてみよう。定常大気では密度は次の静水圧方程式で与えられる。

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{GM_*}{r^2} = 0 \quad (\text{A.27})$$

この式は大気が等温の場合には (A.5) 式を使って次のように変数変換できる。

$$\frac{r^2}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = - \frac{GM_*}{a^2} \quad (\text{A.28})$$

その解は次のようになる。

$$\frac{\rho(r)}{\rho_0} = \exp \left\{ - \frac{GM_*}{a^2} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \right\} = \exp \left\{ - \frac{(r-r_0)r_0}{\mathcal{H}_0 r} \right\} \quad (\text{A.29})$$

ここで、

$$\mathcal{H}_0 = RT/\mu g_0 \quad (g_0 = GM_*/r_0^2) \quad (\text{A.30})$$

は等温領域の底での密度スケールハイトである。

静水圧領域の密度構造 (A.29) 式は等温風の密度構造にとても似ている。実際 (A.26) 式は  $v_0$  が著しく亜音速の場合、風の底で (A.29) 式に等しい。図 (3.2) で等温風の密度構造を静水圧の場合と比較する。この図はそれらの密度は臨界点近傍を除いてとても似ていることを示している。臨界点では、風の密度が静水圧モデルの密度を下回る。臨界点もしくは音速点での違いはちょうど因子  $\exp(-0.5)$  である。なぜなら、 $v_0 \rho_0 r_0^2 = a \rho(r_c) r_c^2$  であるからである。

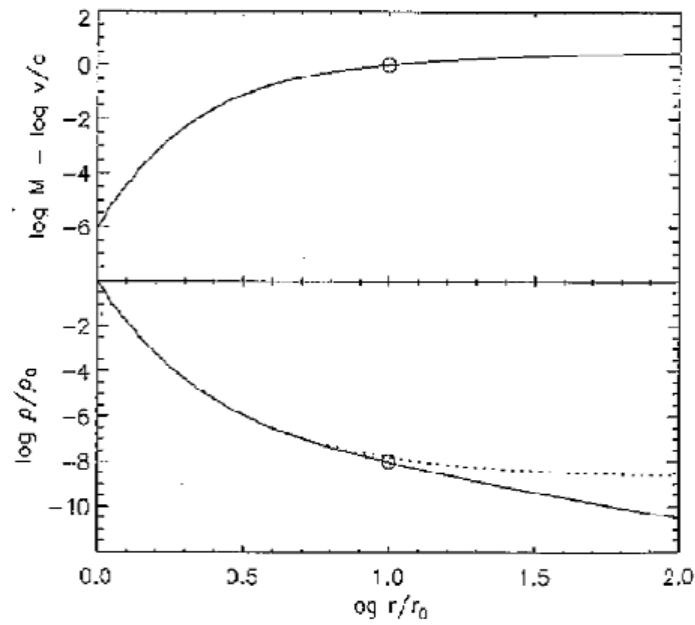


図 A.8 マッハ数 ( $M = v/a$ ) を用いて表した速度と、 $r/r_0$  の関数として下部境界  $r_0$  の値を用いて表した密度。臨界点の位置は丸印で表されている。破線は同じ温度での静力学大気の密度分布を示している。二つの密度分布は流れの超音速領域でとても似ている。

#### A.1.1.4 質量損失率

等温下で亜音速領域での風密度と静水圧密度が十分に一致することから、気体圧力によって運ばれる等温風の質量損失率の簡単な見積もりが可能になる。半径  $R_*$  で質量  $M_*$  の星が、基底密度  $\rho_0$  をもつ温度  $T_c$  のコロナを持っているとしよう。コロナの温度はほぼ一定であると仮定すると、亜音速領域の密度はスケールハイト (A.29) 式を持って  $v_{\text{esc}} = 2a$  となる  $r_c$  までおよそ指数関数的に変化する。その結果、質量損失率を臨界点での距離、密度及び速度から見積もることができる。

$$\dot{M} = 4\pi\rho_c a r_c^2 \approx 4\pi\rho_0 a r_0^2 \left(\frac{r_c}{r_0}\right)^2 \exp\left\{-\frac{r_c - r_0}{\mathcal{H}_0} \cdot \frac{r_0}{r_c}\right\} \quad (\text{A.31})$$

厳密に等温な場合の質量損失率は、これに修正因子  $\exp(-0.5)$  をかけると求まり次のように書ける。

$$\begin{aligned} \dot{M} &= 4\pi\rho_0 a r_0^2 \left\{\frac{v_{\text{esc}}(r_0)}{2a}\right\}^2 \exp\left\{-\frac{r_c - r_0}{\mathcal{H}_0} \frac{r_0}{r_c} - \frac{1}{2}\right\} \\ &= 4\pi\rho_0 a r_0^2 \left\{\frac{v_{\text{esc}}(r_0)}{2a}\right\}^4 \exp\left\{-\frac{v_{\text{esc}}^2(r_0)}{2a^2} + \frac{3}{2}\right\} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

いくつかの特徴のある星の場合の質量損失の見積もりは表 1 で与えられている。質量損失率は比  $v_{\text{esc}}/a$  に非常に敏感であることに気が付くだろう。これは臨界点の密度が  $v_{\text{esc}}^2(r_0)/2a^2$  もしくは  $r_0/\mathcal{H}_0$  の指数関数に従って減少するためである。  $1 \times 10^6 \text{K}$  で  $\rho_0 = 10^{-14} \text{g cm}^{-3}$  のコロナを持つ太陽型の星に対して予測される質量損失率は  $1.6 \times 10^{-14} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$  となる。これは観測値の  $2.0 \times 10^{-14} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$  と十分一致している。

#### A.1.1.5 結論

この章では等温風の速度を記述する方程式が、風の底での初期条件に依存して多くの解を持っていることを見てきた。速度が底から遠方に向かって亜音速から超音速に増える唯一の臨界解がある。この速度は  $v(r_c) = a = v_{\text{esc}}(r_c)/2$  となる臨界点を通り、そして等温領域の下部境界  $r_0$  である 1 つの初期速度  $v_0$  の値をとることを意味している。  $r_0$  の密度が決まった場合、質量損失率は  $\dot{M} = 4\pi\rho_0 v_0 r_0^2$  によって決まる。全エネルギーは、風の基底から

表 1 下部境界で  $\rho_0 = 10^{-14} \text{g/cm}^3$  の密度をもつ等温風の性質

$M_*$ ( $M_\odot$ )	$R_*$ ( $R_\odot$ )	$v_{\text{esc}}$ (km/s)	T(K)	a(km/s)	$\mathcal{H}_0(R_*)$	$r_c(R_*)$	$\frac{r_c - R_*}{\mathcal{H}_0}$	$\dot{M}(M_\odot/\text{yr})$
1	1	617.5	$1 \times 10^5$	37.2	$7.3 \times 10^{-3}$	68.7	$9.3 \times 10^3$	$1.2 \times 10^{-68}$
			$3 \times 10^5$	64.5	$2.2 \times 10^{-2}$	22.9	$1.0 \times 10^3$	$1.5 \times 10^{-28}$
			$1 \times 10^6$	117.7	$7.3 \times 10^{-2}$	6.9	$8.0 \times 10^1$	$1.6 \times 10^{-14}$
			$3 \times 10^6$	203.9	$2.2 \times 10^{-1}$	2.3	5.9	$8.2 \times 10^{-11}$
			$5 \times 10^6$	263.2	$3.6 \times 10^{-1}$	1.4	1.1	$4.0 \times 10^{-10}$
1	100	61.7	$3 \times 10^3$	6.4	$2.2 \times 10^{-2}$	22.9	$1.0 \times 10^3$	$1.5 \times 10^{-25}$
			$1 \times 10^4$	11.8	$7.3 \times 10^{-2}$	22.9	$8.1 \times 10^1$	$1.6 \times 10^{-11}$
			$3 \times 10^4$	20.4	$2.2 \times 10^{-1}$	2.3	5.9	$8.2 \times 10^{-8}$
			$5 \cdot 10^4$	26.3	$3.6 \times 10^{-1}$	1.4	1.1	$4.0 \times 10^{-7}$
10	10	617.5	$1 \times 10^5$	37.2	$7.3 \times 10^{-3}$	68.7	$9.3 \times 10^3$	$1.2 \times 10^{-66}$
			$3 \times 10^5$	64.5	$2.2 \times 10^{-2}$	22.9	$1.0 \times 10^3$	$1.5 \times 10^{-26}$
			$1 \times 10^6$	117.7	$7.3 \times 10^{-2}$	6.9	$8.0 \times 10^1$	$1.6 \times 10^{-12}$
			$3 \times 10^6$	203.9	$2.2 \times 10^{-1}$	2.3	5.9	$8.2 \times 10^{-9}$
			$5 \times 10^6$	263.2	$3.6 \times 10^{-1}$	1.4	1.1	$4.0 \times 10^{-8}$
10	1000	61.7	$3 \times 10^3$	6.4	$2.2 \times 10^{-2}$	22.9	$1.0 \times 10^3$	$1.5 \times 10^{-23}$
			$1 \times 10^4$	11.8	$7.3 \times 10^{-2}$	22.9	$8.1 \times 10^1$	$1.6 \times 10^{-9}$
			$3 \times 10^4$	20.4	$2.2 \times 10^{-1}$	2.3	5.9	$8.2 \times 10^{-6}$
			$5 \times 10^4$	26.3	$3.6 \times 10^{-1}$	1.4	1.1	$4.0 \times 10^{-5}$

$1 M_\odot/\text{yr} = 6.303^{25} \text{g/s}, \mu = 0.60$

超音速領域に向かって負から正に増加する。つまり、流れが起こるためには風へのエネルギーの流入が必要である。このエネルギーの流入は流れを等温に維持させるのに必要とされ、気体圧力によって風の運動エネルギーへ転換される。亜音速領域の密度構造は、臨界点において係数  $\exp(-0.5)$  のみの違いがあるだけで静力学大気にとっても似ている。

臨界点の位置や質量損失率の値は等温領域の底と臨界点の間の条件にのみ依存することを理解するのが重要である。それらは臨界点を越えた領域の条件に依存するのではなく、速度が  $r > r_c$  で  $a$  より大きいままであることのみが必要とされる。

### A.1.2 $r^{-2}$ に比例する力 $f$ を含む等温風

前の節では付加的な力のない等温風の速度構造は運動量方程式の解が臨界点を通るしかないため、ある特定の質量損失率に関してのみ超音速になることを見てきた。放射圧や波圧のような付加的な力の影響について知りたいと思う人もいるかもしれない。この場合の臨界点は同じ位置に残るのだろうか？他の外力が速度か質量損失もしくはその両方を増大させるのだろうか？その影響は付加的な力がかかる位置にどのように依存するのか？具体的に言うと、亜音速領域で力のかけた場合と超音速領域で力のかけた場合とで同じ影響を持っているだろうか？これらの疑問についてこの節で論じる。

前の節と同様に風を等温と仮定する。この仮定は問題を単純化させる。なぜならエネルギー方程式は  $T(r) = T$  に単純化され、それは前の節で論じられた気体圧力のみを含む等温のモデルと比較することで、様々な力の影響の切り分けを可能にするからである。

この節は単純な力、 $r^{-2}$  に比例する  $f$  を扱う。そのような力は、光学的に薄い線吸収や電子による散乱もしくはダスト散乱のような連続吸収が原因の放射圧によって作られうる。これは放射フラックス  $F$  が  $r^{-2}$  に比例し、その結果放射による加速度は  $g_{\text{rad}} = \kappa_F F(r)/c = \kappa_F F(R_*)(r/R_*)^{-2}/c$  が  $r^{-2}$  に比例するからである。ここで、 $\kappa_F$  はフラックス平均不透明度である。最後の等式は  $\kappa_F$  が距離に独立である場合のみ正しい。

重力加速度よりも小さく、風全体にわたって作用する正の  $r^{-2}$  に比例する力の存在は、一定の因子によって重力もしくは星の質量の減少と明らかに同じ効果を持っている。その場合では質量損失率や速度は単純に (A.22) 式と (A.32) 式の解にすることができる。しかし力が風の下部のみもしくは風の上部のみで働くなら、2つの解は異なるだろう。限られた距離のみで作用する  $r^{-2}$  に比例する力の仮定はとても不自然なように思うかもしれない。し

かし、そのような単純なモデルに似ている風は存在する。例えば赤色巨星もしくは変光星からある距離で形成するダストは、ダスト駆動風モデルでは  $r^{-2}$  に比例する放射的な力をその距離を境に及ぼすようになる。わたしたちの議論にとってより重要なことはこれらの単純化したモデルによって風の重要な性質を描き出すことができることである。重要な性質とは力を亜臨界領域に加えるか超臨界領域に加えるかによって反応が異なる点である。

付加的な正の力  $f = Ar^{-2}$  を持つ等温風の運動量方程式は次のようになる。

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} - \frac{GM_*}{r^2} + \frac{A}{r^2} \quad (\text{A.33})$$

この方程式の  $A$  は力が作用する領域では正の定数であり、その領域の外ではゼロとする。質量連続の式 (A.1) 式を用い、さらに (A.5) 式, (A.6) 式を使い圧力勾配を速度勾配で表すと次の運動量方程式になる。

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \left\{ \frac{2a^2}{r} - \frac{GM_*}{r^2} + \frac{A}{r^2} \right\} / \{v^2 - a^2\} \quad (\text{A.34})$$

その式は気体圧力のみを含む等温の場合の (A.8) 式に似た構造を持っている。具体的には、分子と分母の両方が同じ点でゼロに達する場合のみに速度勾配  $dv/dr$  が風一帯で正になることができるといった臨界方程式の性質を持っている。これは等温領域の下部境界条件 ( $\rho_0, T, r_0$ ) が既知の値の場合、ある特定の初期速度の値  $v_0$  やある質量損失率を持った 1 つの臨界解があることを意味している。この臨界解は  $A$  の値と  $A \neq 0$  の領域のとり方に依存する。

#### A.1.2.1 全ての領域で $r^{-2}$ に比例する力 $f$ が加わってる場合

全ての領域で  $A \neq 0$  であると仮定する。これは電子による散乱により放射圧を伴ったイオン化した風の場合を表している<sup>\*5</sup>。そして恒星質量を次のように定義された有効質量に置き換える場合、運動量方程式 (A.34) 式は外力を考えない運動量方程式 (A.8) 式に帰着する。

$$M_{\text{eff}} = M_* - \frac{A}{G} = M_*(1 - \Gamma) \quad (\text{A.35})$$

---

<sup>\*5</sup> コンプトン散乱

このとき  $\Gamma$  は次のように定めた.

$$\Gamma = A/GM_* \quad (\text{A.36})$$

$\Gamma < 1$  つまり  $M_{\text{eff}} > 0$  の場合, 臨界点の条件は (A.12) 式と同じになる. この場合, 臨界点での速度  $v(r_c) = a$  は前と同じままであるが, 臨界点は星に  $(1-\Gamma)$  倍近くなる. これによって次の 2 つの理由で質量損失率 (A.32) 式はかなり増加する. 第一に亜臨界領域での密度スケールハイト  $\mathcal{H}_0$  が増大し (なぜなら  $g_0$  は減少するから), その結果亜臨界領域での外向きの密度減少はより遅くなるからである ((A.29) 式). 第二に臨界点は  $r_0$  により近づくからである. この両方の効果によって気体圧力のみの場合と比べて  $\rho_c/\rho_0$  はかなり増加する.  $\dot{M}$  についても同様である.

