

マントル転倒モデルによる月の初期進化

Early evolution of the moon by mantle overturn model

学生番号 22070284

押川 智美

Tomomi Oshikawa

北海道大学 理学部 地球科学科

惑星宇宙グループ

Department of Earth Sciences, School of Science,

Hokkaido University

Planetary and Space Group

指導教員 倉本圭

2011年 10月 28日

要旨

月は地球以外で最も調査された固体天体である。比較的小さな天体であることや大気を持たず風化作用が起こりにくいことから、初期の地形地質を現在まで保持している。従って、月は岩石型惑星の初期進化の過程を理解するために役に立つ様々な情報を得ることのできる貴重な天体の一つだといえる。

本卒業論文では月の初期内部進化過程の最新の理解を得るために Hess and Parmentier (1995) “ A model for the thermal and chemical evolution of the Moon’s interior : implications for the onset of mare volcanism. ” のレビューを行った。この論文は、月の内部進化モデルとして近年有望視されているマントル転倒モデルを初めて提唱した。マントル転倒モデルは、月の初期状態について広く受け入れられているマグマオーシャンモデルから出発し、月の海の火成活動が月形成から数億年経過してから活発に起こったことを説明することを試みたものである。マグマオーシャン固化に伴って理想的に結晶分化が起こる場合、月の浅部ほど密度の高い物質が沈積する。そのため、重力的に不安定となりマントル転倒が起こる。これに伴って、放射性熱源に富んだコアが形成すると考えられ、このコアが熱源となることでマントル溶融が起こり、海の火成活動が発生する。コアを熱源とするマントル溶融が起こるまでの時間間隔が火成活動の時間的遅れを作り出す。

その後の関連する研究によって、火成活動開始のタイミングだけでなく、月の表裏の地質学的特徴の二分性についてもマントル転倒に伴う対流によって説明できる可能性があると広く考えられるようになっている (例えば Parmentier et al., 2002)。しかし、火成活動の時間的遅れを説明するには、IBC コアの放射性熱源濃集度が大きいことが必要であるが、これは二分性を説明するためには転倒する IBC 層が厚い必要があることと矛盾する。よって、現状のマントル転倒モデルにより火成活動のタイミングと、二分性を同時に説明することは難しい。

目次

1	はじめに	1
1.1	背景	1
1.2	目的	2
1.3	構成	3
2	月の初期内部進化	4
2.1	初期内部進化の概要	4
2.2	マグマオーシャンの初期化学進化	4
2.3	不安定成層による転倒	6
2.3.1	マントル転倒モデル	6
2.3.2	マグマオーシャンの固化時間	7
2.3.3	かんらん石沈積物および輝石-かんらん石沈積物層内の内部転倒	8
2.3.4	チタン鉄鉱を含む大規模な内部転倒	8
2.4	転倒後の熱進化	10
2.5	考察	15
3	まとめ	17
4	詳説ノート	18
4.1	慣性能率	18
4.2	一次元の熱伝導方程式	19
4.3	ダイアピルの沈降速度	20
4.4	鉛直対流の線形安定論	21
5	Hess and Parmentier (1995) 全訳	26
5.1	概要	26
5.2	はじめに	26
5.3	マグマオーシャンの固化 初期の化学的成層	27
5.3.1	初期不安定成層の大規模転倒	30
5.3.2	初期化学成層の転倒での時間的、空間的スケール	31
5.3.3	大規模転倒の後の内部進化	34
5.4	考察	36
5.4.1	海の玄武岩の起源	40
5.5	要約	41
5.6	参考文献	43
5.7	流体中を沈降する球の抵抗力の導出	47
5.7.1	剛体球の場合	47
5.7.2	球の内部が流体の場合	50
	謝辞	53

参考文献

54

1 はじめに

1.1 背景

月は地球の衛星であり、地球以外で最もよく調査された固体天体である。また地球と同様に、形成初期に分化した天体でもある。月は比較的小さな天体であることと、大気を持たず風化作用が起こりにくいことから、月の歴史の初期に形成された地形や地質を現在まで保持している。このことから、月は岩石型惑星の初期進化の過程を理解するために役に立つ情報を保持している貴重な天体の一つだといえる。

1960年代には月探査が活発に行われた。特に1969年にアポロ11号が月面への有人着陸に成功し、その後アポロ17号まで継続されたアポロ計画によって、地震波計測など月内部の探査が行われただけでなく、総重量約400kgの試料が地球に持ち帰られたことで、月の起源論や進化論は飛躍を遂げた。アポロ計画によって得られたデータにより、1980年前後にはマグマオーシャンモデル(3.1節参照)が確立された(BVSP, 1981)。

また月の起源論には古くから、捕獲説、共成長説、分裂説が提唱されたが、これらの説はそれぞれ、月の金属コアが存在していても小さい¹ことを説明できない、もしくは力学的に実現することが困難である問題を抱えることが分かってきた。その後、惑星集積シミュレーションの発展をうけて、巨大衝突説がこれらの問題を解決する標準理論として受け入れられるようになった。近年、かぐやに代表される月周回衛星らによって、全球の地形、重力、化学組成データが取得されるようになったことにより、月の起源論や進化論は更なる修正が求められている。

ここで、これまでの月探査によって判明している月の特徴を述べる。まず、月の表面は高地と海に大別される。月表面の明るく見える領域が高地であり、主に表面は斜長岩からなり、衝突クレーターが多数存在している。一方、暗く見える領域が海であり、過去に流出した玄武岩で表面が覆われている。月の表側と裏側²では、海(玄武岩)の分布が異なっており、表側に海が集中して分布している。この表と裏の非対称性は月の二分性と呼ばれている(Hood, 1986)。また、表と裏では地殻の厚さも異なっている(例えばIshihara et al., 2009)。

表側は、裏側に比べて地殻が薄い(図1.1, 図1.2)。また、近年、表面組成のマッピングによって表側にはThやFeOなどの液相濃集元素に富む地域が局在し、裏側にはThやFeOに乏しい地域等が広範囲に広がっていることも判明した(Jolliff, 2000)。

また、アポロ計画によって地球に持ち帰られた試料の分析結果から、高地の斜長岩は44–45億年前、海の玄武岩は主に29–39億年に形成されたと推定されている(BVSP, 1981)。つまり、高地の斜長岩が形成した月形成完了直後に相当する時期から、海の火成活動の開始時期まで約5億年の時間的遅延が存在する。

月の初期に形成された高地の中でも組成の違いが存在することから(Jolliff, 2000)、月の二

¹月の慣性率因子は0.4に非常に近い。これは中心に金属コアが存在しない、もしくは存在しても非常に小さいことを表している(4.1節参照)

²月は自転周期と公転周期が等しいため、地球に対して常に同じ面を向けている。常に地球側に向いている面を表側、反対側を裏側と呼ぶ。

二分性は初期の内部進化に起因していると考えられる。近年、月の内部進化モデルとしてマントル転倒モデル (Hess and Pamentier, 1995, 以下 HP95) が有望視されている。このモデルは月の海の火成活動が月形成から数億年経過してから活発に起こったことを説明する目的で提唱され、その後、月の二分性についてもこのモデルの枠組みで説明できる可能性が示されてきた (例えば Parmentier et al., 2002)

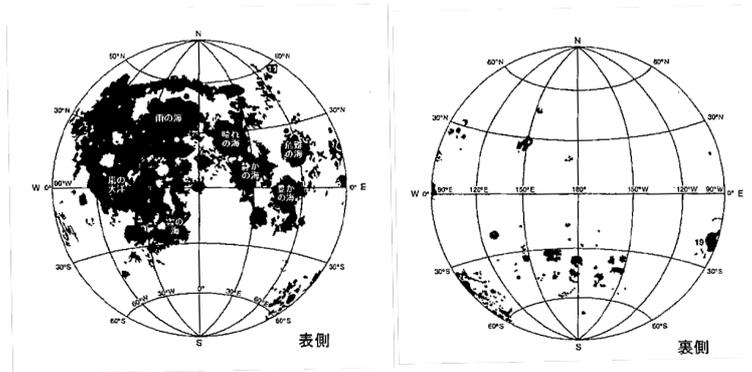


図 1.1: 月表面での玄武岩の分布 (黒く塗りつぶした領域)(倉本, 2008. 原図は Heiken et al., 1991). 表側に玄武岩が集中していることが分かる.