力の強さが増大する場合に起こることを考えよう.  $\Gamma$  がゼロから正の値に増大するとき臨界点は

$$r_c(\Gamma) = \frac{GM_*(1-\Gamma)}{2a^2} \quad (\text{A.37})$$

に従い内側に動く. ただしやがて  $\Gamma$  は最大値に達し, その場合  $r_c$  は等温領域の底  $r_0$  に一致する. これは次の  $\Gamma_{\text{max}}$  で起こる.

$$\Gamma_{\text{max}} = 1 - \frac{2a^2 r_0}{GM_*} = 1 - \left\{ \frac{2a}{v_{\text{esc}}(r_0)} \right\}^2 \quad (\text{A.38})$$

$2a \ll v_{\text{esc}}(r_0)$  であれば  $\Gamma_{\text{max}} \simeq 1$  である.  $\Gamma = \Gamma_{\text{max}}$  の場合, 運動量方程式 (A.34) 式の分子は  $r_0$  でゼロになる.  $\Gamma > \Gamma_{\text{max}}$  で  $r_0$  での速度が亜音速  $v_0 < a$  の場合, 速度勾配は  $r > r_0$  で負になり, 速度は増大するどころか外側に向かって減少する. これは力が増大すると, 亜音速領域での速度勾配が減少することに起因している.

亜音速領域での外側を向く大きな力が亜音速の流れの加速ではなく減速 ( $dv/dr < 0$ ) をもたらすことに驚くかもしれない. しかしながらこの事は亜音速領域の密度構造が速度則ではなく主に静力学平衡条件によって決められるという前の節の結論を思い出すと理解できる. つまり亜音速領域で重力と反対に作用する力を加えると, 密度スケールハイトが増大し,  $\rho$  は外向きにゆっくり減少する. 密度は質量連続の式によって速度と関連するので, 力を加えることによって速度勾配はより小さくなる. 亜音速領域の正味の力が外側に向いていると仮定すると大気が静力学状態の場合, 密度は外側に向かって増えなくてはならないだろう. この密度の増加は速度の減少に対応している.

図 (3.3) は密度構造と速度構造における  $0 < \Gamma < \Gamma_{\text{max}}$  の範囲での  $\Gamma = A/GM_*$  の増大の影響を示している. 上の図はマッハ数  $M = v/a$  で速度を示し, 下の図は  $\rho_0$  で正規化した結



果として表れる密度構造を示している。風の温度は  $a^2 = 0.05GM_*/r_0$  となるようにする。何本かの曲線は異なる  $\Gamma$  の値に関するものである。決定した  $\rho_0$  の値に関する質量損失率  $\dot{M}$  は  $v_0$  に比例しその値を変える。  $\Gamma$  が 0 から 0.8 に増加すると、  $M(x=1) = v_0/a$  の急激な増加やその結果質量損失率が何桁も増加することに気が付くだろう。その図は外側での力の増加がより小さい加速度をもたらすが、どの位置でも風は高い速度になることを示している。これは臨界点を通る遷音速解を得るためには  $\Gamma$  が増大すると初速  $v_0$  が増加しなければならないからである。

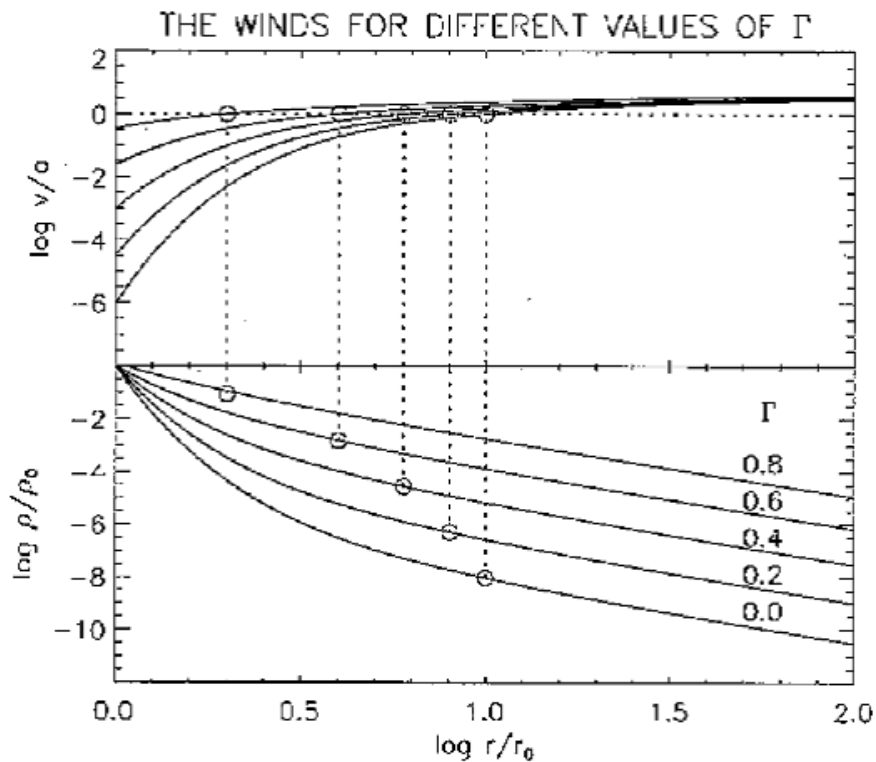


図 A.9 マッハ数  $M = v/a$  で表される速度構造と、他の外向きの力の型  $f = \Gamma(GM_*/r^2)$  を伴う等温風の距離  $r/r_0$  の関数とする密度分布。臨界点の位置はそれぞれの曲線の丸印で示している。  $\Gamma$  が増大するとき、  $v(r_0)$  とそれに伴ってとても急激に何桁も増大する質量損失率  $\dot{M} \propto v_0$  に気づいてほしい。

A.1.2.2 ある距離から  $r^{-2}$  に比例する力  $f$  が加わる場合

今ある距離  $r_d$  を越えて作用する, つまり  $r < r_d$  に関して  $\Gamma = 0$  で  $r > r_d$  に関して  $0 < \Gamma < 1$  であるときの  $r^{-2}$  に比例する力の影響を考えてみよう. それはダストに働く放射圧がダストが形成される距離で顕著になる冷たい星の風に似ている. 以下では速度や質量損失率に対してそのような力が  $r_d$  の位置にかなり影響していることを示す. 簡単のため,  $\Gamma$  が正のときはいつでも同じ一定値  $\Gamma = 0.5$  を持つと仮定する.

その異なる場合は図 (3.4) に示される. 想定している風モデルの温度は  $\mathcal{R}T/\mu = a^2 = (GM_*/r_0)/2\sqrt{10}$  となるようにする. つまり臨界点は付加的な力のない状態で  $\log r_c/R_* = 0.5$  となるところにある. 臨界点の位置が  $\Gamma$  に依存している時, それを  $r_c(\Gamma)$  として表す. その 5 つの場合による  $\dot{M}$  の依存性は速度則から判断できる. すなわち臨界点での速度が全ての場合で  $v_c = a$  であること, そして  $\rho(r_0)$  が固定された境界条件であるため  $\dot{M}$  が  $v(r_0)$  に比例することをを用いる. 一番上の図は  $\Gamma = 0$  の場合 (A.12) 式の  $r_c(0)$  の位置を示している. 一番下の図は風全体で  $\Gamma = 0.5$  の場合 (A.37) 式の  $r_c(\Gamma)$  の位置を示している. これらは両極端な場合である.

$r_d > r_c(0)$  の場合, 亜音速領域の構造も臨界点の位置も  $\Gamma$  に影響されない. つまり質量損失率は  $\Gamma = 0$  の場合と同じであるだろう. これはとても重要な恒星風の性質を示している. その性質とは臨界点よりも遠方で働く外向きの力は質量損失率に影響しないというものである. 後に 4 章で臨界点よりも遠方でエネルギー付加に関しても同じことが当てはまることを示す. しかし  $r > r_d$  の超音速領域での速度は  $\Gamma > 0$  のとき (A.34) 式の分子がより大きく, また (A.34) 式の分母は正であるため  $\Gamma = 0$  のときより大きくなるだろう. したがって臨界点よりも遠方で  $\Gamma$  を増大させると急な速度勾配になり,  $r > r_d$  でより速度が大きくなるだろう. 超音速領域での  $\Gamma$  の値は 1 を超えてもかまわないことを思い出してほしい.

$r_d < r_c(\Gamma)$  の場合, 臨界点は  $r_c(\Gamma)$  で生じる. これは  $r_c$  の位置が (A.34) 式の分子がゼロであるという局所的条件によって与えられることに起因する. 質量損失は亜音速領域  $r_0 < r < r_c(\Gamma)$  全体で  $\Gamma$  の値に依存する. なぜなら (A.34) 式によるとこの領域の速度則は  $\Gamma(r)$  に影響されるためである.  $\Gamma$  の正の値は  $r_d < r < r_c(0)$  での速度勾配や密度勾配が  $\Gamma = 0$  の場合よりも小さいことを意味している. この小さい密度勾配は  $r_c(\Gamma)$  でより高い

値の  $\rho$  をもたらし、その結果高い質量損失率を導く。

$\Gamma$  の値が  $r_c(\Gamma)$  と  $r_c(0)$  の間の領域で正となる場合、臨界点の位置は  $\Gamma(r)$  の関数の形状に敏感である。  $\Gamma$  が数学的な階段関数と仮定すると、(A.34) 式の分子はその場合にゼロになる点をとらないだろう。これは (A.37) 式の臨界点条件を適用することによって立証される。次のような矛盾が生じる。もし  $\Gamma = 0$  であるならば  $r_c = r_c(0)$  であるが、 $r_c$  において  $\Gamma \neq 0$  である。同様に  $\Gamma \neq 0$  であるならば  $r_c = r_c(\Gamma)$  であるが、 $r_c(\Gamma)$  において  $\Gamma = 0$  である。しかし  $\Gamma$  が階段関数でなく  $r_c(\Gamma) < r < r_c(0)$  の範囲で滑らかな  $r$  の関数であれば、その分子はゼロに達する。この場合 (A.35) 式の臨界点は次の条件の解によって与えられる。

$$\frac{2a^2}{r_c} - \frac{GM_*}{r_c^2} \{1 - \Gamma(r_c)\} = 0 \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{r_c}{1 - \Gamma(r_c)} = \frac{GM_*}{2a^2} \quad (\text{A.40})$$

臨界点はこのように  $\Gamma(r)$  が増大する領域に位置するだろう。また質量損失は  $\Gamma = 0$  のときよりも高くなる。なぜなら  $r_c(0)$  よりも星に近い距離で  $v = a$  となり、そこでは  $\Gamma = 0$  の場合よりも密度が高くなるためである。

### A.1.2.3 一定の $\Gamma$ に関する質量損失率

亜臨界領域で  $\Gamma > 0$  の場合、亜臨界領域での速度構造と密度構造は  $\Gamma$  のみに影響される。この場合では質量損失率もまた  $\Gamma$  に影響される。

$0 < \Gamma < \Gamma_{\max}$  の力が風の亜音速部分で適用される場合、そのような力がないときより速度勾配は小さくなる反面、速度は大きくなり臨界点は等温領域の底に近づく。これは速度が臨界点で音速に達し、亜音速領域の速度勾配は  $\Gamma$  が増大するにつれ減少するために、亜音速領域での速度は増えなければならないからである。これは  $\dot{M}$  の劇的な増大をもたらす。なぜなら、亜音速領域での密度スケールハイトはより大きくなり、臨界点は近づくためである。  $\dot{M}$  の増加の見積もりは (A.32) 式から得られる。  $r^{-2}$  に比例する力は亜音速領域全体に作用した場合  $v_{\text{esc}}^2 \rightarrow v_{\text{esc}}^2(1 - \Gamma)$ ,  $r_c \rightarrow r_c(1 - \Gamma)$  そして  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}/(1 - \Gamma)$  になり、質量損失率は因子

$$\frac{\dot{M}}{\dot{M}(\Gamma = 0)} = (1 - \Gamma) \cdot \exp \left\{ \frac{\Gamma r_0}{\mathcal{H}(\Gamma = 0)} \right\} \quad (\text{A.41})$$

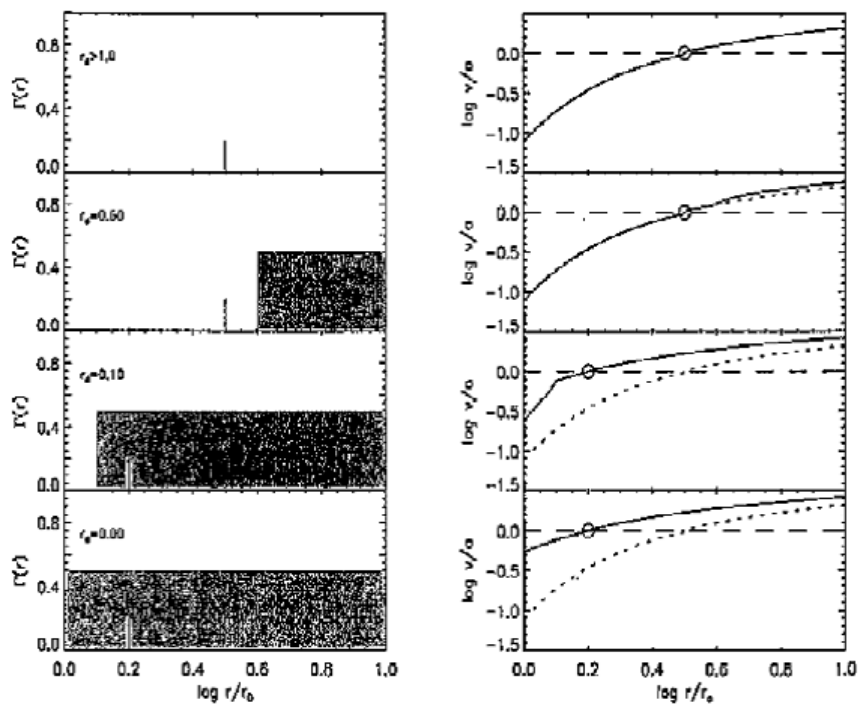


図 A.10 速度に対する外向きの力  $f(r) = \Gamma(r)GM_*/r^2$  の影響. 左側の図は様々な  $\Gamma$  の分布を示し, 右側の図はその結果の風速を示している.  $\Gamma(r) = 0$  の風速は点線で示している. 臨界点の位置は右側の図は丸印で, 左側の図はチェックマークで示した. 亜音速領域で  $\Gamma(r) > 0$  の場合の, 臨界点の位置と質量損失率  $\dot{M} \propto v(r_0)$  の変化に気づいてほしい.

倍に増加する。  $\Gamma_{\max}$  に対応する最大増加は臨界点が等温領域の底に一致する場合に

$$\frac{\dot{M}(\Gamma_{\max})}{\dot{M}(\Gamma=0)} = \frac{2\mathcal{H}(\Gamma=0)}{r_0} \exp\left\{\frac{r_0}{\mathcal{H}(\Gamma=0)} - \frac{3}{2}\right\} \quad (\text{A.42})$$

になり,  $\dot{M}(\Gamma_{\max}) = 4\pi r_0^2 a \rho_0$  になる<sup>\*6</sup>. いくつかの異なる星に関する  $\dot{M}$  の見積もりを表 (3.2) に与えた.  $\dot{M}$  が  $\Gamma$  に強く依存していることに気づくだろう.

#### A.1.2.4 結論

ここに挙げた例は風の外向きに加わる  $r^{-2}$  に比例する力の重要な帰結を実際に示したものである.

1.  $\Gamma$  の値は流れの亜音速部分では  $\Gamma_{\max}$  (A.38) 式よりも小さくなくてはいけない. なぜなら, この領域の構造は主に静水圧平衡によって決められ, 等温領域は  $\Gamma > \Gamma_{\max}$  の場合静水圧になることはできない. つまり亜音速領域の外向きの力は重力を超えるべきではない. 超音速領域では  $\Gamma > 1$  つまり外向きの力は重力を超えてもよい. その場合, 急な速度勾配がもたらされるだろう.

2.  $0 < \Gamma < \Gamma_{\max}$  の力が風の亜音速領域で適用される場合, 速度勾配はより小さくなるが速度は力がないときより高くなるだろう. 臨界点は星に近づき, 質量損失率は増加するだろう.

3.  $\Gamma > 0$  の力が超音速領域でのみ適用される場合, 質量損失率に影響はないがより速い超音速をもたらす.

<sup>\*6</sup> (A.38) 式から

$$\Gamma_{\max} = 1 - \frac{2a^2 r_0}{GM_*} = 1 - \frac{2\mathcal{H}(\Gamma=0)}{r_0} = 1 - \left\{\frac{2a}{v_{\text{esc}}(r_0)}\right\}^2$$

を (A.41) 式に代入すると,

$$\frac{\dot{M}(\Gamma_{\max})}{\dot{M}(\Gamma=0)} = (1 - \Gamma_{\max}) \cdot \exp\left\{\frac{\Gamma_{\max} r_0}{\mathcal{H}(\Gamma=0)}\right\} = \frac{2\mathcal{H}(\Gamma=0)}{r_0} \exp\left\{\frac{r_0}{\mathcal{H}(\Gamma=0)} - 2\right\}$$

となり,

$$\dot{M} = 4\pi \rho_0 a r_0^2 \exp(-0.5)$$

になるはずだ.

4.  $r^{-2}$  に比例する力が  $r_c(\Gamma) < r_d < r(0)$  の領域で  $\Gamma(r)$  が 0 から  $\Gamma$  に外向きに増加する場合, 臨界点は力が増大する領域で (A.39) 式に従って生じる.

この最後の状況はダスト駆動風の質量損失に似ている.  $r_0$  とダストが形成される距離  $r_d$  の間でほぼ静力学的な密度分布 (A.29) 式を仮定することによって, この系の質量損失率を見積もることができる\*7.

$$\dot{M} \simeq 4\pi r_d^2 a \rho_0 \exp\left\{-\frac{(r_d - r_0)}{\mathcal{H}(r_0)} \cdot \frac{r_0}{r_d}\right\} \quad (\text{A.43})$$

$r_0 \simeq R_* \simeq 10^3 R_\odot$ ,  $T_{\text{wind}} \simeq T_{\text{eff}} \simeq 3 \times 10^3 \text{K}$ ,  $M_* \simeq 20 M_\odot$ ,  $\rho_0 \simeq \rho(\tau \simeq 1) \simeq 10^{-10} \text{g cm}^{-3}$  の典型的な赤色巨星に関して, ダストは  $T \sim 10^3 \text{K}$  である  $r_d \simeq 4R_*$  で形成する. 大気スケールハイトは  $\mathcal{H}_0 = 7 \times 10^{-3} R_* = 5 \times 10^{11} \text{cm}$  である. これによって  $\dot{M} \sim 10^{-50} M_\odot/\text{yr}$  の見積もりを得る. このとても小さな値は, 臨界点  $r_d$  が密度のとても低い光球上の約  $6 \times 10^2$  スケールハイトになる位置にあることに起因している. スケールハイトが 8 倍大きく  $5 \times 10^{11} \text{cm}$  から  $4 \times 10^{12} \text{cm}$  に増大した場合, 質量損失率は  $10^{-5} M_\odot/\text{yr}$ , つまり 45 桁も増大するだろう. これは亜音速領域のスケールハイトに対する質量損失率の感受性を示している. ダスト駆動風の質量損失の詳細については 7 章で論じる.

### A.1.3 $v(dv/dr)$ に比例する力 $f$ を含む等温風

二つ目の解析的な形式で表現されることができるとして, 放射圧力は風の中の光学的に厚いスペクトル線に起因している場合を考察する. 風が大きな速度勾配を持っていれば, 固有な吸収形状の幅は流れの速度に起因するドップラー偏移と比較すると無視される. この事はいわゆるソボレフ近似を導く. さらなる詳細は 8 章で論じる. ある光学的に厚い固有の無視してよい幅の吸収線に起因して  $1 \text{cm}^3$  当たり 1 秒当りに吸収される放射運動量の総量は  $F_\nu(r) \cdot \Delta\nu/c$  である. ここで,  $F_\nu(r) \simeq F_\nu(R_*) \cdot (R_*/r)^2$  は距離  $r$  での

\*7 (A.29) 式より,

$$\rho_d = \rho(r_d) = \rho_0 \exp\left\{-\frac{(r_d - r_0)}{\mathcal{H}_0} \cdot \frac{r_0}{r_d}\right\}$$

質量損失率は臨界点の密度, 位置, 速度から求められ,

$$\dot{M} = 4\pi r_d^2 \rho_d a \simeq 4\pi r_d^2 a \rho_0 \exp\left\{-\frac{(r_d - r_0)}{\mathcal{H}(r_0)} \cdot \frac{r_0}{r_d}\right\}$$

単色フラックスであり,  $\Delta v$  は速度勾配に起因する単位距離 1cm 当たりのドップラー偏移である. つまり,  $\Delta r = 1\text{cm}$  で  $\Delta v = (v_0/c)(dv/dr)\Delta r$  となる\*8. 力は単位体積当たりの吸収される放射の運動量に比例する. つまり,  $f_{\text{rad}}$  は  $r^{-2}(dv/dr)$  に比例し, 単位質量では  $f_{\text{rad}} \sim \rho^{-1}r^{-2}(dv/dr) \sim v(dv/dr)$  である. 光学的に厚い吸収線に起因する放射圧力は  $v(dv/dr)$  に比例する力を与える.

### A.1.3.1 運動量方程式と臨界点

上記のような力のある等温風の運動量方程式は次のようになる.

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} - \frac{GM_*}{r^2} + B \cdot v \left( \frac{dv}{dr} \right) \quad (\text{A.44})$$

ここで  $B$  は光学的に厚い吸収線の数とそれらの振動数でのフラックスに依存する正の定数である. この単純な場合では  $B$  を一定と仮定する. 圧力勾配は (A.6) 式の質量連続の式によって速度勾配で表され, 次の式を与える.

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \left\{ \frac{2a^2}{r} - \frac{GM_*}{r^2} \right\} / \left\{ v^2(1-B) - a^2 \right\} \quad (\text{A.45})$$

放射による加速度つまり (A.44) 式の最後の項は, 付加的な力のない等温風の場合 (A.8) 式と比較すると運動量方程式の分母に追加の因子  $1-B$  を作り出した. (A.45) 式が  $B < 1$  において  $v(r)$  を  $v'(r) = v(r)(1-B)^{-1/2}$  に変換すると, 運動量方程式 (A.8) 式に正確に類似していることが容易にわかる. これは (A.8) 式に由来している臨界点での性質が  $v$  を  $v'$

\*8 振動数  $\nu_0$  の光を速度  $v$  で動く観測者が観測したときの振動数  $\nu$  を考える.  
ドップラー効果の式

$$\nu = \nu_0 \frac{c-v}{c}$$

から元の波長との差を  $\Delta \nu_1$  とすると

$$\Delta \nu_1 = \nu_0 - \nu = \frac{\nu_0}{c} v$$

さらに微小距離間  $\Delta r$  における速度の微小変化  $\Delta v = \left( \frac{dv}{dr} \right) \Delta r$  を考えると微小距離間での振動数の微小変化  $\Delta \nu$  は

$$\Delta \nu = \frac{\nu_0}{c} \left( \frac{dv}{dr} \right) \Delta r$$

に変換すると、直接適用できることを指し示している。つまり臨界解すなわち全ての距離で  $dv/dr > 0$  である 1 つの解は、次の臨界点を通る。

$$r_c = \frac{GM_*}{2a^2} \text{ において } v_c \equiv v(r_c) = \frac{a}{(1-B)^{1/2}} \quad (\text{A.46})$$

これは  $B < 1$  を条件とする。つまりこの場合臨界点の位置は他の力がない風の場合と同じで、すなわち  $v(r_c) = v_{\text{esc}}(r_c)/2$  である距離にある。しかしながら臨界点での速度は音速  $a$  から因子  $(1-B)^{-1/2}$  増加する。臨界点はもはや音速点ではない。これは重要な結論である。なぜなら等温風での臨界点は必ずしも音速点でないことを示しているからである。臨界点は運動量方程式での因子  $dv/dr$  を含む全ての項の和および速度勾配を含まない全ての項の和が消える数学的な点である。

### A.1.3.2 質量損失率

$v$  を  $v(1-B)^{1/2}$  に変換すると、等温領域の底での質量連続の式を適用することにより、放射による力  $f = Bv(dv/dr)$  を持つ等温風の質量損失率の簡単な見積もりを可能にする。初速  $v'_0 = v_0(1-B)^{-1/2}$  は等温風の速度方程式の解 (A.45) 式によって与えられる。これは次の質量損失率を与える。

$$\dot{M} \approx \frac{4\pi\rho_0 a r_0^2}{\sqrt{(1-B)}} \left\{ \frac{v_{\text{esc}}(r_0)}{2a} \right\}^2 \exp \left\{ -\frac{v_{\text{esc}}^2(r_0)}{2a^2} + \frac{3}{2} \right\} \quad (\text{A.47})$$

この質量損失率は  $v_0 \rightarrow v_0(1-B)^{-1/2}$  とした (A.16) 式と (A.23) 式から導かれる。この質量損失率は  $v dv/dr$  に比例する力のない場合より因子  $(1-B)^{-1/2}$  倍大きい。なぜなら臨界解の速度  $v(r_0)$  がこの因子倍大きいからである。速度分布は速度を  $(1-B)^{-1/2}$  倍に補正した (A.24) 式と同じである。どの距離でも  $(1-B)^{-1/2}$  倍大きい速度と同じ因子倍だけ大きい質量損失率を持つが、他の力を考えない元の場合と比較すると、密度分布はまったく同じである。つまりこの場合もまた亜音速領域の密度分布は近似的に静力学大気の密度分布に等しいことがわかる。

力がとても大きく  $B > 1$  になった風で起きることを考えてみよう。その場合、運動量方程式 (A.45) 式の分母が全ての  $v$  の値に対して負になる。つまり速度は  $r_0 < r < r_c$  の領域で増大し、 $r_c$  で最大値に達し、外に向かって大きく減少するだろう。速度  $v_0$  に依存して、 $r_c$  で達した最大速度は亜音速もしくは超音速になるかもしれない。その解はもはや臨界状態で



はないので、初速も質量損失率も 1 つに決まらない。この状況は放射により駆動される恒星風としては物理的に非現実的である。これは 8 章で示されるだろう。現実では、放射圧は常に  $f_{\text{rad}} \sim v dv/dr$  の光学的に厚い吸収線と  $f_{\text{rad}} \sim r^{-2}$  の光学的に薄い吸収線の混合に起因しており、それらの比率は風全体で変化する。これは臨界点をもつ運動量方程式をもたらす。

### A.1.3.3 結論

$v dv/dr$  に比例する力、すなわち等温風での  $f = B v dv/dr$  の力の存在は速度のスケール因子のように働く。速度則はそのような力なしの風の場合と基本的には同じであるが、ただし全ての距離で速度が  $(1-B)^{-1/2}$  倍増大する点が異なる。質量損失率も同じく  $(1-B)^{-1/2}$  倍増大するが、密度分布は  $B=0$  の風と同じになる。運動量方程式の臨界点はそのような力のない風と同じ距離  $r_c = GM_*/2a^2$  に位置するが、臨界点での速度はもはや音速  $a$  ではない。この場合、 $a(1-B)^{-1/2}$  である。これは運動量方程式の臨界点が音速点を必ずしも必要としておらず、任意の速度になりうることを示している。臨界点の速度は単純に  $d \ln v/dr$  の運動量方程式の分母がゼロとなる速度として与えられる。

### A.1.4 一般的な付加的な力を含む等温風

この節では等温風の構造においてより一般的性質をもつ力の影響を考える。この節の目的は臨界解と質量損失率が風で適用される力にどのように依存しているかを説明することである。 $f(r,v) + g(r,v) \times v dv/dr$  のような、 $r, v$  そして  $dv/dr$  に依存する力を考える。現段階では、放射によって駆動される風に影響を及ぼす  $(dv/dr)^\alpha$  に比例するような、より複雑な力は簡単のため無視する。

#### A.1.4.1 運動量方程式と臨界点

運動量方程式は次のようになる。

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} (v^2 - a^2) - \frac{2a^2}{r} + \frac{GM_*}{r^2} - f(r,v) - g(r,v)v \frac{dv}{dr} = 0 \quad (\text{A.48})$$

これは次の式を得る.

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \left\{ \frac{2a^2}{r} - \frac{GM_*}{r^2} + f(r,v) \right\} / \{v^2[1-g(r,v)] - a^2\} \quad (\text{A.49})$$

臨界点は距離

$$\frac{2a^2}{r_c} - \frac{GM_*}{r_c^2} + f(r_c, v_c) = 0 \quad (\text{A.50})$$

で速度が

$$v_c^2 \{1 - g(r_c, v_c)\} = a^2 \quad (\text{A.51})$$

になる場所で生じる. (A.51) 式は臨界速度が等音速にならないことを示している. これらの臨界点における二つの条件は局所的な値のみに依り, 風の他の場所の力に依らないことに気づいてほしい. しかしながら, 臨界点を通る運動量方程式の解は亜臨界領域全てで加えられた力に依存する. なぜならこの解は  $v = v_c$  がちょうど  $r = r_c$  で達成されることを必要とするからである.

等音領域の底で低い速度 ( $v \ll a$ ) で始まり, 遠方で高速 ( $v \gg a$ ) に達する解の存在は関数  $g(r,v)$  と  $f(r,v)$  の性質に依存し, 従ってこれらの関数によって表される力に依存している.  $(dv/dr)_{r_0} > 0$  と  $(dv/dr)_\infty \geq 0$  である臨界解の条件が, 底で

$$g(r_0, v_0) > 1 - \frac{a^2}{v_0^2} \text{ と } f(r_0, v_0) < \frac{GM_*}{r_0^2} - \frac{2a^2}{r_0} \quad (\text{A.52})$$

で, 遠方の  $r \gg R_*$  と  $v > a$  に関して

$$g(\infty, v_\infty) \leq 1 - \frac{a^2}{v_\infty^2} \simeq 1 \text{ と } f(\infty, v_\infty) \geq \frac{GM_*}{r^2} - \frac{2a^2}{r} = 0 \quad (\text{A.53})$$

であることを (A.49) から簡単に示すことができる. これは等音領域の底  $r_0$  において  $f$  がある特別な値よりも小さくなり,  $g$  が大きくならなければならないことを示している. 3.2 節で, これは力が増大するときに亜臨界領域での速度勾配が減少するためであることを示した. つまり大きすぎる力  $f$  は亜臨界領域での速度勾配を負にさせる. 臨界点で力は (A.50) 式と (A.51) 式を満たさなければならない. 遠方では (A.49) 式の  $2a^2/r$  と  $GM_*/r^2$  の項がゼロになるため, 力が外側を向いていれば十分である. (A.52) 式と (A.53) 式は, 等温気体がどこでも  $a^2/r$  の圧力を作るため, 遠方において内向きの力でも許されることを意味している. しかしこれは一般的にその場合はない. というのは, 現実の風では遠方での温度が減少しその結果  $a^2/r$  はゼロになるためである.