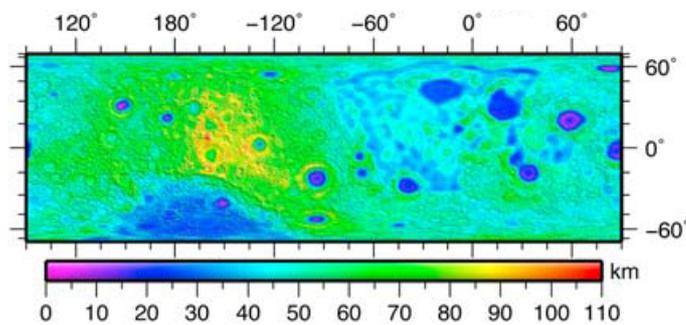


図 1.2: 月周回衛星かぐやによって推定された地殻厚 (Ishihara et al., 2009). 東経 0° を中心として 90° から -90° までが月の表側. RSAT(リレー衛星中継器)/VRAD(衛星電波源)による月重力場モデルと、LALT(レーザ高度計)による月地形モデルから得られた.

1.2 目的

本卒業論文では、HP95 のレビューを行うことにより、月の内部進化と熱史について最新の理解を把握することを目的とする。特に、月の火成活動の遅延と、表裏の二分性の形成がこの枠組みで同時に説明可能かどうかを検討する。これらを通して、月の初期進化の理解に必要な背景知識や物理素過程について学び、今後の研究における基礎とすることを目的とする。

1.3 構成

本論文ではまず, HP95 のモデルに沿って, 月の初期内部進化と熱史について理論的に記述し (第 2 章), 月の火成活動と表裏の二分性を同時に説明可能かどうか検討し, まとめと今後の展望を述べる (第 3 章). 次に, モデルの物理素過程を記述する数式の導出と, その理解に必要な基礎知識を記述する (第 4 章). 最後に HP95 の全訳を掲載する (第 5 章).

2 月の初期内部進化

2.1 初期内部進化の概要

まず, HP95 のモデルによる月初期内部進化のシナリオを以下に概説する. マグマオーシャンが未分化な岩石コアを包む状態を初期条件として採用し, 簡単化のために金属コアの存在を無視する. そして, この固化に伴い, 理想的に結晶分化作用が起こるとする. すると, 沈積物層が重力的に不安定になりマンテル転倒が引き起こされる. このマンテル転倒には 2 つのモードがあり, まずかんらん石沈積物層内での内部転倒が起こり, 次に月表層の斜長岩質地殻の下部に形成されるチタン鉄鉱に富む高密度層が月中心部まで沈み込む大規模な内部転倒が起こる. 転倒によって放射性熱源元素に富むコアが形成され, コアからの放射改変熱により転倒完了から数億年経過した後にマンテルの溶融が始まる. 図 2.1 に, マグマオーシャンの固化開始からマンテル溶融までに起こる一連の過程を示した. 以下の節でこれらについて詳しく述べる.

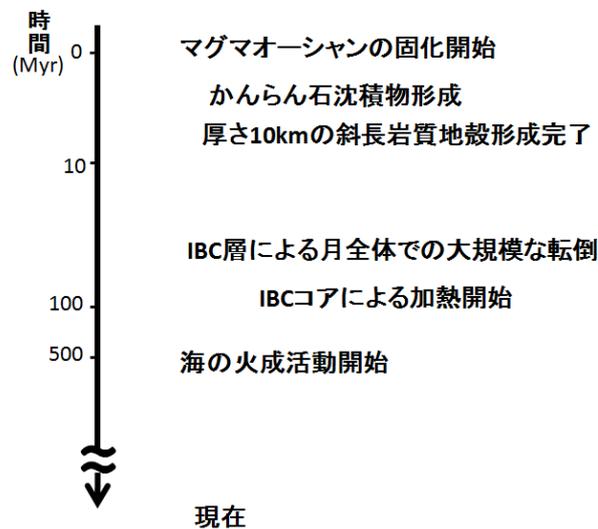


図 2.1: マンテル転倒モデルとその後の熱史の概要 (HP95 に基づき作成). マグマオーシャンの固化開始時期を基準とした.

2.2 マグマオーシャンの初期化学進化

マグマオーシャンモデルでは, 月ははじめ表層数 100 km 以上が完全融解しており, これが徐々に冷却することによって大規模な結晶分化作用が起こり化学成層が生じるとする. 結晶分化の際にマグマから晶出する主な鉱物の順番は, 最初にかんらん石, 次に輝石, そして斜長石である. かんらん石と輝石はマグマよりも密度が大きいため, 月の中心部に向かって沈積する. 一方, 斜長石は, マグマよりも密度が小さいために, 月の表面に向かって浮上する (図 2.2). ここで, 月では Na などの揮発性成分が乏しいためにマグマが高密度となっ

ており、斜長石が浮上できることが一般の固体天体との違いである (倉本 2008). 表 2.1 にそれぞれの鉱物の密度をあげた.

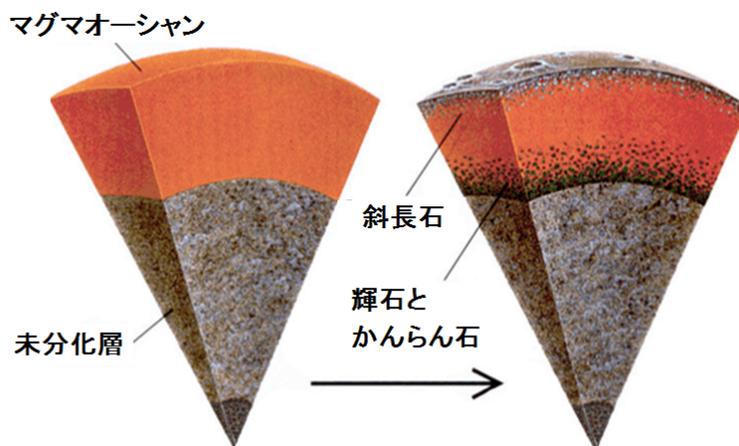


図 2.2: マグマオーシャンの結晶分化 (Taylor, 1994 に加筆)

表 2.1: 標準状態 (1 気圧, 25) における鉱物の密度 (HP95 と理科年表, 2010 より). かんらん石のみ端成分を記した.

鉱物名	端成分	化学式	密度 (kg/m ³)
かんらん石	ファイアライト	Fe ₂ SiO ₄	4400
	フォレストライト	Mg ₂ SiO ₄	3200
輝石		[Ca, Mg, Fe] ₂ Si ₂ O ₆	3200 – 3600
斜長石*		CaAl ₂ Si ₂ O ₈	2750
チタン鉄鉱		FeTiO ₃	4800

*斜長石はアノーサイト (CaAl₂Si₂O₈) とアルバイト (NaAlSi₃O₈) の固溶体である. 月には揮発性元素が少ないことから, 斜長石をアノーサイトとして扱う.