この議論では、風が1つしか臨界点を持たないことをそれとなく仮定してきた。速度勾配が臨界点より遠方で負にならないように  $f(r,v)$  と  $g(r,v)$  が変化する場合、これは唯一の正しい仮定である。しかし、 $f(r,v)$  が大幅に減少し (A.49) 式の分子が  $r > r_c$  で負になる、もしくは  $g(r,v)$  が大幅に増大し分母が  $r > r_c$  で負になる場合、風は複数の臨界点を持つかもしれない。複数の臨界点が高い磁気回転子の風で生じることを9章で見ていく。

#### A.1.4.2 結論

$f(r,v)$  と  $g(r,v)v dv/dr$  の形の一般的な外向きの力を伴う等温風に関して、臨界点の位置  $r_c$  と速度  $v(r_c)$  は局所的条件に依存していることを示してきた。しかし亜臨界領域での速度則、従って等温領域の底での初速  $v_0$  も亜臨界領域全体でのそれらの力の変化に依存している。質量損失は  $r_0, \rho_0$  そして  $v_0$  によって決定されるため、質量損失率も  $r_0$  と  $r_c$  の間の力の変化に依存している。質量損失率は臨界点より遠方で  $f$  や  $g$  の変化に依存しない。

#### A.1.5 等温風についての結論

等温風での  $d \ln v / dr$  の変化を記述する運動量方程式は、より下層での亜音速から遠方で超音速に向かう唯一の臨界解を持つ。臨界点の位置  $r_c$  と速度  $v_c$  は  $r_c$  での局所的条件によってのみ決められる。力が  $r$  と  $v$  のみの関数である場合、臨界点は音速点である。線吸収により駆動される風のように、力が  $dv/dr$  に依存する場合、臨界点は音速点ではない。

等温領域の底  $r_0$  と臨界点の間の速度は、 $r_0$  と  $r_c$  の間の気体に働く力と  $v(r_c) = v_c$  という境界条件によって決められる。これは  $r_0$  での  $v_0$  の値を決める。  $r_0$  での密度が与えられた場合、質量損失率は  $\dot{M} = 4\pi\rho_0 v_0 r_0^2$  によって決められる。臨界点より遠方の速度の変化は  $v_c$  と  $r > r_c$  での力によって決められる。質量損失率は臨界点より遠方の力に影響されない。

亜臨界領域での他の外向きの力はその領域の速度構造を変える。  $r > r_c$  の領域での他の外向きの力は超臨界領域での速度則を変えるが、質量損失率を変えない。なぜなら、この力の情報は質量損失が決定される亜臨界領域に伝えられないからである。

気体圧力と重力のみを伴う等温風では、密度構造は亜臨界領域において静力学構造にとっても近い。これは  $v \leq 0.5a$  の場合、運動量方程式の  $v dv/dr$  の項が圧力項  $(1/\rho) dp/dr$  に比べ

て無視できるからである。これは密度が  $\rho$  の変化によって決められるような音速点より遠方の領域では成り立たない。つまり音速点より近傍では風の構造は主に静力学平衡によって決められ、音速点より遠方では主に速度増加を作る力によって決められる。

遷音速風のエネルギーは  $r_0$  で負であり、遠方で正である。これは熱の形か力による仕事の形で気体にエネルギーが付加される場合のみに風が遷音速になることができることを意味する。

## A.2 非等温風の場合

温度勾配を伴う風の構造は次の二つの理由で等温風とは異なるだろう。(a) 温度勾配の存在はさらなる圧力勾配が運動量方程式に含まれることを意味している。これらは風の速度構造を変える。(b) 距離を伴う温度の変化は流れの音速とマッハ数の変化を意味する。これは臨界点の位置、故に質量損失率に影響を及ぼす。

非等温的な風を論じる有用な方法は単位質量当たりのエネルギー  $e(r)$  を使うことである。それは運動エネルギー、重力エネルギー、そしてエンタルピーの和である。

$$e(r) = \frac{v^2(r)}{2} - \frac{GM_*}{r} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\mathcal{R}T}{\mu} = \frac{v^2(r)}{2} - \frac{GM_*}{r} + \frac{5\mathcal{R}T}{2\mu} \quad (\text{A.54})$$

風が単原子理想気体からなる場合、 $\gamma = c_p/c_v = 5/3$ 、エンタルピーが  $(5/2)\mathcal{R}T/\mu$  になり、(A.54) 式の最後の式が成り立つ。風の下部境界ではエネルギーは負になる。なぜなら光球面は重力的に星に束縛され、 $v(r_0) \ll v_{\text{esc}}(r_0)$  と  $\mathcal{R}T(r_0)/\mu \ll v_{\text{esc}}^2(r_0)/2$  であるからである。風が恒星の重力から脱出する場合、 $v^2(r) > v_{\text{esc}}^2$  であるため、そのエネルギーは遠方  $r$  で正にならなくてはならない。これはエネルギーが恒星風に付加される、もしくは仕事が気体になされる場合、恒星風が超脱出速度に達しうることを意味している。

等温風の前の章では、エネルギーの付加は  $T(r) = \text{一定}$  の仮定に暗に含まれていた。なぜならエネルギー付与が気体の膨張による冷却を相殺するのに必要であるからである。実際、等温風に付加されたエネルギーは下記の三つの効果のために使われた。膨張する気体の断熱的な冷却を防ぐこと、恒星の重力ポテンシャルの井戸から外に気体を運ぶこと、そしてそれらの残りのエネルギーが運動エネルギーになることである。一般的には、風のエネルギー付与の効果はその量だけではなく、付与される場所にも依存する。

この章では温度、速度構造、質量損失率について非等温風のエネルギー付与が持っている

効果について論じていく。最初に(外向きの力による)エネルギーと運動量の両方の付与を伴った風の一般的な場合について論じ、これら二つの付与の形が風の構造に及ぼす影響の違いを記述する(A.1.1節)。そしてポリトロピックな風の特別な場合でのエネルギー流入の効果を説明する(A.1.2節)。エネルギーと運動量の付与が起こる場合で生じうる複数の臨界点を伴う風について考察し、結論を出す。

### A.2.1 運動量とエネルギー付与を伴う風

風を駆動させるのに必要なエネルギー付加は(例えば星からの波動の散逸による)熱流入の形、もしくは(例えば放射圧力による)運動量流入の形で起こる。ニュートンの法則  $f = dp/dt$  は力が運動量の増加を作り出すことを述べている。そのために外向きの力の存在は通常エネルギー付与とは対照的に運動量付与と呼ばれる。

ここでは風へのエネルギーと運動量の流入のいくつかの一般的な結論について考える。われわれは次のような疑問に取り組んでいこう。どのくらいの割合でエネルギー付与が熱や運動エネルギーもしくはポテンシャルエネルギーに変わるのか？風の異なる位置で適用される運動量もしくはエネルギー付与にはどのような効果の違いがあるのか？恒星風のこれらの重要な性質の議論は次の章で記述される特別な質量損失メカニズムの結果を理解するのを助けるだろう。

#### A.2.1.1 風のエネルギー

単位質量あたりに外向きの力  $f = f(r)$  を伴う定常的な天体の風の運動量方程式は

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{GM_*}{r^2} = f \quad (\text{A.55})$$

である。 $f$  の単位は  $\text{cm s}^{-2}$  である。風へのエネルギー付与の効果は熱力学第一法則  $du = dQ - pd\rho^{-1}$  によって表現することができる。ここで、 $du$  は内部エネルギーの変化、 $dQ$  は付加された熱量、 $pd\rho^{-1}$  は気体によってなされた仕事である。これらの単位は単位質量当たりのエネルギーである。したがって内部エネルギーの変化率は

$$\frac{du}{dt} = \frac{dQ}{dt} - p \frac{d\rho^{-1}}{dt} \quad (\text{A.56})$$

のように書くことができる.  $u, Q, \rho$  が  $r$  のみに依存する定常的な風では, 時間導関数は  $vd/dr$  と置き換えることができる. つまりこの式は  $r$  に関する導関数で書くことができる. また  $du = da^2/(\gamma - 1)$  と理想気体の法則を使うことによって, 単位質量当たりの熱付加の勾配に関する式を見出す.

$$q \equiv \frac{dQ}{dr} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\mathcal{R}}{\mu} \frac{dT}{dr} + p \frac{d\rho^{-1}}{dr} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{d(p/\rho)}{dr} + p \frac{d\rho^{-1}}{dr} \quad (\text{A.57})$$

ここで  $q$  の単位は  $\text{g}^{-1}\text{cm}$  である. エネルギー方程式 (A.57) 式と運動量方程式 (A.55) を加え, 二つの項を  $\rho^{-1}dp/dr + pd\rho^{-1}/dr = d(p/\rho)/dr$  のようにまとめることによって, 新しいエネルギー方程式の形を得る.

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mathcal{R}T}{\mu} - \frac{GM_*}{r} \right) \equiv \frac{de(r)}{dr} = f + q \quad (\text{A.58})$$

この形のエネルギー方程式はベルヌーイ方程式と呼ばれる. これを積分すると,

$$\begin{aligned} e(r) &= \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mathcal{R}T}{\mu} - \frac{GM_*}{r} \\ &= e_0 + \int_{r_0}^r f(r)dr + \int_{r_0}^r q(r)dr \\ &= e_0 + W(r) + Q(r) \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

を得る. この方程式は単位質量あたりの運動エネルギー, エンタルピー, ポテンシャルエネルギーの和である全エネルギー  $e(r)$  が下部境界  $r_0$  での初期エネルギー  $e_0$  と風の中で加えられたエネルギーを足したものに等しいことを示している. エネルギー流入は熱流入  $Q(r)$  と力によってなされた仕事  $W(r)$  の結果である.

$$Q(r) = \int_{r_0}^r q(r)dr \quad (\text{A.60})$$

$$W(r) = \int_{r_0}^r f(r)dr \quad (\text{A.61})$$

$Q(r)$  は熱量ではなく,  $r_0$  と  $r$  の間で加えられた熱であることに気づくだろう. 下部境界  $r_0$  と無限遠の間で単位質量あたりの風に加えられる全エネルギーは

$$\Delta e = W(\infty) + Q(\infty) \quad (\text{A.62})$$

である. このエネルギーは風の運動エネルギーとエンタルピーを増大させ, ポテンシャルの井戸の外へ運び出すのに使われる.

$$\Delta e = \frac{v_\infty^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mathcal{R}}{\mu} (T_\infty - T_0) + \frac{GM_*}{r_0} \quad (\text{A.63})$$

$v_\infty \gg v_0$  と  $T_\infty \ll T_0$  の風に関して, (A.63) 式は下記の 2 式のような気体が最終速度に達するのに十分な単位質量あたりのエネルギー流入量の見積もりをもたらす.

$$\Delta e \simeq \frac{v_\infty^2}{2} + \frac{GM_*}{r_0} - \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{\mathcal{R}T_0}{\mu} \quad (\text{A.64})$$

もしくは

$$\frac{v_\infty^2}{2} \simeq \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{\mathcal{R}T_0}{\mu} - \frac{GM_*}{r_0} + \Delta e \quad (\text{A.65})$$

$r = \infty$  での単位質量あたりの風のエネルギーは単位質量あたりの  $r_0$  での初期エネルギーと加えられたエネルギーを足し合わせたものと等しい.

風にエネルギー流入がない, つまり熱流入も力による仕事もない ( $q = 0, f = 0$ ) なら, 風は星から脱出することができない. なぜなら  $r_0$  での初期エネルギーは星の重力で束縛されている大気では負になるからである.

### A.2.1.2 風の運動量

エネルギーと運動量付与を伴う風での運動量方程式 (A.55) 式は熱エネルギー付与  $q(r)$  を含まない. しかしながら, これは風の速度が熱付与によって影響されないことを意味していない. なぜなら運動量方程式での圧力勾配は熱構造に依存し, それゆえにエネルギー流入に依存しているからである. 速度に対するエネルギー流入の影響は圧力勾配に対するその影響を考慮することによって運動量方程式から導かれる. このことについてここで学習する.

運動量方程式の圧力項  $\rho^{-1} dp/dr$  は  $p/\rho$  を使って

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{d(p/\rho)}{dr} - p \frac{d\rho^{-1}}{dr} = \frac{d(p/\rho)}{dr} + \frac{p}{\rho} \frac{d \ln \rho}{dr} \quad (\text{A.66})$$

と表現される.

密度勾配は質量連続の式  $d \ln \rho = -d \ln v - 2d \ln r$  を用いて消すことができる<sup>\*9</sup>. 完全気体で

<sup>\*9</sup> 質量連続の式  $4\pi v(r)r^2\rho(r) = \text{constant}$  から  $\rho(r) = \frac{C}{vr^2}$  ( $C$  は定数). 両辺の対数をとると,  $\ln \rho(r) = \ln C - \ln v - 2 \ln r$ . 両辺の微小変化をとると,  $d \ln \rho = -d \ln v - 2d \ln r$  になる.

の等温音速  $a(r)^2 = p/\rho = \mathcal{R}T/\mu$  の代入によって次の式を得る.

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{da^2}{dr} - \frac{2a^2}{r} - a^2 \frac{d \ln v}{dr} \quad (\text{A.67})$$

これは温度による変化の影響と外力の両方を含む一般的な形の運動量方程式をもたらす.

$$v \frac{dv}{dr} - \frac{a^2}{v} \frac{dv}{dr} + \frac{da^2}{dr} - \frac{2a^2}{r} + \frac{GM_*}{r^2} = f \quad (\text{A.68})$$

もしくは

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \left\{ \frac{2a^2}{r} - \frac{da^2}{dr} - \frac{GM_*}{r^2} + f \right\} \{v^2 - a^2\}^{-1} \quad (\text{A.69})$$

この方程式は  $da^2/dr = (\mathcal{R}/\mu)dT/dr$  を含む. エネルギー方程式 (A.58) 式から運動量とエネルギー付与を伴う風に対して次の式が得られる.

$$\frac{da^2}{dr} = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \frac{dT}{dr} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \left\{ f + q - \frac{GM_*}{r^2} - v \frac{dv}{dr} \right\} \quad (\text{A.70})$$

運動量方程式で  $da^2/dr$  に (A.70) 式を代入し, その結果に  $\gamma$  を乗ずることによって次式を得る.

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \left\{ \frac{2c_s^2}{r} - \frac{GM_*}{r^2} + f - (\gamma-1)q \right\} \{v^2 - c_s^2\}^{-1} \quad (\text{A.71})$$

ここで  $c_s = \sqrt{\gamma a^2}$  は断熱音速である.

これはエネルギーと運動量の流入を伴う球対称な恒星風の運動量方程式の最も一般的な形である. エネルギー流入  $q > 0$  が外向きの力  $f$  に反対に作用する内向きの力  $(\gamma-1)q$  を作ることに気づいてほしい. これはエネルギー流入が気体を熱し, 外向きの温度勾配ひいては圧力勾配の外向きの力を小さくするからである.

運動量方程式 (A.69) 式と (A.71) 式の二つの形には不思議な違いがある. 前者は臨界点が  $v = a$  で生じ, その一方で後者は臨界点が  $v = c_s$  で生じることを意味している. その違いは (A.69) 式がまだ分子に温度勾配を含んでいることに起因している. この温度勾配は速度勾配に依存している. それは (A.70) 式から容易にわかる. この追加の  $v dv/dr$  の項は臨界点を  $v = a$  となる位置から  $v = c_s$  となる位置に変える.

(A.71) 式はエネルギーと運動量付与を伴う最も一般的な場合の風において, 臨界点が常に音速点であることを意味しているように思うかもしれない. しかしながら, これは  $f$  と  $q$



の両方が速度勾配  $dv/dr$  に依存していないときのみ当てはまる。運動量もしくはエネルギー付与が  $dv/dr$  に依存している場合、それらは (A.71) 式の左辺に追加の項を作り、別の場所に臨界点を動かす。  $v dv/dr$  に比例する力を持つ等温風を考察した A.1.3 節でこの効果の例を示した。 その場合では臨界点は  $v > a$  で生じ、それに対し  $r$  にのみ依存する力を持つ等温風では  $v = a$  で生じる。 後の節では何種類かの風のモデルで運動量方程式が  $v \neq c_s$  になる臨界点を持っていることが示されるだろう。 現在の議論では  $f$  と  $q$  が  $r$  もしくは  $v$  にのみ依存しているが、  $dv/dr$  には依存していない。 その結果臨界点は音速点  $v = c_s$  となる。

### A.2.1.3 マッハ数に関する運動量方程式

エネルギー方程式 (A.59) 式と運動量方程式 (A.68) 式を導出した。 これらの境界条件の変化に完全に従う二つの式は、運動量とエネルギー付与を伴う風の速度と温度構造を記述する。 恒星風に関して興味のある解は臨界点を通る解である。 この臨界解はある境界条件のときのみになる。

風の構造が数値的にのみ解くことのできる二つの連立方程式 (A.59) 式と (A.68) 式によって記述されるとき、臨界点条件からどんな帰結が得られるのか理解するのは簡単ではない。 それゆえ、  $c_s$  に独立な閉じた形で運動量方程式 (A.68) 式を表すことにする。 これはエネルギー方程式なしで解くことができる。 運動量方程式は  $M = v/c_s$  によって定義されたマッハ数を用いて表すことができる。 それは Holzer and Axford(1970) によって初めてなされた。

$M$  と  $c_s$  を使った運動量方程式は

$$\frac{M^2 - 1}{2M^2} \frac{dM^2}{dr} = \frac{2}{r} - \frac{M^2 - 1}{2c_s^2} \frac{dc_s^2}{dr} + \frac{f - (\gamma - 1)q - (GM_*/r^2)}{c_s^2} \quad (\text{A.72})$$

である。  $c_s$  と  $dc_s^2/dr$  の項はエネルギーの式

$$c_s^2 = \frac{\gamma RT}{\mu} = (\gamma - 1) \left\{ e(r) + \frac{GM_*}{r} - \frac{v^2}{2} \right\} \quad (\text{A.73})$$

で表すことができる。  $v = Mc_s$  を代入すると次のようになる。

$$c_s^2 = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma - 1)M^2 + 2} \left\{ e(r) + \frac{GM_*}{r} \right\} \quad (\text{A.74})$$

$$\frac{dc_s^2}{dr} = (\gamma - 1) \left\{ f + q - \frac{GM_*}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dr} \right\} \quad (\text{A.75})$$

つまり,

$$\frac{dc_s^2}{dr} = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma - 1)M^2 + 2} \left\{ f + q - \frac{GM_*}{r^2} - \frac{c_s^2}{2} \frac{dM^2}{dr} \right\} \quad (\text{A.76})$$

である. 運動量方程式に (A.74) 式と (A.76) 式を代入することにより,  $\gamma = 5/3$  のとき次のようになる.

$$\frac{M^2 - 1}{M^2} \frac{dM^2}{dr} = \frac{4(3 + M^2)}{3} \left\{ \frac{[e(r)/r] + f - (3 + 5M^2)(q/12)}{e(r) + GM_*/r} \right\} \quad (\text{A.77})$$

ここで  $e(r) = e_0 + W(r) + Q(r)$  である. エネルギーとエンタルピーは両方とも正であるので, その2つの和でもある (A.77) 式の右辺の分母  $e(r) + GM_*/r$  は常に正である.

$\{3(M^2 - 1)/4(3 + M^2)M^2\}dM^2/dr$  の積分は  $\ln(M^2 + 3) - (1/4)\ln(M^2)$  であり,  $\gamma = 5/3$  に関する運動量方程式は積分形においても次のように書くことができる.

$$\left\{ \ln(M^2 + 3) - \frac{\ln(M^2)}{4} \right\} - \left\{ \ln(M_0^2 + 3) - \frac{\ln(M_0^2)}{4} \right\} = \int_{r_0}^r \left\{ \frac{[e(r)/r] + f - (3 + 5M^2)(q/12)}{e(r) + GM_*/r} \right\} dr \quad (\text{A.78})$$

ここで,  $M_0$  は下部境界でのマッハ数である (右辺が複数のゼロ点を持つ場合の解を議論するためにこれより後はこの運動量方程式の形を使う).

エネルギー流入がなく, 運動量付加が距離にのみ依存する場合, 右辺は距離のみに依存する. それが  $r$  の単純な関数の場合, 運動量方程式は解析解を持つ.

運動量方程式 (A.77) 式は  $M = 1$  の臨界点  $r_c$  を持つ. 連続した風速を得るためには臨界点において次の式を必要とする.

$$\frac{e(r_c)}{r_c} + f(r_c) - \frac{2q(r_c)}{3} = 0 \quad (\text{A.79})$$

これは局所的な条件だが,  $e(r_c)/r_c$  の項のせいで亜音速領域全体でエネルギーと運動量の流入に依存している.

運動量方程式 (A.77) 式は風の初期エネルギー, 風が受ける重力, 力, 熱流入に関するマッハ数の変化を表している. それは負の付与として考えることのできる (例えば, 放射冷却

もしくは伝導による) エネルギー損失を含めて, どんな力もしくはエネルギー付与に対しても有効である. 力とエネルギーの流入が距離のみに依存する場合, この運動量方程式の形は有用である. 力もしくはエネルギー付与が速度に依存している場合, 式はより複雑になるが, まだ有用である. 力もしくはエネルギー付与が速度勾配に依存している場合, (A.77) 式はあまり有用でなくなる. なぜなら右辺は  $dM^2/dr$  の形を含んでいるからである.

運動量方程式 (A.77) 式は力  $f(r)$  や熱流入  $q(r)$  がどんな分布でも数値的に解くことができる. 遷音速解を得るために, 関数  $f(r)$  や  $q(r)$  は  $M = 1$  の臨界点条件 (A.79) 式を満足しなければならない. 積分は臨界点から内側と外側の両方へ実行され, 下部境界での速度すなわち質量損失率を得ることができる.  $M(r)$  と  $e(r)$  が既知なら, 温度分布は  $v^2 = M^2 \gamma RT / \mu$  を用いてエネルギー方程式 (A.73) 式から簡単に求めることができる. つまり  $\gamma = 5/3$  の場合,

$$T(r) = \frac{6}{5} \frac{\mu}{\mathcal{R}} \left\{ e_0 + W(r) + Q(r) + \frac{GM_*}{r} \right\} / M^2(r) + 3 \quad (\text{A.80})$$

である. 速度分布は  $M(r)$  と  $T(r)$  から求められ, 密度分布は  $\rho_0$  が既知の場合, 質量連続の式と速度から求めることができる.

#### A.2.1.4 臨界点でのエネルギーと運動量の付与

マッハ数が臨界点  $r_c$  の前で  $M < 1$  から  $r > r_c$  で  $M > 1$  に増加するために, 運動量方程式の分子は臨界点を通して負の値から正の値に増加しなければならない. これはエネルギーが臨界点で気体に付加されなければならないことを意味している. 必要とされる運動量もしくは熱付与について考えよう. 臨界点での条件は

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{e(r)}{r} + f - (3 + 5M^2) \frac{q}{12} \right\}_{r_c} > 0 \quad (\text{A.81})$$

である.  $de/dr = f + q$  と臨界点でのエネルギーは (A.79) 式  $e(r_c) = \{(2/3)q - f\}r_c$  であるので, 遷音速解は臨界点で次の式を必要とする.

$$\frac{2f}{r} + \frac{df}{dr} + \frac{1}{3} \frac{q}{r} - \frac{2}{3} \frac{dq}{dr} - \frac{5}{12} q \frac{dM^2}{dr} > 0 \quad (\text{A.82})$$

臨界点付近で熱流入がない, つまり  $q(r_c) = 0$  と  $(dq/dr)_{r_c} = 0$  であるが, 運動量の流入のみ

がある場合、臨界点での力は次の条件を満足しなければならない。

$$\frac{d}{dr}(r^2 f)_{r_c} > 0 \quad (\text{A.83})$$

従って臨界点付近で外向きの力が  $r^{-2}$  よりもゆるやかに減少する場合にのみ、エネルギー流入なしの風は遷音速解になることができる。

これは連続吸収による放射圧によって駆動される恒星風に関して重要な意味合いを持っている。単位質量あたりの吸収係数  $\kappa$  が高度によって変化しない場合、放射による力は  $f \propto \kappa L_*/r^2$  のように変化するので、付加的な熱流入がない限り風は遷音速になることができない。また吸収係数が臨界点を通して距離とともに増加する場合のみ、熱流入なしの放射駆動風は遷音速になることができる。ダスト駆動風がまさにこの性質を持っていることを7章で示すだろう。

運動量流入はないが、熱流入のみある場合、条件 (A.82) 式から以下が要請される。

$$-\frac{r_c^{1/2}}{q(r_c)} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{q}{r^{1/2}} \right\} = -\frac{d}{dr} \left\{ \ln(qr^{-1/2}) \right\}_{r_c} > \frac{5}{8} \left\{ \frac{dM^2}{dr} \right\}_{r_c} > 0 \quad (\text{A.84})$$

これは臨界点を通して  $q$  が  $r^{1/2}$  よりも増加がゆるやかであることを要請する。現実には、増加がかなりゆるやかでなければならない。なぜなら  $r_c$  で  $(dM^2/dr) > 0$  だからである。 $q$  がある限界よりもゆるやかに増加しなければならない理由は熱流入が気体温度を上昇させ、それゆえに温度の外向きの減少と圧力勾配を小さくするからである。つまり熱流入は追加の内向きの力のように振る舞い、ここで示したのは平均の外向きの力が臨界点を通して急激な減少をするべきではないということである。

これらの考察は、エネルギーがちょうど音速点で加えられた場合にのみ、亜音速から超音速になることができることを示している。このエネルギー流入は以下のような仕事の形になることができる。それは  $r^{-2}$  よりもゆるやかに変化する力によってなされるものや、あるいは例えば力学的エネルギーの散逸による熱流入、また磁気エネルギーもしくは伝導によってなされるものである。

## A.2.1.5 速度と質量損失率に対する運動量とエネルギー付与の影響

恒星風の速度分布に対するエネルギー付与の効果は運動量方程式 (A.77) 式によって記述される。この式からエネルギー付与が二つの効果を持っていることがわかる。( ) エネルギー付与は加熱による外向きの圧力勾配の減少を記述している  $q$  を含む負の項によって、 $dM^2/dr$  を変える。これは  $q(r)$  に依存している局所的な効果である。( ) エネルギー付与は  $r_0$  と  $r$  の間のエネルギー付与の積分の効果による温度構造の変化を記述する式の分母の  $e(r)$  の項によって、勾配  $dM^2/dr$  の絶対値を変え、運動量方程式は速度勾配  $dv/dr$  もしくは  $dM/dr$  に対する運動量流入と熱流入の効果の違いを示す。

- (a) マッハ数に対して、外向きの力の効果は熱流入の効果の反対である。
- (b) 熱流入は亜音速領域で  $dM^2/dr$  を増大させ、超音速領域で  $dM^2/dr$  を減少させる。
- (c) 運動量流入は亜音速領域で  $dM^2/dr$  を減少させ、超音速領域で  $dM^2/dr$  を増大させる。

風の下部境界 ( $r_0$ ) での密度と温度を与えた場合、質量損失率は  $v(r_0)$  すなわちマッハ数  $M(r_0)$  を使ってスケールできる。風への運動量もしくは熱の付加は質量損失率と速度に対して以下の影響を持っている。

- (a) 風の亜音速領域での運動量の付加によって質量損失率は増大し、風は亜音速領域でより小さな勾配  $dv/dr$  を伴ってより高速になる。
- (b) 風の亜音速領域での加熱によって質量損失率は増大し、風は亜音速領域で高速になる。<sup>\*10</sup>
- (c) 風の超音速領域での運動量もしくはエネルギーの付加は質量損失率には影響はないが、風は超音速領域でより高速になる。

これらの結論は、等温風に対する異なる力の影響を論じた 3.4 節で導出したことの一般化である。それらは風の亜音速領域での速度と密度構造が基本的に静水圧平衡 (3.1.3 項) によって決められることを理解することによってとても簡単に理解される。外向きの力によ

<sup>\*10</sup> 定性的にはわかるが、必ずしも定量的に示せないように見える。

る運動量の付加と熱流入の両方は亜音速領域でスケールハイトを効果的に増大させるように働く。亜音速領域のスケールハイトの増大によって臨界点での密度は増大し、それに従って質量損失率は増大する。

### A.2.2 ポリトロピックな風

風の構造に対する温度勾配の影響を調べるために、 $T(r) \propto \rho(r)^{\Gamma-1}$  のとても単純な場合を考える。ここで  $\Gamma$  は自由パラメータである。そのような関係は ‘ポリトロピックな関係’ と呼ばれ、その風は ‘ポリトロピックな風’ と呼ばれる。温度構造を決めている ‘ポリトロピック指数’  $\Gamma$  の値はもちろん風におけるエネルギー付与に依存している。以下では  $\Gamma = 5/3$  がエネルギー付与を持たない単原子分子気体の風に対応し、 $\Gamma = 1$  がエネルギー付与が (A.18) 式によって記述された等温の場合に対応していることを示し、これらの二つの極端な場合の間、つまり  $1 < \Gamma < 5/3$  での  $T(r)$  の風を論じることにする。単純化のため  $\Gamma$  が位置によらず一定であることを仮定する。小さな  $\Gamma$  の値は大きなエネルギー流入に対応し、大きな  $\Gamma$  は小さなエネルギー流入に対応することに注意しておく。

理想気体のポリトロピックな流れの温度と圧力は次のように書かれる。

$$T = T_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\Gamma-1} \quad (\text{A.85})$$

$$p = \frac{\mathcal{R}\rho T}{\mu} = p_0 \left( \frac{\rho T}{\rho_0 T_0} \right) = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\Gamma} \quad (\text{A.86})$$

もしも  $\Gamma$  を比熱比に等しくなるように選んだ場合  $\Gamma = \gamma = c_p/c_v$  となる。この比はイオン化した単原子気体では  $5/3$  をとる。上記のような場合、 $p \propto \rho^\gamma$  の関係は断熱膨張、つまりエネルギーの流入もしくは損失のない場合に対応している (Appendix 2 を参照せよ)。

#### A.2.2.1 運動量方程式と臨界点

質量と運動量の保存は (A.1) 式と (A.55) 式によって記述される。運動量方程式の中の  $\rho^{-1} dp/dr$  の項は質量保存の式と理想気体の法則によって消去できる。

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{p}{\rho} \frac{d \ln p}{dr} = \frac{\Gamma RT}{\mu} \left\{ -\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} - \frac{2}{r} \right\} \quad (\text{A.87})$$

ここではポリトロピックな関係  $d \ln p = \Gamma d \ln \rho$  を使った. 運動量方程式は次のようになる.

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{\Gamma RT}{\mu} \left\{ -\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} - \frac{2}{r} \right\} + \frac{GM_*}{r^2} = 0 \quad (\text{A.88})$$

もしくは

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \left\{ \frac{2\Gamma a^2}{r} - \frac{GM_*}{r^2} \right\} / \{v^2 - \Gamma a^2\} \quad (\text{A.89})$$

ここで  $a$  は  $r$  に伴って変化する等温音速である. (A.89) 式は等温風の運動量方程式 (A.8) 式と同じ形を持っている. 風の底において亜音速で始まり, 遠方で超音速になる解は分子がゼロになる

$$r_c = \frac{GM_*}{2\Gamma a^2(r_c)} \quad (\text{A.90})$$

と分母がゼロになる

$$v^2(r_c) = \Gamma a^2(r_c) = \frac{GM_*}{2r_c} = \frac{v_{\text{esc}}^2(r_0)}{4} \quad (\text{A.91})$$

になる臨界点を通らなければならない. このポリトロピックな風での遷音速の法則に関する条件は  $a$  が  $\sqrt{\Gamma}a$  にとって代わられたこと以外は等温風と同じである.  $\Gamma = \gamma = c_p/c_v$  である場合, その結果  $\sqrt{\Gamma}a$  が断熱音速になる.  $\Gamma \neq \gamma$  である場合, 臨界点は音速点にならない. この例は臨界点での速度が必ずしも等温音速あるいは断熱音速ではないという以前の等温風からの結論を裏付けている.