理想的に結晶分化作用が進んだ場合には, マグマオーシャンのおよそ 95 % 以上が固化し, かんらん石沈積物層から輝石-かんらん石沈積物層まで連続する下部の層と斜長石からなる上部の層の一部が形成された後, マグマ残液がこれらの層に挟まれる形で存在するようになる. このマグマ残液には液相濃集元素 (Fe, Ti 等) が多く含まれている. 液相濃集元素には K, U 等の放射性熱源元素も含まれる. これらが固化すると, チタン鉄鉱 (FeTiO₃) を含む層が形成される.

この時, かんらん石沈積物層の中でも化学成層が生じる. かんらん石はフォレストライト (Mg₂SiO₄) とファイアライト (Fe₂SiO₄) を端成分とする固溶体であるが, フォレストライトの方が融点が高い. 従って, かんらん石沈積物層では, 下層ほどフォレストライト成分に

富み、上層ほどファイアライト成分に富むかんらん石が沈積した構造が形成される。

HP95 では、深さ 800 km のマグマオーシャンを仮定している。この場合、理想的に結晶分化が起こると、表層から順に、厚さ 60 km の斜長石の層 (以下斜長岩質地殻と呼ぶ)、30 km のチタン鉄鉱に富む沈積物層 (以下 IBC 層³)、比較的高密度の輝石-かんらん石層から低密度のかんらん石層まで連続した沈積物層からなる 710 km の層を形成する。この連続層理の下には半径 940 km の未分化コアが存在するものとする (図 2.3)。

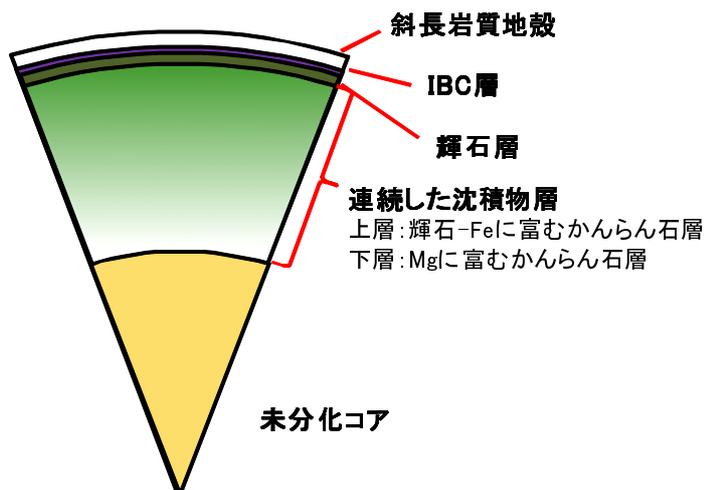


図 2.3: 深さ 800 km のマグマオーシャンが理想的に結晶分化した場合の月の内部構造 (HP95 より作成)。

2.3 不安定成層による転倒

2.3.1 マントル転倒モデル

前述した通り、マグマオーシャンの固化に伴って結晶分化作用が働くと、斜長岩質地殻を除いて月の表層に向かうほど液相濃集元素に富む層が形成される。これは、MgO に富んだ低密度の層の上に FeO に富む高密度の層が成層することを意味している。

低密度の層を高密度の層が覆う構造は重力的に不安定である。これらの沈積物層が安定な配置に向かってレイリーテイラー不安定⁴を起こすことにより、高密度のマントルの上に低密度のマントルが横たわる安定な成層構造が形成され、同時に熱源元素の再配置が起こるとするモデルが、HP95 によるマントル転倒⁵モデルである。マントルの転倒前と転倒後

³Ilmenite bearing cumulate

⁴レイリーテイラー不安定とは、高密度の流体が低密度の流体の上にある場合、重力的に不安定であるため安定な配置に変化しようとする現象である。

⁵低密度のマントルと高密度のマントルがレイリーテイラー不安定によって入れ替わることを以後、マントル転倒あるいは単に転倒という。

の理想的な密度分布を図 2.4 に示す。

転倒完了後の内部構造を考察するために、まず転倒の際の混合を無視した理想な場合を考える。月の未分化コア物質は、沈積物層の中を浮力のつりあうところまで上昇する。そして、高密度の IBC 層の大部分は中心に沈み込み、自身がコアを形成する。

転倒後の理想的な月の内部構造は、表層から順に 60km の斜長岩質地殻、180km のかんらん石沈積物層、150km の未分化層、800km の輝石-かんらん石沈積物層と続き、この層理の下に半径 550km の IBC コアが位置する。転倒後の理想的な密度分布を図 2.4 に示した。マントル転倒の結果形成される IBC コアには、放射性熱源元素が多く含まれているため、コアの形成から時間間隔をあけて IBC コア上部のマントルが熱され溶融することが考えられる。

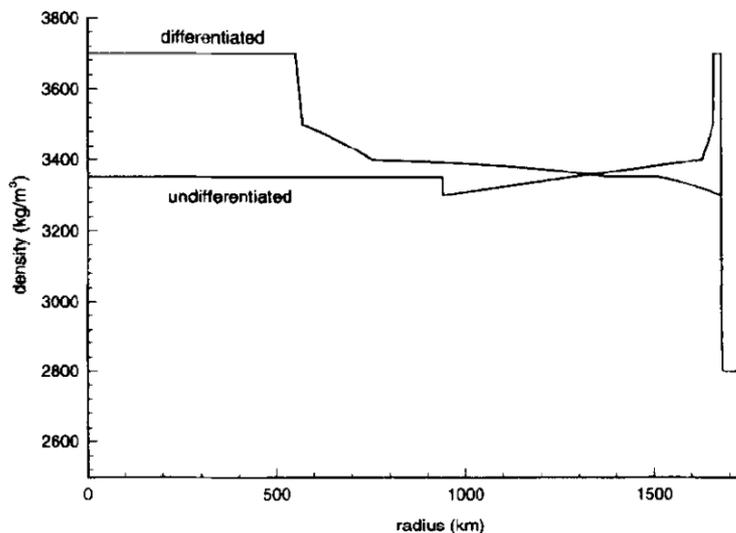


図 2.4: 転倒前後の密度分布 (HP95). undifferentiated と記した線が転倒前を表す。

2.3.2 マグマオーシャンの固化時間

より現実的な状況下では、マントル転倒はマグマオーシャンが完全に固化する前に起こり始め、下層と混合すると考えられる。ここではまず、マグマオーシャンの固化にかかる時間について考察する。マグマオーシャンの固化にかかる時間は、表面の固体層の厚さとその持続性に依存する。つまり、固体層が薄く、持続性が低い(壊れやすい)と対流冷却が急速にすすむため、マグマオーシャンの固化にかかる時間は短くなる。一方固体層が厚く、持続性が高く(壊れにくく)なるとマグマオーシャンの上部に蓋がされる状態になるために、固化にかかる時間は長くなる。ここで天体表面の固体層は、伝導によってのみ熱が輸送されるとする。

ここで、マグマオーシャンが 80 % 固化した時点から斜長石が浮上するようになると仮定する。斜長石が浮上する以前の段階では、表面の固体層は持続性が低く、急速な対流冷却により、数 Myr⁶ 以内の短い時間間隔で 800 km の厚さのマグマオーシャンから 700 km の厚さの沈積物層が形成される。マグマオーシャンが 80 % 以上固化し、10 km かそれ以上の厚さの安定した地殻が形成され永続的に存在するようになると、残り 100 km は 100 Myr の時間をかけて固化する。この 100 km の層は、固化すると約 40 km の斜長岩質地殻（さらに時間が経過すると 20 km の Mg スーツ深成岩が付加すると仮定する）と 60 km の FeO に富む輝石沈積物層に分化する。輝石沈積物層の上部 20 km は IBC 層である。