等温風の運動量方程式 (A.8) 式とポリトロピックな風の運動量方程式 (A.89) 式の間には重要な違いが一つある. それは非等温風で音速  $a$  が距離に依存している点である. この場合, 運動量方程式は解析解を持っていない. それは標準的な数値積分法によって解くことができ, 以下でそのいくつかの性質を論じる. 始めにポリトロピックな風のエネルギーを論じる.

#### A.2.2.2 ポリトロピックな風のエネルギー

運動量方程式 (A.89) 式はポリトロピックな関係  $p \propto (p/\rho)^{\Gamma/\Gamma-1}$  を使うことによって別の形に書くことができる.  $\Gamma \neq 1$  に関して

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{p}{\rho} \frac{d \ln p}{dr} = \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{p}{\rho} \frac{d \ln(p/\rho)}{dr} = \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{d}{dr}(p/\rho) \quad (\text{A.92})$$

であり, これは次の式を与える.

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{d}{dr} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \frac{GM_*}{r^2} = \frac{d}{dr} \left\{ \frac{v^2}{2} + \left( \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) \frac{\mathcal{R}T}{\mu} - \frac{GM_*}{r} \right\} = 0 \quad (\text{A.93})$$

これはポリトロピックな風は  $\Gamma \neq 1$  に関して次の一定値のパラメーターを持っていることを意味している.

$$e_\Gamma \equiv \frac{v^2}{2} + \left( \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) \frac{\mathcal{R}T}{\mu} - \frac{GM_*}{r} \quad (\text{A.94})$$

定数  $e_\Gamma$  はエネルギーの次元を持っており, それは運動エネルギー, ポテンシャルエネルギー, そして  $\Gamma \mathcal{R}T/(\Gamma-1)\mu$  の項を含んでいる. この  $e_\Gamma$  を 'エネルギー定数' と呼ぶことにする.  $e_\Gamma$  の物理的な意味は  $r \rightarrow \infty$  としたときの  $e_\Gamma$  の値を考えることによって理解できる. 星から極めて遠方では, ポテンシャルエネルギーはゼロになり,  $T(r)$  もまたゼロになる. なぜなら  $T \propto \rho^{\Gamma-1}$  で  $\rho(r \rightarrow \infty) = 0$  であるからである. このようにエネルギー定数は単に次の式のような  $r \rightarrow \infty$  での運動エネルギーになる.

$$e_\Gamma = e(r \rightarrow \infty) = \frac{v_\infty^2}{2} \quad (\text{A.95})$$

風が脱出するためにはエネルギー定数は正でなくてはならない.

$e_\Gamma$  の値の許容範囲は風の速度則が  $r_0 < r_c < \infty$  で遷音速になる条件から導くことができる. 臨界点  $r_c$  での  $e_\Gamma$  の式 (A.94) 式を適用する. その臨界点では条件 (A.91) 式が満たされなければならない. そのとき

$$e_\Gamma = \left( \frac{5-3\Gamma}{\Gamma-1} \right) \cdot \frac{\Gamma a_c^2}{2} = \left( \frac{5-3\Gamma}{\Gamma-1} \right) \cdot \frac{v_c^2}{2} = \left( \frac{5-3\Gamma}{\Gamma-1} \right) \frac{GM_*}{4r_c} \quad (\text{A.96})$$

であることがわかる. これは  $1 < \Gamma < 5/3$  で適用できる.  $\Gamma = 5/3$  の特別な場合は以下で論じられる. (A.96) 式は  $e_\Gamma$  の値の範囲を決めるために使われる. なぜなら臨界点は  $r_0 < r_c < \infty$  になくなくてはならないからである. その結果, 次の式を得る.

$$0 < e_\Gamma < \left( \frac{5-3\Gamma}{\Gamma-1} \right) \frac{GM_*}{4r_0} \quad (\text{A.97})$$

$e_\Gamma$  が負の場合, 風は脱出できないだろう.  $e_\Gamma$  が大き過ぎる場合, 臨界点はポリトロピックな層の下部境界の内側にあるだろう.



風の全エネルギー収支とエネルギー流入を考えよう。(A.94)式は下部境界  $r_0$  における条件の関数として終端速度を与える。

$$\frac{v_\infty^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} + \left( \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \right) \frac{\mathcal{R}T}{\mu} - \frac{GM_*}{r_0} \quad (\text{A.98})$$

$v_\infty > 0$  である条件はある固定された  $\Gamma$  の値を持っている風に対して境界条件の下限値を設定する。あるいは下部境界条件が固定されている場合、 $\Gamma/(\Gamma-1)$  の値は十分大きくなってはいけない。つまり  $\Gamma$  が十分小さくなくてはならない。その結果風は  $v_\infty > 0$  を達成することができる。  $T(r) \propto \rho(r)^{\Gamma-1}$  のため  $\Gamma$  の値は風へのエネルギー流入に関係している。従ってこの  $\Gamma$  に対する要請は實際上、十分大きいエネルギー流入の要請に等しい。

$e_\Gamma$  と  $e(r)$  を比較することにより、ポリトロピックな風の単位質量あたりのエネルギーは次式のように書かれることが示される。

$$e(r) = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_*}{r} + \frac{5}{2} \frac{\mathcal{R}T}{\mu} = e_\Gamma - \frac{5-3\Gamma}{2(\Gamma-1)} \frac{\mathcal{R}T(r)}{\mu} \quad (\text{A.99})$$

ポリトロピックな風への全エネルギー流入は単位質量あたりに

$$\Delta e = e(\infty) - e(r_0) = \frac{5-3\Gamma}{2(\Gamma-1)} \frac{\mathcal{R}T_0}{\mu} \quad (\text{A.100})$$

風のエネルギー流入と温度勾配の関係は  $\Gamma \neq 1$  に関して次式の  $e(r)$  の微分によって得ることができる。

$$\frac{de}{dr} = - \frac{5-3\Gamma}{2(\Gamma-1)} \frac{\mathcal{R}}{\mu} \frac{dT}{dr} \quad (\text{A.101})$$

$\Gamma = 5/3$  の場合、風へのエネルギー流入はない。これは  $p \propto \rho^{5/3}$  のポリトロップが断熱膨張に対応していることに一致する。その場合、風のエネルギーは  $e(r_0)$  であるが、これは重力で束縛された大気では負になり、風は重力の井戸から脱出することができない。 $1 < \Gamma < 5/3$  の場合、エネルギー流入は正であり、温度は外に向かって減少する。 $\Gamma = 1$  の場合、風は等温である。 $\Gamma < 1$  の場合、エネルギー流入は外向きの温度の増大を作り出す。

(A.101) 式の形は次のことを意味する。 $1 < \Gamma < 5/3$  の範囲で  $\Gamma$  の値を与えた場合、エネルギー流入  $de/dr$  がより強い正になると温度勾配はより強い負になる。従って‘より多くのエネルギーがポリトロピックな風に流入するほど、風はより速く冷えるだろう’と結論付けるかもしれない。これは間違った結論である。(A.101) 式の本当の意味は以下の通りである。‘ある  $\Gamma$  を持っているポリトロピックな風で、エネルギー流入の大部分は温度が外

に向かって急激に低下する層で必要とされる。'  $\Gamma$ ,  $dT/dr$ , そして  $de/dr$  の値は正確にお互い関係している。とは言え, これら三つの中の一つが固定され, その他二つが (A.101) 式によってお互い関係し合ってる自由パラメーターであると仮定することは物理的に正しくないことを後で示すだろう。  $\Gamma$ ,  $dT/dr$ , そして  $de/dr$  の間の関係がある理由は次の通りである。 気体圧力と重力のみが力を作り出す風の圧力と温度構造, そして速度構造は下部境界条件とエネルギー流入  $de/dr$  によって完全に決定される。 この圧力と温度構造は  $dT/dr$  と  $\Gamma \equiv d \ln p / d \ln \rho$  が  $de/dr$  によって完全に決定されることを意味している。

### A.2.2.3 速度分布と温度分布

ポリトロピックな風の速度構造は, 運動量方程式 (A.89) 式, もしくはその積分形 (A.94) 式を解くことによって導出することができる。 (A.94) 式は次のように書くことができる。

$$e_{\Gamma} = \frac{v^2}{2} + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} a_c^2 \left( \frac{r}{r_c} \right)^{2-2\Gamma} \left( \frac{v}{v_c} \right)^{1-\Gamma} - \frac{v_{\text{esc}}^2(r_c) r_c}{2} \frac{1}{r} \quad (\text{A.102})$$

ここで,  $RT/\mu = a^2$  をポリトロピックな関係  $a^2 = a_c^2 (T/T_c) = a_c^2 (\rho/\rho_c)^{\Gamma-1}$  で置き換えた。ここで  $\rho$  は質量連続の式を用いて  $v$  と  $r$  で表される。 下付き文字  $c$  は臨界点  $r_c$  での値を意味している。 無次元量

$$x = r/r_c \text{ と } w = v/v_c \quad (\text{A.103})$$

を導入すると, この式は次の便利な形になる。

$$\frac{v_c^2}{2} w^2 + \frac{1}{\Gamma-1} v_c^2 x^{2-2\Gamma} w^{1-\Gamma} - \frac{2v_c^2}{x} = e_{\Gamma} \quad (\text{A.104})$$

$v_c$  を使って  $v_{\text{esc}}(r_c)$  と  $a_c$  を表すために, 臨界点での条件 (A.91) 式を使った。  $e_{\Gamma}$  と  $v_c$  が (A.96) 式を満たしている場合にのみ, 解は臨界点を通るだろう。 (A.104) 式を  $w^{\Gamma-1}$  倍すると, 次の式を得る。

$$w^{\Gamma+1} - w^{\Gamma-1} \left( \frac{4}{x} + \frac{5-3\Gamma}{\Gamma-1} \right) + \frac{2}{\Gamma-1} x^{2-2\Gamma} = 0 \quad (\text{A.105})$$

この式は暗に  $w$  の  $x$  に対する依存性を記述している。 それは簡単に数値的に解くことができる。

$w \ll 1$  で臨界点よりもずっと下方では、第一項は無視することができて次の式を得る。

$$w \simeq \left\{ \frac{2}{\Gamma-1} x^{3-2\Gamma} / \left( 4 + \frac{5-3\Gamma}{\Gamma-1} x \right) \right\}^{1/(\Gamma-1)} \quad (\text{A.106})$$

$x \rightarrow \infty$  の遠方の場合、 $w$  の漸近値は  $\Gamma > 1$  で  $\sqrt{(5-3\Gamma)/(\Gamma-1)}$  である。従って

$$v_\infty^2 = \left( \frac{5-3\Gamma}{\Gamma-1} \right) v_c^2 = \left( \frac{5-3\Gamma}{\Gamma-1} \right) \frac{GM_*}{2r_c} \quad (\text{A.107})$$

図 (A.11) は等温  $\Gamma = 1$  と断熱  $\Gamma = 5/3$  の間の三つのポリトロピックな風の構造を示している。これは三つの  $\Gamma$  の値を用いてそれぞれ運動量方程式 (A.105) 式を解くことによって導出された。  $\Gamma = 5/3$  に関して、解はない。なぜなら風は星から脱出することができないからである。上図はマッハ数で表した速度則を示している。この場合  $M(r) = v(r) / \sqrt{\Gamma} a(r)$  として定義される。マッハ数は亜音速から超音速に増加する。下図は臨界点の温度で規格化された温度分布<sup>\*11</sup>を示している。温度分布は  $T \propto \rho^{\Gamma-1} \propto v^{1-\Gamma} \cdot r^{2-2\Gamma}$  によって速度分布から導出される。つまり、

$$\frac{T(r)}{T(r_c)} = \left( \frac{v}{v_c} \right)^{1-\Gamma} \left( \frac{r}{r_c} \right)^{2-2\Gamma} \quad (\text{A.108})$$

である。エネルギー流入がより少ない、すなわち  $\Gamma$  がより大きい場合、温度は距離が大きくなるにつれてより速く減少する。中図は臨界点に規格化された速度を示している。温度が外側に向けて減少するので、速度はマッハ数よりもゆっくり外側に向かって増加する。

図 (A.11) は  $v(r)$  が  $1 < \Gamma < 3/2$  の場合増加し、 $3/2 < \Gamma < 5/3$  の場合減少することを示す。  $\Gamma = 3/2$  の場合、速度は一定である。これはエネルギー流入  $de/dr$  に風のエンタルピー損失  $(5R/2\mu)dT/dr$  を足したものが、全てポテンシャルエネルギーの増加に使われ、加速に使われるエネルギーが残らないことを意味している。これが  $\Gamma = 3/2$  のときに起こる理由は、エネルギー一定数  $e_\Gamma$  を考慮することによって理解することができる。一定の速度  $v^2/2 = v_\infty^2/2 = e_\Gamma$  のポリトロピックな風の場合、 $\{\Gamma/(\Gamma-1)RT/\mu\}$  の値は全ての距離で  $GM_*/r$  に等しくならなければならない。つまり、 $T$  は  $r^{-1}$  に比例し  $\rho \propto r^{1/(1-\Gamma)}$  でなければならない。なぜなら、 $T$  と  $\rho$  はポリトロピックな関係  $T \propto \rho^{\Gamma-1}$  によって関連付けられるからである。しかしながら  $v = \text{一定}$  の場合、質量保存は  $\rho \propto r^{-2}$  を要請する。これら二つの  $\rho$  の条件は  $1/(1-\Gamma) = -2$ 、つまり  $\Gamma = 3/2$  の場合満たされる。

\*11  $M(r) = \frac{v}{\sqrt{\Gamma}a(r)} = \frac{v}{v_c} \frac{v_c}{\sqrt{\Gamma}a(r)} = x \cdot \frac{\sqrt{\Gamma}a(r_c)}{\sqrt{\Gamma}a(r)} = w \cdot \sqrt{\frac{T(r_c)}{T(r)}}$  から得ることができる。

図 (A.11) で示される速度則は、加速が  $\Gamma$  に強く依存し、従って風へのエネルギー流入に強く依存していることをはっきりと示している。エネルギー流入に対する  $v(r)$  の感受性は、実際にはこれらを規格化した速度から示唆されるものよりもさらに強い。なぜなら、規格化因子  $r_c$  と  $v_c$  はエネルギー流入に依存しているからである。速度と距離が絶対値で示される、つまり臨界点に規格化しない場合、異なる  $\Gamma$  の曲線の間の違いはより一層顕著になる。

下部境界  $r_0$  で同じ初期値  $v_0$  と  $T_0$  を持つが、異なる  $\Gamma$  の値を持ち、それに従って異なる  $e_\Gamma$  の値を持つ一組のモデルを考えよう。  $\Gamma$  を  $5/3$  よりわずかに小さい値から 1 に近い値に減少させると、速度則に以下の三つの影響を与える。  $v/v_c$  対  $r/r_c$  の関係は図 (A.11) で示されるようにより急勾配になる。臨界点での速度  $v_c$  は増大する。臨界点  $r_c$  は  $r_0$  により近づく [(A.96) 式]。これらの三つの変化は任意の  $r$  での速度が  $e_\Gamma$  と共に急激に増大するということを意味している。遠方ではこれらの速度は  $v_\infty = \sqrt{2e_\Gamma}$  に近づく [(A.95) 式]。

図 (A.12) は下部境界  $T(r_0) = 4 \times 10^6 \text{K}$ ,  $\mu = 0.60$ ,  $v_{\text{esc}}(r_0) = 600 [\text{kms}^{-1}]$  を伴う  $\Gamma = 7/6$  のポリトロピックな恒星風のポテンシャルエネルギー、運動エネルギー、エンタルピー、そして全エネルギーを示している。  $1g$  当たりの全エネルギーは  $r_0$  で負の値から  $r \gtrsim 1.5r_0$  で正の値に増大する。これは  $\Gamma < 5/3$  のポリトロピックな風がすべての距離でエネルギー付与を要請することを示している。  $dT/dr$  が最大になる星の近くで、エネルギー流入は最大になる。

この節はポリトロピックな風の色速度構造と温度構造がエネルギー流入に強く依存していることを示してきた。次はポリトロピックな風の質量損失率に対するエネルギー付与の影響に目を向けてみよう。

#### A.2.2.4 ポリトロピックな風の質量損失率

下部境界  $r_0$  での速度  $v_0$  が既知の場合、  $r_0$  での密度  $\rho_0$  を与えると、ポリトロピックな風の質量損失率は質量連続の式から導くことができる。つまり、  $v_0$  もしくは  $w_0 = w(x_0)$  の式を導かなくてはならない。  $w_0$  の値は風が臨界点を通る条件から得られる。臨界点での条件 (A.91) 式は  $\Gamma RT_c/\mu = GM_*/2r_c$  であることを要請する。

ポリトロピックな風の温度は  $T \propto \rho^{\Gamma-1}$  によって密度に関係し、密度は質量連続の式によっ

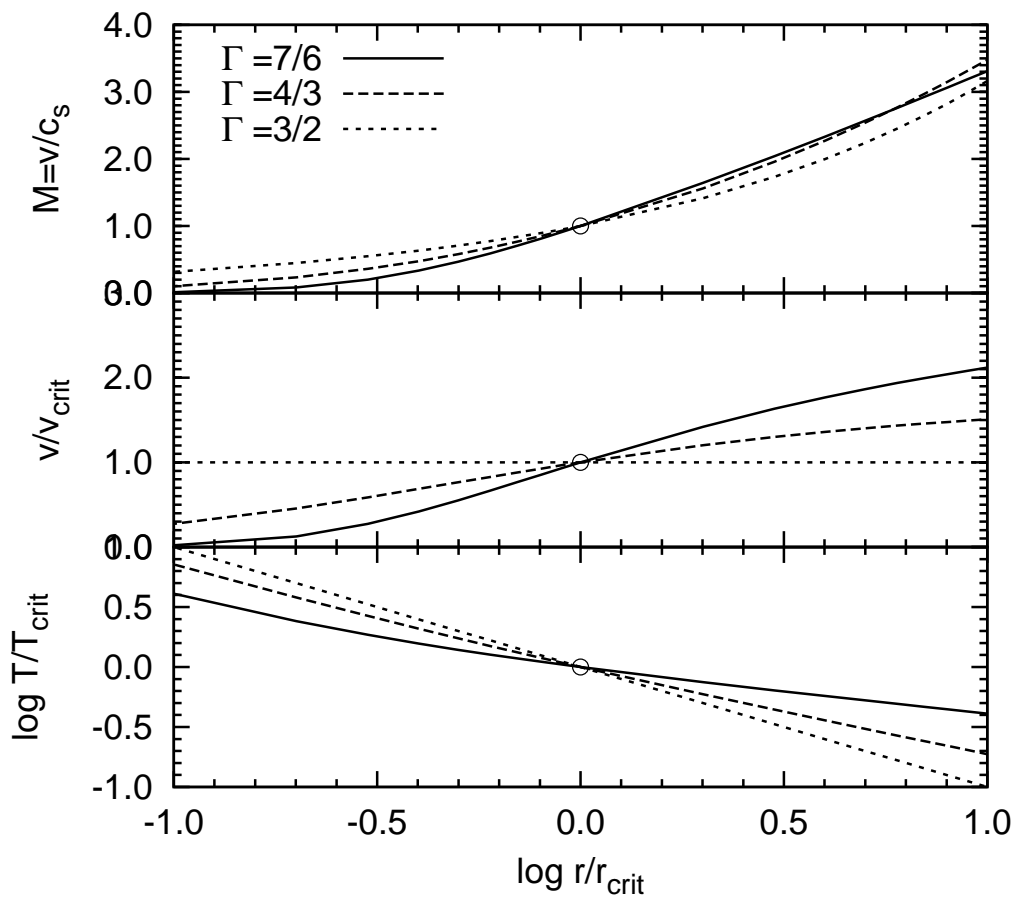


図 A.11 正規化した距離  $x = r/r_c$  の関数とした  $\Gamma = 7/6, 4/3, 3/2$  のポリトロピックな風の速度構造と温度構造, マッハ数を用いた全ての速度則は遷音速だが,  $\Gamma = 3/2$  に関して  $\text{km s}^{-1}$  の速度が一定で,  $3/2 < \Gamma < 5/3$  (図はない) は外向きに減少する.

て速度と距離に関係する。つまり、 $T \propto v^{1-\Gamma} r^{2-2\Gamma}$  である。従って臨界点での温度は下部境界条件を用いて次のように記述することができる。

$$T_c = T_0 w_0^{\Gamma-1} x_0^{2\Gamma-2} \quad (\text{A.109})$$

なぜなら臨界点で  $x = 1$  と  $w = 1$  であるからである。臨界点での条件 (A.91) 式は境界における値を用いて次のように表すことができる。

$$\frac{\Gamma \mathcal{R} T_0}{\mu} \cdot w_0^{\Gamma-1} x_0^{2\Gamma-2} = \frac{GM_*}{2r_0} \cdot x_0 \quad (\text{A.110})$$

この式は

$$w_0^{\Gamma-1} x_0^{2\Gamma-3} = \frac{GM_*}{2r_0} \cdot \frac{\mu}{\Gamma \mathcal{R} T_0} \quad (\text{A.111})$$

を意味している。

この式は下部境界条件を用いて積  $w_0^{\Gamma-1} \cdot x_0^{2\Gamma-3}$  の値を表現している。一方、 $w$  と  $x$  の間の関係は運動量方程式 (A.105) 式によって与えられる。同時にそれらは  $w_0$  と  $x_0$  の値を決定する。 $x_0$  から臨界点の位置を導くことができる。なぜなら、 $r_c = r_0/x_0$  だからである。

臨界点での温度は (A.109) 式から得られ、従って臨界点での速度  $v_c = \sqrt{\Gamma \mathcal{R} T_c / \mu}$  もまた得ることができる。下部境界での速度は  $v_0 = w_0 v_c$  で

$$v_0 = \sqrt{\frac{\Gamma \mathcal{R} T_0}{\mu}} \cdot w_0^{(\Gamma+1)/2} x_0^{\Gamma-1} \quad (\text{A.112})$$

であり、従って質量損失率は

$$\dot{M} = 4\pi r_0^2 \rho_0 \sqrt{\frac{\Gamma \mathcal{R} T_0}{\mu}} \cdot w_0^{(\Gamma+1)/2} x_0^{\Gamma-1} \quad (\text{A.113})$$

である。

多くの場合、すなわち  $v_{\text{esc}}^2(r_0) \gg 4\Gamma \mathcal{R} T_0 / \mu$  のとき、 $x_0$  と  $w_0$  の値は  $w \ll 1$  での (A.106) 式の近似的な  $w(x)$  の関係からはっきりとわかる。 $w = w_0$  の場合の (A.106) 式を (A.111) 式に代入することによって、次の式を得る。

$$x_0 \simeq \left\{ \frac{8\Gamma \mathcal{R} T_0 / \mu}{v_{\text{esc}}^2(r_0)} - 4\Gamma + 4 \right\} / (5 - 3\Gamma) \quad (\text{A.114})$$

従って臨界点は近似的に次式で表される.

$$r_c \simeq \frac{(5-3\Gamma)r_0}{\{4-4\Gamma+8\Gamma\mathcal{R}T_0/\mu v_{\text{esc}}^2(r_0)\}} \quad (\text{A.115})$$

(A.114) 式は  $0 < x_0 < 1$  を伴う現実的な解が  $(\Gamma-1)/2\Gamma < \mathcal{R}T_0/\mu v_{\text{esc}}^2(r_0) < (\Gamma+1)/8\Gamma$  の場合にのみ, 達成されることを示している.

$w_0$  の値は次式を得る (A.111) 式によって与えられる.

$$w_0 = \left\{ \frac{v_{\text{esc}}^2(r_0)}{4\Gamma\mathcal{R}T_0/\mu} \right\}^{1/(\Gamma-1)} x_0^{(3-2\Gamma)/(\Gamma-1)} \quad (\text{A.116})$$

これらの  $w_0$  と  $x_0$  の値を (A.113) 式に代入することによって  $v_{\text{esc}}^2(r_0) \gg 4\Gamma a_0^2$  を伴うポリトロピックな風モデルに関する質量損失率を見積もることができる.

$$\dot{M} \simeq 4\pi r_0^2 \rho_0 \sqrt{\frac{\Gamma\mathcal{R}T_0}{\mu}} \left\{ \frac{v_{\text{esc}}^2(r_0)}{4\Gamma\mathcal{R}T_0/\mu} \right\}^{(\Gamma+1)/2(\Gamma-1)} \left[ \left\{ \frac{8\Gamma\mathcal{R}T_0/\mu}{v_{\text{esc}}^2(r_0)} - 4\Gamma + 4 \right\} / \{5-3\Gamma\} \right]^{(5-3\Gamma)/2(\Gamma-1)} \quad (\text{A.117})$$

表 4.1 はポリトロピックな風の性質を与える. その性質は, 異なる  $\Gamma$  の値に対する式の数値解から導いた. ポリトロピックな領域の下部境界は半径  $R_\odot$ , 脱出速度  $600\text{km s}^{-1}$ , 密度  $10^{-14}\text{g cm}^{-3}$ , 温度  $4 \times 10^6\text{K}$  を持っている. 一番下の段は等温風の結果である.  $\Gamma$  がより小さいとき, エネルギー流入は大きくなり, 終端速度は高くなる. 質量損失率がエネルギー流入に敏感でなく, 終端速度がエネルギー流入の増大と同時に急激に増大することに気づいてほしい. これはポリトロピックな風ではエネルギー流入の大部分が音速点を超えて起こるからである.

#### A.2.2.5 ポリトロピックな風についての結論

この節では, 気体圧力が唯一の外向きの力を作り出すポリトロピックな風は風全体でエネルギー流入を必要とすることを示してきた. エネルギーが下部境界で負になり, 遠方で正にならなければいけないことを示してきた. ポリトロピック指数  $\Gamma = d\ln p/d\ln \rho$  はエネルギー流入を決定する.  $\Gamma$  が  $\gamma = c_p/c_v = 5/3$  に等しい場合, エネルギー流入はなく, 流体は星の重力の井戸を脱出することができない.  $\Gamma$  が  $5/3$  と  $3/2$  の間である場合, 風は遷音速になるが, マッハ数の増大は音速の減少よりもゆっくりである. つまり, 流速は外向きに減少する. 加速を伴うポリトロピックな風は  $\Gamma < 3/2$  を必要とする.  $\Gamma < 3/2$  は単位質量あたりの全エネルギー流入が  $(5/2)\mathcal{R}T_0/\mu$  よりも高くなることに対応している.

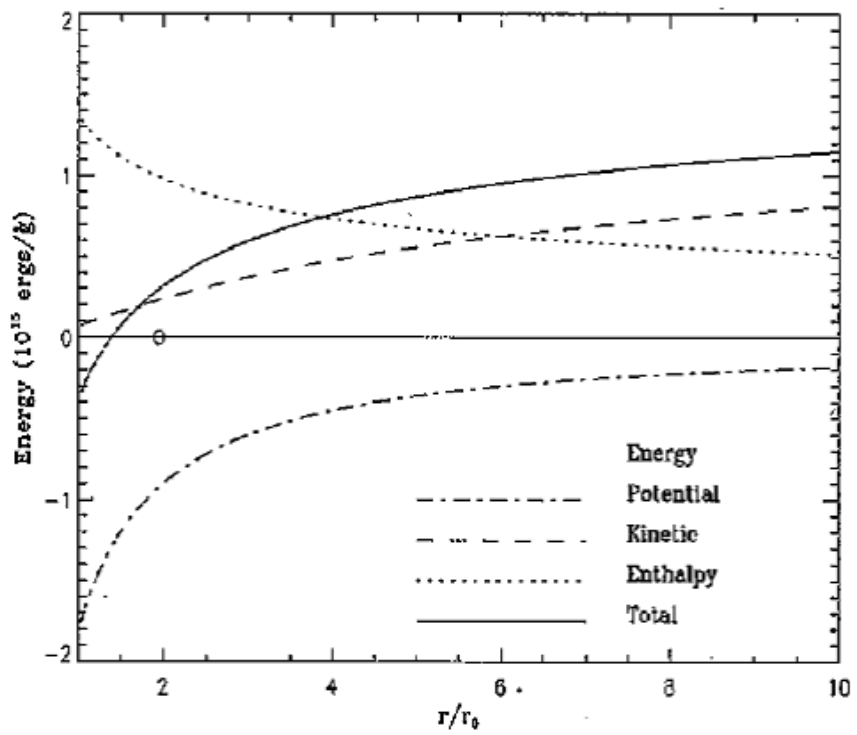


図 A.12  $\Gamma = 7/6$ ,  $T(r_0) = 4 \times 10^6 \text{m}$ ,  $v_{\text{esc}}(r_0) = 600 \text{km s}^{-1}$  のポリトロピックな風のエネルギー. 臨界点の位置は丸印で示している.



ポリトロピックな風はエネルギー定数  $e_\Gamma$  を持っている [(A.94) 式]. この定数は風全体で変わらず, 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーに項  $(\{\Gamma/(\Gamma-1)\}\mathcal{R}T/\mu)$  を足したもので構成されている. 風が達する終端速度は  $e_\Gamma$  に依存し,  $v_\infty^2/2 = e_\Gamma$  に従う.

ポリトロピックな風の質量損失率は下部境界条件から簡単に見積もることができる. 任意の下部境界の値  $r_0, T_0, \rho_0$  を与えた場合, 終端速度と質量損失率は  $\Gamma$  の値, つまりエネルギー流入の大きさに依存している.