2.3.3 かんらん石沈積物および輝石-かんらん石沈積物層内の内部転倒

HP95 の提唱するマントル転倒には 2 つのモードがある。高密度の IBC 層の沈降によってもたらされる斜長岩質地殻を除いた月内部全体にわたって起こる大規模な内部転倒と、IBC 層の下にあるかんらん石沈積物層の内部に起こる内部転倒である。

この 2 つのモードのうち、初期に形成するかんらん石沈積物層内で起こる内部転倒がまず先に起こると考える。かんらん石層および輝石-かんらん石層内では上層ほど密度の高い Fe に富むかんらん石および輝石が沈積するため、重力的に不安定になり、転倒が起こる。この内部転倒にかかる時間スケール t は、粘性率一定の流体の密度が深さと共に直線的に変化する流体層におけるレイリーテイラー不安定の成長時間から見積もることができる。

$$t = \frac{4\pi^2\mu}{\Delta\rho g d} \quad (2.3.1)$$

$$\lambda = 2d \quad (2.3.2)$$

ここで d は層の厚さ、 $\Delta\rho$ は最上部と最下部の密度差、 μ は粘性率、 λ は不安定性の卓越波長、 g は重力加速度である。 $\Delta\rho = 120 \text{ kg/m}^3$ 、 $\mu = 10^{19} \text{ Pa s}$ 、 $d = 7 \times 10^5 \text{ m}$ の場合、転倒にかかる時間スケールは約 0.1 Myr である。

この時間スケールは、前述したかんらん石沈積物および輝石-かんらん石沈積物層の上層に存在するマグマ残渣層が固化しきるのに必要な時間 100 Myr よりも非常に短いことが分かる。従って、かんらん石沈積物および輝石-かんらん石沈積物層の転倒は、マグマオーシャンが完全に固化するよりも先に完了すると結論できる。かんらん石沈積物層の転倒完了後の化学成層の強さは、固体層と液体層の分離の効率や、転倒運動の際の鉛直混合の程度によると考えられる。そのため、後の考察では転倒終了後の化学成層の強さはパラメータとする。

2.3.4 チタン鉄鉱を含む大規模な内部転倒

かんらん石沈積物および輝石-かんらん石沈積物層の形成に引き続き起こるチタン鉄鉱を含む高密度の沈積物層 (IBC 層) の形成は比較的長い時間をかけて起こるため、層が成長しき

⁶10⁶ yr = 1 Myr (100 万年), 10⁹ yr = 1 Gyr (10 億年)

る前に IBC 沈積物の沈降が始めると予想される。その際には比較的サイズの小さな、IBC 層の物質からなる沈降ダイアピルが形成され、これが下層のマントルに分散混合することが考えられる。このようなことが実際に起こるのか、以下で考察する。

IBC 層の転倒にかかるタイムスケールはレイリーテイラー不安定の成長時間とダイアピルの沈降時間に律速される。まず、IBC 層のレイリーテイラー不安定の成長時間と卓越波長 λ は次式で表される

$$t = \frac{6.5\mu_2^{2/3}\mu_1^{1/3}}{\Delta\rho gh} \quad (2.3.3)$$

$$\lambda = 2.9h \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{1/3} \quad (2.3.4)$$

ここで、 μ_1 と μ_2 はそれぞれ IBC 層とその下にある沈積物層の粘性率であり、 $\mu_1 \ll \mu_2$ を仮定している。 $\Delta\rho$ はこれらの間の密度差、 h は不安定を起こす層の厚さ、 g は考えている深さにおける重力加速度である。

不安定を起こす IBC 層の厚さ h は、IBC 層の厚くなる割合 \dot{h}/h とダイアピル形成によって IBC 層が薄くなる割合が等しいと仮定して得られる。ここで、 \dot{h} は層の固化速度である。また、ダイアピル形成によって IBC 層が薄くなる割合は、レイリーテイラー不安定の成長時間の逆数によって決定されるとする。よって

$$\begin{aligned} \frac{h}{\dot{h}} &\approx \frac{6.5\mu_2^{2/3}\mu_1^{1/3}}{\Delta\rho gh} \\ h &\approx \left(\frac{6.5\mu_2^{2/3}\mu_1^{1/3}\dot{h}}{\Delta\rho g} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

となる。 $\Delta\rho = 0.35 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、 $\dot{h} = 1 \text{ km/Myr}$ 、かんらん石沈積物層の粘性率をその最小値に近い値である $\mu_2 = 10^{19} \text{ Pa s}$ 、IBC 層の粘性率を $\mu_1 = \mu_2 \times 10^{-1}$ もしくは $\mu_1 = \mu_2 \times 10^{-5}$ とすると、不安定性の成長時間はそれぞれ $1.3 \times 10^6 \text{ yr}$ および $0.3 \times 10^6 \text{ yr}$ 、卓越波長は 8 km および 40 km となる。成長時間は幅を持つが、IBC 層が成長しきる時間、 10^8 yr 、と比較すると、明らかに短い。従って、IBC 層が成長しきる前に IBC 層は不安定となり、IBC ダイアピルが沈降を始めると結論できる。

次にダイアピルの沈み込みに必要な時間は、粘性率 μ_2 の流体中を沈降する粘性率 μ_1 の流体球のストークス沈降速度 V から求めることができる。

$$V = \frac{1}{3} \frac{\Delta\rho ga^2}{\mu_2} \left(\frac{\mu_2 + \mu_1}{\mu_2 + \frac{3}{2}\mu_1} \right) \quad (2.3.6)$$

ここで a はダイアピルの半径である。ダイアピルの半径は IBC 層内で卓越波長を一辺とする水平な正方形を考え、これを底面積とし高さを h とした IBC 層の体積 $\lambda^2 h$ が球形のダイアピルの体積と等しいとして求める。

$$\frac{4\pi}{3} a^3 = \lambda^2 h \quad (2.3.7)$$

$\mu_1/\mu_2 \approx 10^{-1}$ もしくは $\mu_1/\mu_2 \approx 10^{-5}$ の場合、ダイアピルの半径はそれぞれ 3 km および 4.5 km である。ダイアピルの大きさは \sqrt{h} に比例するので、固化速度が大きくなってもダイアピルの直径は比較的小さいままであると考えられる。月の半径にわたる距離をダイアピルが沈み込む時間は $\mu_1/\mu_2 \approx 10^{-1}$ と $\mu_1/\mu_2 \approx 10^{-5}$ の場合、それぞれ 400 Myr と 140 Myr である。このように小さなダイアピルは 10^8 yr よりも長い時間をかけて沈降するため、IBC 層が成長しきった時点で月の中心部まで到達していない。よってこの時点では、下層と混合し希釈した層を形成することが分かる。さらに、この希釈混合した層が再びレイリーテラー不安定を起こす可能性が考えられる。

この希釈された IBC 層の厚さは、IBC 層全体の固化時間とダイアピルの沈降速度の積で求めることができる。 $\mu_1/\mu_2 \approx 10^{-1}$ 、固化時間を 100 Myr とするとダイアピルの沈降速度 1.4×10^{-10} m/s から最大 430 km の距離を沈み込むことが分かる。