## 付録 B 散逸フラックスの平均分子量・質量・温度・ $\Gamma$ に対する依存性

4章で用いた流体力学的散逸のモデルの各パラメータを変化させたときの散逸フラックスの図である。

### B.1 H の場合

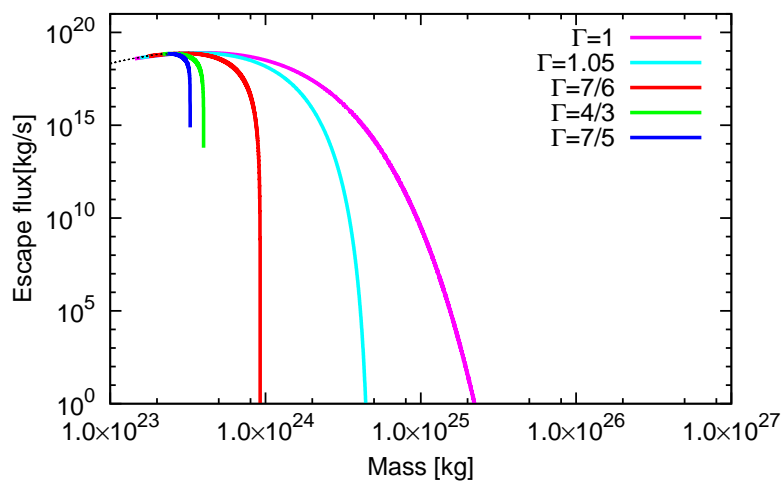


図 B.1 T = 300K

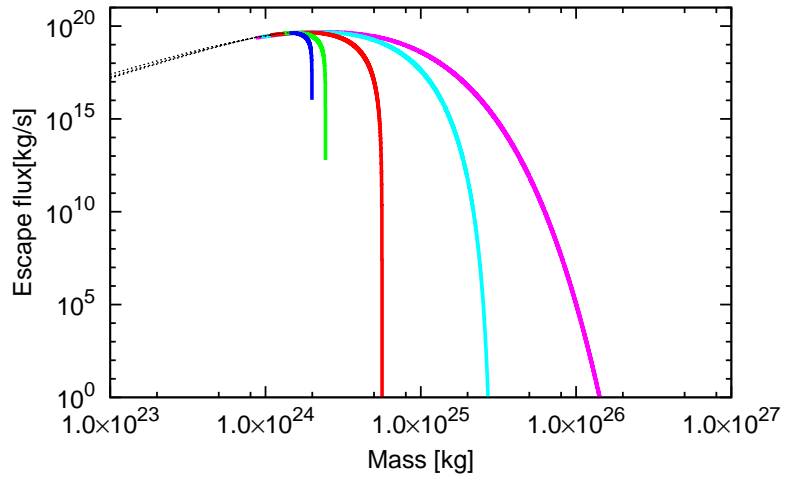


図 B.2  $T = 1000\text{K}$

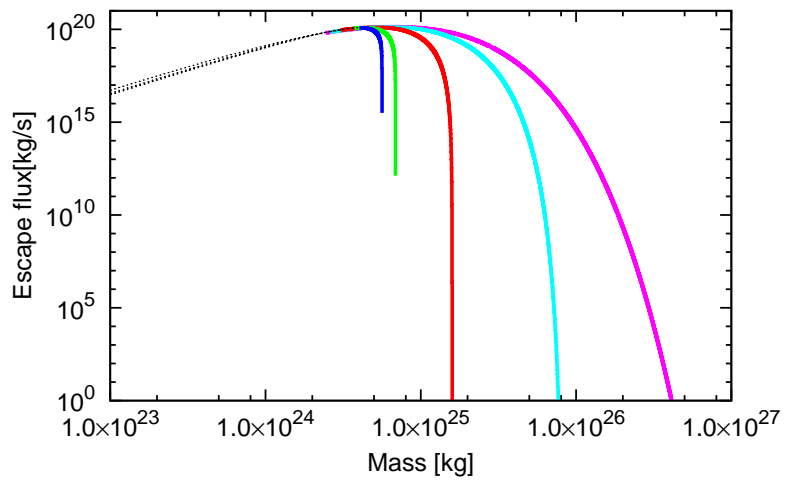


図 B.3  $T = 2000\text{K}$

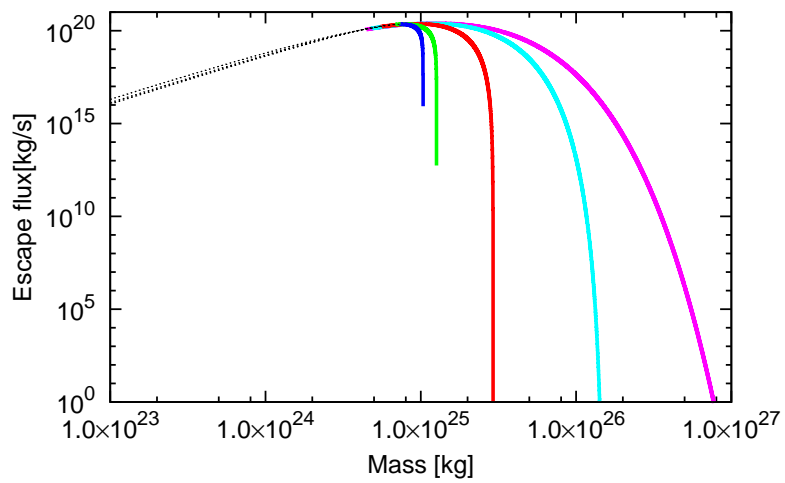


図 B.4 T = 3000K

## B.2 H<sub>2</sub> の場合

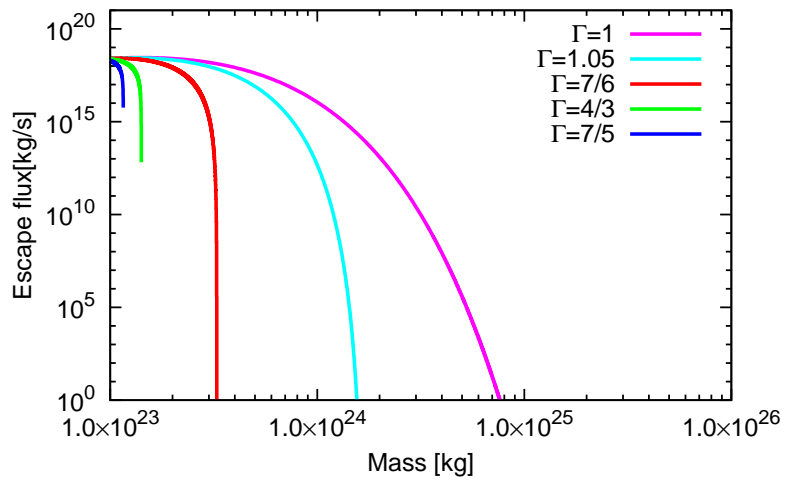


図 B.5 T = 300K

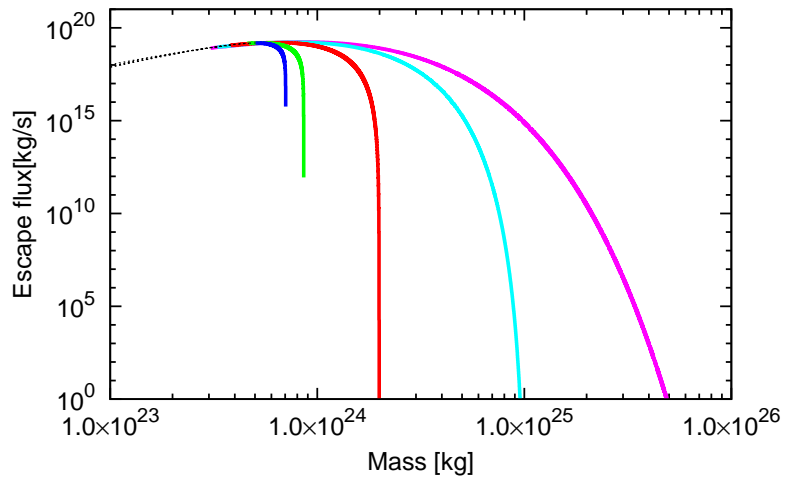


図 B.6 T = 1000K

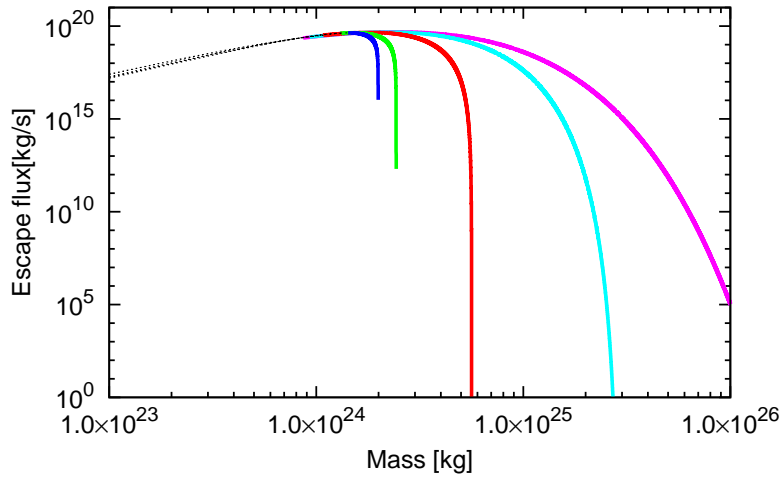


図 B.7  $T = 2000\text{K}$

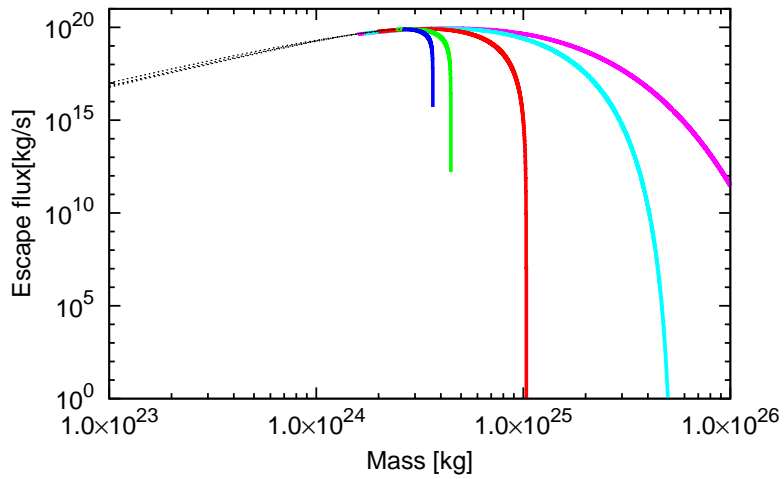


図 B.8  $T = 3000\text{K}$

### B.3 H<sub>2</sub>O の場合

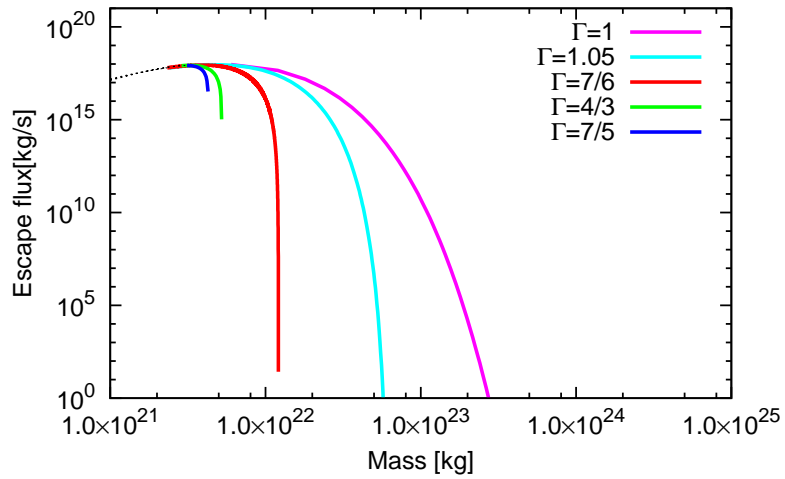


図 B.9 T = 300K

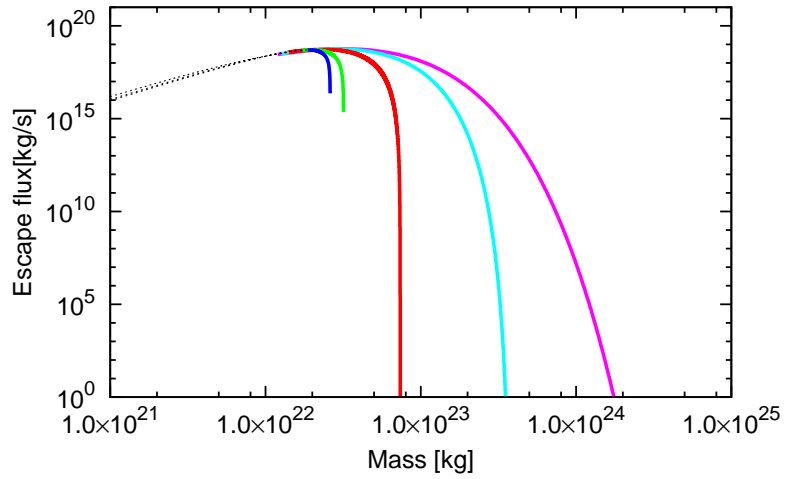


図 B.10 T = 1000K

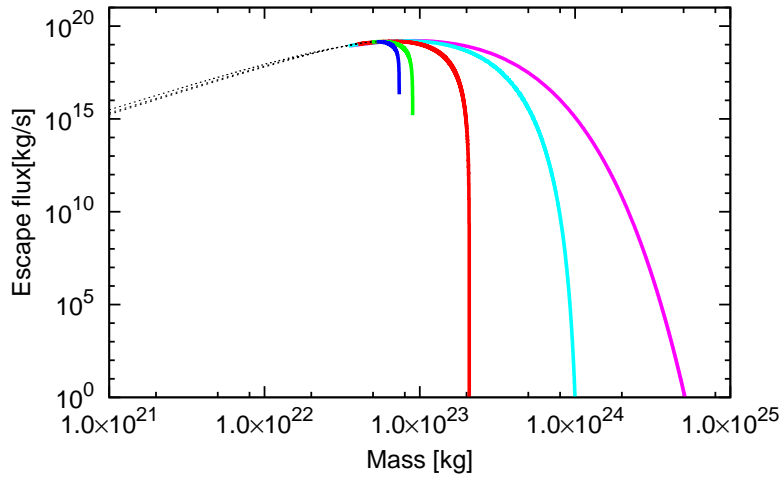


図 B.11  $T = 2000\text{K}$

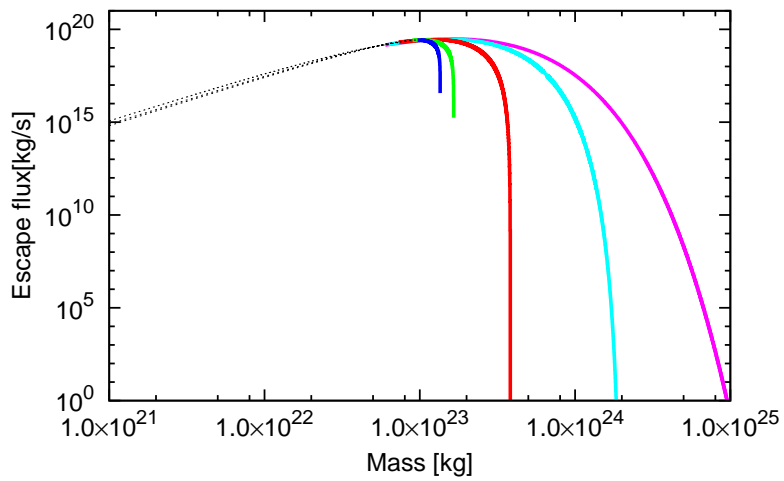


図 B.12  $T = 3000\text{K}$



## 参考文献

- [1] Henny J.G.L.M.Lamer and Joseph P.Cassinelli, 1999: Introduction to stellar wind p.60-113
- [2] 阿部豊, 1997: 岩波講座 地球惑星科学 12 比較惑星学 p.259-p.265
- [3] 阿部豊, 2009: ハビタブルプラネットの起源と進化 第 1 回, 日本惑星科学会誌 Vol.18,No.4,2009 p.194-p.215
- [4] D.C.Catling and K.J.Zahnle, 2009: The planetary Air Leak, 惑星の顔を決める大気流出, SCIENTIFIC AMERICAN May 2009, 日経サイエンス 8 月号)
- [5] Andrew J.Watson, Thomas M. Donahue, and James C. G.Walker, 1981: The Dynamics of a Rapidly Escaping Atmosphere: Applications to the Evolution of Earth and Venus, Icarus 48, 150-166
- [6] 倉本圭, 2009: ハビタブル惑星の起源, 進化, 多様性, 天文月報 2009 年 3 月
- [7] 田中伸, 2001: Alfvén 波の存在による一流体太陽風モデルの解の変化. 北海道大学理学院修士論文.