希釈された IBC 層とより密度の低いかんらん石沈積物層の間で生じるレイリーテラー不安定の成長時間と波長は、希釈層の厚さが $h \approx 430$ km の場合、それぞれ 8.2×10^3 yr および 1200 km となる。ただし、希釈された IBC 層とその下の層の粘性率は等しいと仮定している。よって希釈された IBC 層のレイリーテラー不安定の成長時間は、ダイアピルが月中心部まで沈降するのに要する時間 (100 Myr) よりも明らかに短いため、希釈された IBC 層が再び転倒を起こすことが分かる。

希釈された IBC 層は、転倒後、月中心部にまで沈降し、IBC コアを形成する。IBC コアには希釈の度合いに応じて月全体の平均値の 5-10 倍の放射性熱源が濃集する。これが熱源となり、月内部での再加熱が起こると期待される、

2.4 転倒後の熱進化

転倒完了直後の月内部の化学的成層は、重力的に安定である (化学成層によるマントル最上部と最下部の密度差は $\Delta\rho \approx 200$ kg/m³)。熱駆動対流は、表層からの冷却、あるいはコアからの熱によって、それぞれマントル浅部ないしコア-マントル境界で始まると考えられる。マントル全体の安定な化学成層を崩し、対流を起こすために必要な温度差は 2000 である⁷が、このような温度差を単なる表層からの冷却によって形成することはマグマオーシャンの結晶化

⁷以下に示すように、温度上昇 ΔT による密度変化 $\Delta\rho$ は

$$\Delta\rho = -\rho\alpha\Delta T$$

と書ける。ここで、 ρ は元の密度であり、 α は熱膨張係数である。 V を単位質量あたりの体積、 ΔV をその変化量とすると

$$\rho + \Delta\rho = \frac{1}{V + \Delta V} = \frac{1}{V(1 + \frac{\Delta V}{V})} \approx \frac{1}{V} \left(1 - \frac{\Delta V}{V}\right)$$

式の途中でテイラー展開を行った。従って

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\Delta V}{V}$$

となる。 $\frac{\Delta V}{V}$ は体積膨張の割合を表し、これが温度変化による場合は $\alpha\Delta T$ に等しい。 $\alpha = 3 \times 10^{-5}$ /K、 $\Delta\rho \approx 200$ kg/m³、 $\rho = 3000$ kg/m³、温度差 ΔT とおくと、 $\Delta T \approx 2000$ を得る。

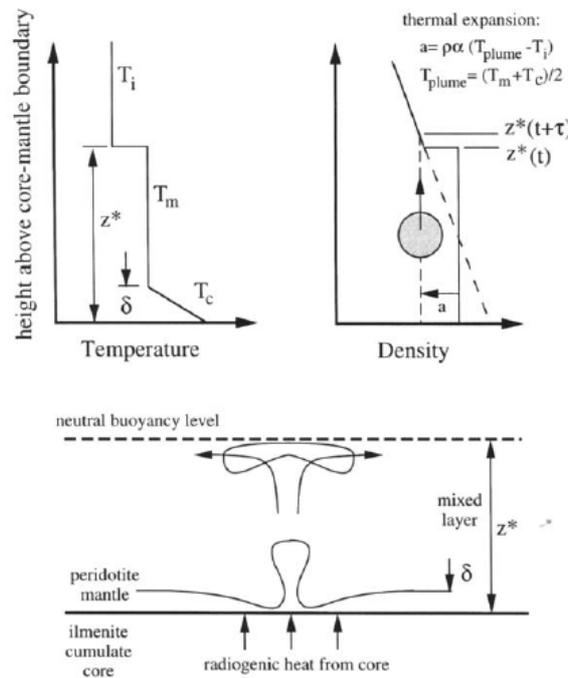


図 2.5: 熱進化モデル. 下の図はマントル底部の熱境界層からプリュームが形成されることを, 上の図は温度と密度のコア-マントル境界からの高さに伴う変化を表している. (HP95)

温度から考えると不可能である. 以下の解析では, 上部で始まる冷却による熱駆動対流の影響はないと仮定し, コア-マントル境界層直上で生じる熱駆動対流についてのみ考える.

マントル最下部の熱境界層は熱伝導により, 時間と共にその厚さを増していく. 層が十分に厚くなり, 次式で求められるレイリー数 R_a が臨界レイリー数をこえると, 熱境界層がプリュームを形成し, より上部のマントルへ熱を輸送する.

$$R_a = \frac{\rho \alpha g (T_c - T_m) \delta^3}{\mu \kappa} \tag{2.4.1}$$

ここで T_c と T_m はそれぞれコア-マントル境界とその上にあるマントルの温度, α は熱膨張係数 ($3 \times 10^{-5} / K$), κ は熱拡散率 ($10^{-6} \text{ m}^2/s$), g は深さ 1200 km での重力加速度, ρ は密度, δ は熱境界層の厚さである. また臨界レイリー数の値は $R_{acrit} \approx 10^3$ である. プリュームは熱的浮力 (正) と化学成層による化学的浮力 (負) がつりあう高さまで上昇し, 熱的・化学的に均質化した混合層を形成すると仮定する.

熱伝導により熱境界層がプリュームを形成する厚さ δ まで成長する時間 τ は次式で見積もられる (4.2 節参照).

$$\tau = \frac{\delta^2}{2\kappa} \tag{2.4.2}$$

ここで、熱境界層においては化学的密度差よりも、熱的な密度差の方が大きいと仮定する。

熱境界層が不安定となりプリユームとなって上昇すると、コア-マントル境界上には相対的に低温なマントル物質が輸送され、熱伝導によって熱せられる。上に横たわるマントルへの単位時間あたりの熱流量は、熱境界層中の物質の平均温度を $(T_c + T_m)/2$ とし、熱境界層が不安定になる時間 τ の間に付け加わる単位面積あたりの熱量 $\rho c_p (T_c - T_m) \delta / 2$ を τ で割れば求まる。

$$q = \frac{\rho c_p (T_c - T_m) \delta}{2\tau} \quad (2.4.3)$$

ここで c_p (1 kJ/kg K) は熱容量である。

ここでマントルの内部転倒完了直後の化学的密度成層はコア-マントル境界からの高さの一次関数とし、混合層ではその平均密度をとると仮定する。時間と共に混合層の温度 T_m が上昇するにつれて、混合層の厚さ z^* も増す。

混合層の厚さ z^* と平均温度 T_m の時間変化は単純なエネルギー収支から得られる。混合層の熱エネルギーの微小時間における変化は、コアからの熱供給と冷たいマントルの取り込みによって決まる。球対称を仮定すると、このエネルギー収支は以下のように書ける。

$$\frac{1}{3R^2} \frac{d}{dt} \{ \rho c_p T_m [(R + z^*)^3 - R^3] \} = q - \rho c_p (T_m - T_i) \frac{dz^*}{dt} \quad (2.4.4)$$

ここで T_i はマントルの初期温度である。また、コアの温度 T_c は、マントルへの熱の流出と、放射性熱源による加熱のバランスによって決まる。コアと熱境界層ではかなりの融解が起こり得るので、融解熱 (600 kJ/kg K) も考慮する。

混合層の厚さと温度の時間変化の典型例をいくつか図 2.6 で示した。また、表 2.2 にはこのモデルを用いて様々なパラメータを代入した結果を示してある。パラメータとしては熱源を月全体の 5-10 倍、マントル粘性率を $10^{19} - 10^{20}$ Pa s, コアの半径を 550 km と 475 km, 熱境界層での化学的密度勾配を 0.3×10^{-7} /km, 0.6×10^{-7} /km, 0.9×10^{-7} /km, とした。

表 2.2 に注目すると、(3) のモデルパラメータではマントルが溶融するまでの時間が約 5 億年となっている。これは、海の火成活動の時間的遅延をこのモデルの枠組みで説明できることを示す。(3) のモデルパラメータにおける時間の関数としての熱構造の変化を図 2.7 に表した。

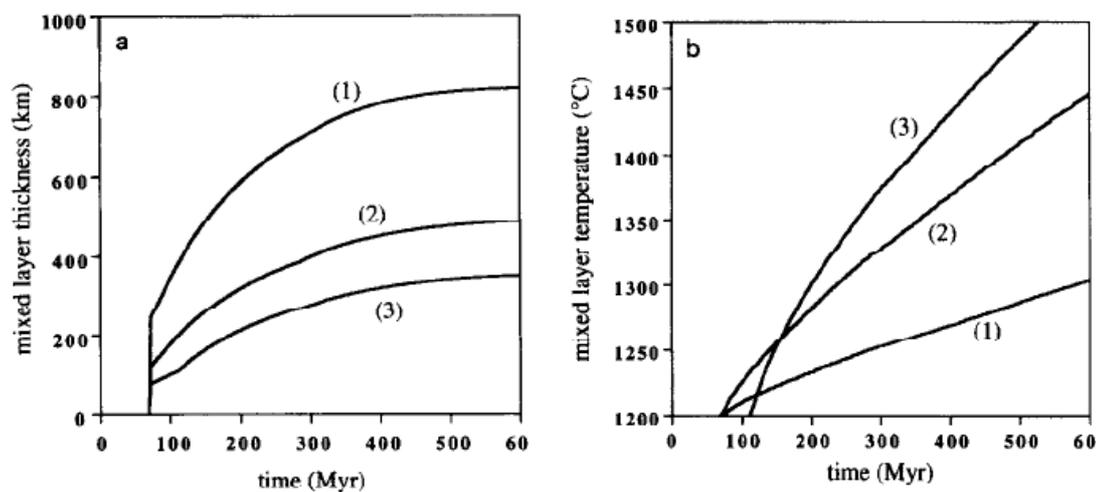


図 2.6: 混合層の厚さと温度の時間変化. 図中の番号は表 2.2 中の各番号のモデルパラメータの組み合わせと対応している. 各時点で比較すると, 化学的密度勾配が高いほど混合層の厚さは薄くなり, 温度は高くなる (HP95).

表 2.2: モデルパラメータとその結果

	heating	viscosity (Pa-sec)	core radius (km)	compositional density gradient (km^{-1})	time to melting (Myr)	melting depth (km)	melting temperature ($^{\circ}\text{C}$)	melting pressure (GPa)
(1)	10.	10^{19}	550.	0.3×10^{-7}	996.	336.	1365.	1.84
(2)	10.	10^{19}	550.	0.6×10^{-7}	636.	760.	1458.	3.08
(3)	10.	10^{19}	550.	0.9×10^{-7}	507.	807.	1491.	3.54
(4)	5.	10^{19}	550.	0.3×10^{-7}	1965.	522.	1421.	2.59
(5)	10.	10^{20}	550.	0.9×10^{-7}	735.	664.	1459.	3.09
(6)	10.	10^{19}	475.	0.6×10^{-7}	774.	810.	1474.	3.42
(7)	10.	10^{19}	475.	0.9×10^{-7}	642.	948.	1502.	3.79

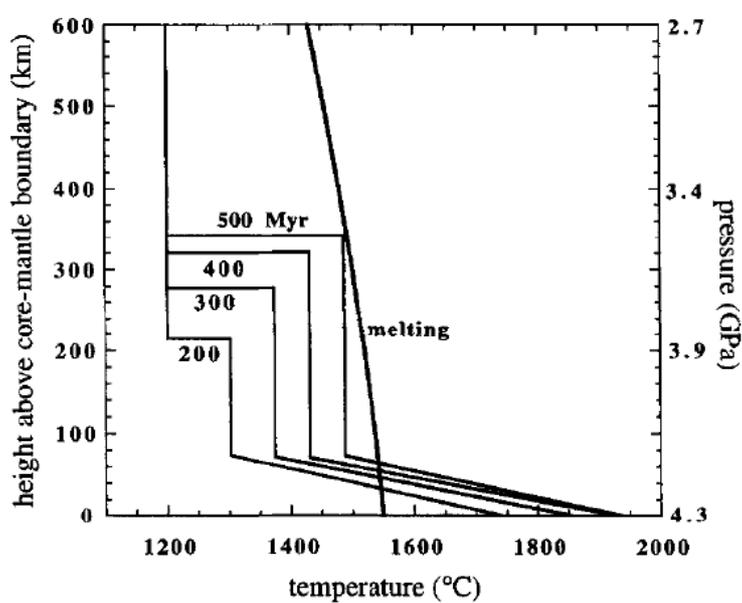


図 2.7: 構造の時間変化. コアの放射性熱源元素が月全体の 10 倍, 熱境界層での化学的密度勾配 0.9×10^{-7} /km、マントル粘性率 10^{19} Pa s, 初期のコアとマントルの温度 1200 とした場合のものである. これは表 2.2 の (3) のパラメータと図 2.6 中の (3) の結果と対応する. (HP95)

2.5 考察

マントル転倒モデルでは、希釈された IBC 層とその下の沈積物層の転倒運動の水平スケール (波長) が大きく、全球規模に近い転倒が不完全な状態で停止することを仮定すると、月の裏表の二分性を説明できる (Parmentier et al., 2002). 希釈された IBC 層の厚さとレイリーテイラー不安定の波長の関係は式 (2.2) により与えられている. これを図 (2.8) に図示した. ここから、希釈された IBC 層が厚くなるにつれ、不安定波長が大きくなることが分かる.

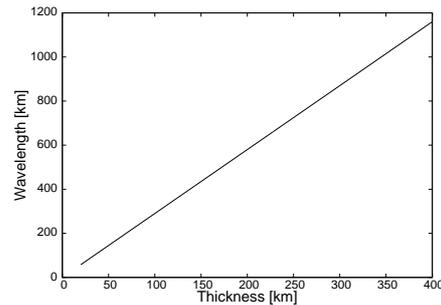


図 2.8: 希釈された IBC 層の厚さとレイリーテイラー不安定波長の関係. 希釈された IBC 層とその下の層の粘性率は等しいとしている ($\mu_1/\mu_2 = 1$).

また、海の火成活動の開始時期は、表 2.2 より IBC コアの放射性熱源元素の濃集度、粘性率、コア上部のマントルの科学的密度勾配に依存することが分かる. その中でも最も強く影響を及ぼすと考えられるのは熱源元素の濃集度である. IBC コアの放射性熱源濃集度が地球の値の 10 倍の場合、数億年の時間間隔の後に溶融開始するが、5 倍の値の場合、約 20 億年経過した後に溶融が開始する (図 2.9). 熱源濃集度の観点からみると、火成活動の遅れが約 5 億年であるので、火成活動の開始時期を説明するためには、放射性熱源の濃集度が少なくとも 5 倍の値よりも大きい必要がある. 近年では火成活動の開始時期がさらに早い可能性があることが示唆されているが (例えば Terada et al., 2007), この場合も同様である.

しかし、放射性熱源の濃集度が大きいことと希釈された IBC 層のレイリーテイラー不安定波長が大きいことはそのままでは両立しない. なぜなら、希釈された IBC 層が厚くなるにつれ、IBC 層は希釈され、放射性熱源濃集度が小さくなるからである (図 2.10). 例えば、希釈された IBC 層の厚さが約 60km である場合、放射性熱源濃集度が地球の値の 10 倍となる. しかし、この厚さでのレイリーテイラー不安定波長は約 170 km と小さい. したがって HP95 による、マントル転倒モデルのみで火成活動の遅れと二分性のどちらともを説明することは難しいと考えられる.

しかしながら、HP95 のモデルでは単純化がなされていることに注意が必要である. 長波長の重力不安定と、火成活動の開始時間を同時に説明できるかどうかは更なる検討が必要と考えられる.

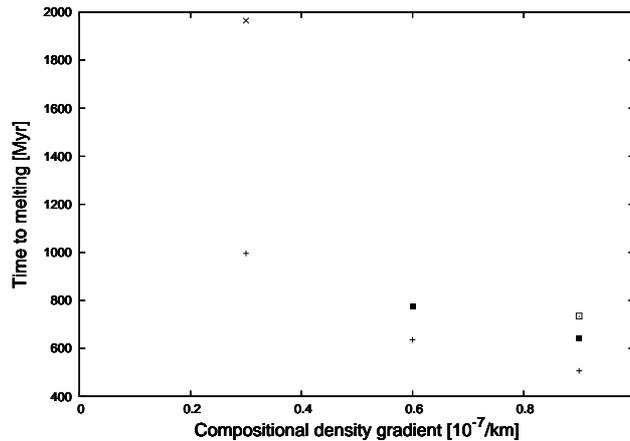


図 2.9: 熱源濃集度, 科学的密度勾配, 粘性率と溶融時間の関係. 横軸に科学的密度勾配, 縦軸に溶融し始めるまでにかかる時間をとっている. 各点は 10 倍の熱源濃集度, 粘性率 10^{19} Pa s, コアの半径 550 km を基本としている. ただし, 図中の点 \times は熱源濃集度が 5 倍, $+$ は粘性率が 10^{20} Pa s, \square はコアの半径が 475 km とし, 他の条件は基本と同じである. 表 2.2 より作成.

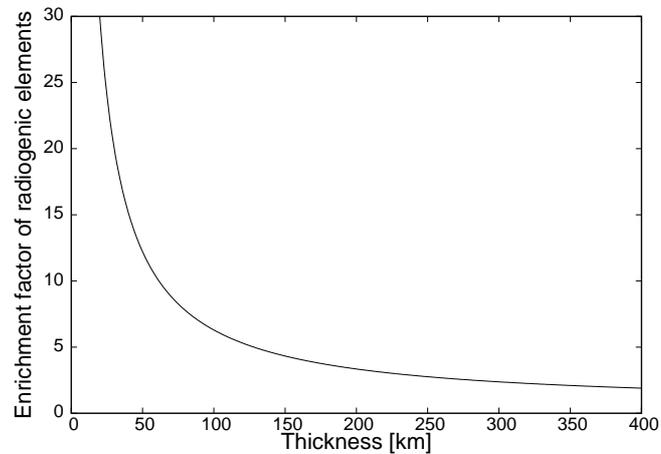


図 2.10: 熱源濃集度と希釈された IBC 層の厚さの関係. 横軸に希釈された IBC 層の厚さ, 縦軸に熱源濃集度をとっている. 20 km の IBC 層には全体の 30 倍の放射性熱源元素が含まれており⁹, ダイアピルは希釈された IBC 層全体に均一に分布すると仮定.

⁹ここで, IBC 層はマグマオーシャンが 95 % 固化後の, 全体の 20 倍の放射性熱源元素を含むメルトから形成される. このメルトからは更に斜長岩が晶出し, 斜長岩は放射性熱源元素に欠乏するため, 残ったメルトは更に放射性熱源元素に富み, IBC には 30 倍の放射性熱源元素が濃集していると考えられる (HP95).

3 まとめ

現在までの月探査で判明している月の特徴として、表と裏の二分性と約 5 億年の火成活動の時間的遅延が挙げられる。これらがどのように生じたかは未だ明らかになっていない。

HP95 では月の内部進化モデルとして近年有望視されているマントル転倒モデルを提唱し、火成活動の時間的遅延を説明することを試みた。マントル転倒モデルとは、マグマオーシャンの固化に伴い理想的に結晶分化作用が働くと、沈積物層が重力的に不安定になり、転倒を起こし、安定な成層構造が形成され、同時に熱源元素の月中心部への再配置が起こるとするモデルである。マントル転倒後、中心部へ再配置された放射性熱源元素が熱源となり、コア上部のマントルを溶融する。HP95 の結果では、コアの放射性熱源元素が全体の 10 倍、熱境界層での化学的密度勾配 $0.9 \times 10^{-7}/\text{km}$ 、マントル粘性率 10^{19}Pa s 、コア半径 550km のパラメータセットの場合、マントルが溶融するまでの時間が約 5 億年となった。

ただし、マントルが溶融するまでの時間は各パラメータに依存する。その中でも最も強く影響を及ぼすと考えられる放射性熱源の濃集度に着目すると、火成活動の時間的遅延を説明するためには、濃集度が少なくとも 5 倍の値よりも大きい必要がある。

さらに近年、このマントル転倒モデルの枠組みの中で、表と裏の二分性を説明できる可能性があることが示された。これは、全球規模に近い転倒が不完全な状態で停止することを仮定とするため、希釈された IBC 層のレイリーテイラー不安定波長が大きい必要がある。

ただし、放射性熱源元素の濃集度が少なくとも 5 倍の値より大きいこととレイリーテイラー不安定波長が大きいことは、そのままでは両立しないことが分かった。しかし、HP95 のモデルでは単純化がなされているため、更なる検討が必要である。そこで、今後の展望としてはマントル転倒モデルを基礎としつつ、上記の制約を同時に解決できる月の二分性の形成理由を明らかにすることを大目標としている。そのために、マントル転倒に伴う対流の流体力学的理解や岩石の挙動について研究する予定である。

4 詳説ノート

4.1 慣性能率

慣性能率もしくは慣性モーメントは、物体（剛体）の回転運動の変化（回転し始める、止まる等）のしにくさを表す。これは、質点系では各質点の質量 m_i とモーメント軸からの距離 r_i の二乗の積の和で求められる。

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (4.1.1)$$

ここから、連続体の場合の慣性能率は

$$I = \int r'^2 dm = \int \rho(x, y, z) r'^2 dV \quad (4.1.2)$$

で定義される。ここで r' はモーメント軸からの距離、 $\rho(x, y, z)$ は位置 (x, y, z) での密度を表し、 dm と dV はそれぞれ微小質量と微小体積を表す。モーメント軸上に座標の原点をとり、モーメント軸と位置ベクトルのなす角を θ として、極座標で考えると $r' = r \sin \theta$ より

$$I = \int \int \int \rho(r, \theta, \phi) (r \sin \theta)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (4.1.3)$$

となる。

密度が一樣な均質球について、球の中心を通るモーメント軸の周りの慣性能率は次のように求められる。均質球の質量を M 、半径を a とし、 $\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi a^3}$ を代入すると、

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \frac{3M}{4\pi a^3} (r \sin \theta)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (4.1.4)$$

$$= 2\pi \frac{3M}{4\pi a^2} \int_0^a r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \quad (4.1.5)$$

$$= \frac{2}{5} M a^2 \quad (4.1.6)$$

となる。

密度分布が球対称な球体に対し、その中心を通るモーメント軸についての慣性能率の値を質量と半径の二乗の積で割った値を慣性能率因子という。均質球の場合、式 (4.1.6) より、その大きさは 0.4 となることが分かる。球の中心部ほど密度が高い場合には、均質球の場合よりも慣性モーメントが小さくなるため、慣性能率因子は 0.4 よりも小さい。

月の慣性能率因子は 0.4 に非常に近い (表 4.1)。これは中心に金属コアが存在しない、もしくは存在しても非常に小さいことを表している。地球の慣性能率因子は約 0.33 であり、0.4 よりも小さい。これは地球の中心部に質量が集中している、つまり金属核が存在することを表している。また、木星のガリレオ衛星は木星に近い側から、イオ 0.378、エウロパ 0.348、ガニメデ 0.312、カリスト 0.354 (Anderson et al, 1996, Rambaux et al, 2011) であり、これらもまた衛星中心部に質量が集中していることを表している。このように慣性能率因子は天体の中心部に核が存在するか否かの重要な指標となる。

表 4.1: 月の測地学的データ (Vaniman, 1991 と Konopliv, 1998 より)

項目	値
半径	1738km
質量	7.353×10^{22} kg
慣性能率因子	0.3929 ± 0.0002

4.2 一次元の熱伝導方程式

物理量が z 方向にのみ変化する静止した連続体を考える。温度が z 方向に増加するような分布をとっている場合, 図 4.1 のように厚さ dz の微小領域に z 軸に直交する単位面積あたりに熱フラックス F が流入し, F' が流出する。ここで微小領域の密度は ρ , 比熱は C_P とする。

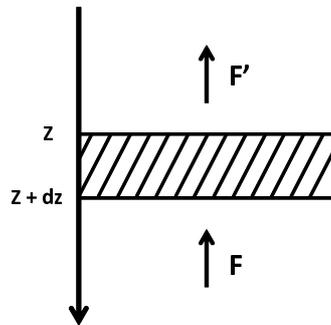


図 4.1: 微小領域への熱フラックスの流入と流出

熱フラックスの大きさは温度勾配に比例するものと仮定する。また, 熱は温度の高い方から低い方へ流れていくので, 熱フラックスの大きさは k を比例定数とすると

$$F = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.2.1)$$

と表される。 k は熱伝導率と呼ばれる。発熱がないと仮定すると, エネルギー保存則より

$$\text{微小領域内の熱量変化} = \text{流入する熱フラックス} - \text{流出する熱フラックス}$$

とすることができるので, 時間 dt の間の熱収支は

$$\rho C_P dz dT = (F - F') dt \quad (4.2.2)$$

となる。式 (4.2.1) と式 (4.2.2) より

$$\begin{aligned} \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial z} \\ \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{aligned}$$

ここで $\kappa = \frac{k}{\rho C_P}$ とおくと,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (4.2.3)$$

が求まる. ただしここでは k は座標によらないとした. κ は熱拡散係数と呼ばれる. 式 (4.2.3) が最も簡単な一次元の熱伝導方程式である.

特徴的な長さスケール d と時間スケール τ で近似して熱伝導方程式を表すと

$$\tau = \frac{d^2}{\kappa} \quad (4.2.4)$$

となる. ここから, 熱伝導に必要な時間は熱伝導する距離の二乗に比例することがわかる.

4.3 ダイアピルの沈降速度

ダイアピルの沈降速度は, 球形の物体が流体中を重力の影響のもと落下するとき得られる終端速度で与えられる. この終端速度は球に加わる抵抗力, 重力, そして浮力のつりあいから求められる.

まず簡単のため剛体球の場合を考える. 流体中を相対速度 U で運動する球に働く抵抗力 D は

$$D = -6\pi\mu aU \quad (4.3.1)$$

となる (付録参照). ここで μ は流体の粘性率, a は剛体球の半径を表す. 密度 $\bar{\rho}$ の球が密度 ρ の流体中を重力の影響の下に落下する場合に得られる終端速度 V は, 球に働く浮力を考慮すると

$$\begin{aligned} 6\pi\mu aV &= \frac{4}{3}\pi a^3(\bar{\rho} - \rho)g \\ V &= \frac{2}{9} \frac{r^2(\bar{\rho} - \rho)}{\mu} g \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

次に流体球の場合を考える. 流体中を相対速度 U で運動する流体球に働く抵抗 D' は

$$D' = -4\pi a\mu U \frac{\mu + \frac{3}{2}\bar{\mu}}{\mu + \bar{\mu}} \quad (4.3.3)$$

となる (付録参照). 密度 $\bar{\rho}$, 粘性 $\bar{\mu}$ の流体球が密度 ρ の流体中を重力の影響の下に落下する場合に得られる終端速度 V は

$$\begin{aligned} 4\pi a\mu V \frac{\mu + \frac{3}{2}\bar{\mu}}{\mu + \bar{\mu}} &= \frac{4}{3}\pi a^3(\bar{\rho} - \rho)g \\ V &= \frac{1}{3} a^2 g \frac{(\bar{\rho} - \rho)}{\mu} \frac{\mu + \bar{\mu}}{\mu + \frac{3}{2}\bar{\mu}} \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

となる.

4.4 鉛直対流の線形安定論

以下の鉛直対流の線形安定論は, 黒田 (2010), 長山 (2009) を参考にした.
 厚さ d の水平方向に無限に広がった粘性流体層を考える (図 (4.2)). 流体層が静止した定常状態を基本場とする. ここに人工的な擾乱を初期に与え, その時間変化を解析することで対流が起こるかどうかを調べることができる. 流体層の基本場の温度 T_B は鉛直座標 z のみに依存すると仮定する. 下面の温度を T_1 、上面の温度を $T_2 (< T_1)$ に固定し, 重力加速度 g も一定とする. 簡単のために xz 面内の循環のみに着目する. また, 密度変化は熱のみによらし, 圧力による密度変化は無視する.

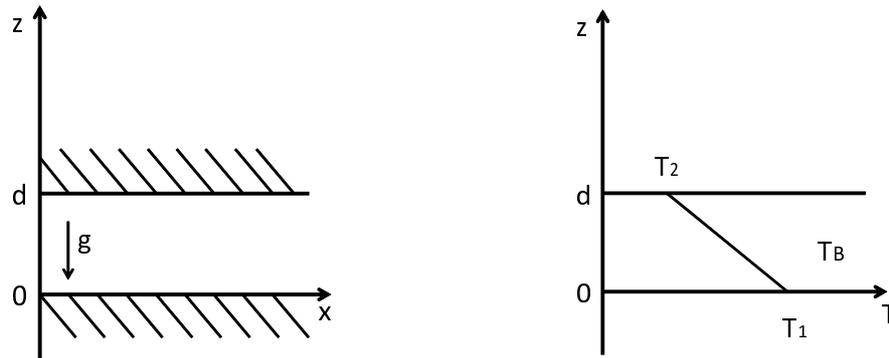


図 4.2: 左図: 考える系として, 水平方向に無限に広がる粘性流体層を考える. 鉛直方向に z 軸, 水平方向に x 軸をとり, 簡単のため xz 平面内の対流について考える. 右図: 基本場の温度分布.

系は以下の方程式系に従う. ナビエ ストークス方程式.

$$x \text{ 成分} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (4.4.1)$$

$$z \text{ 成分} \quad \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w + g \quad (4.4.2)$$

熱輸送方程式

$$\kappa \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.4.3)$$

連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.4.4)$$

各記号の定義は表 4.2 に示した.

表 4.2: 各記号の定義

u	流速の x 成分	T	温度	t	時間
w	流速の z 成分	P	圧力	ν	動粘性係数
ρ	密度	g	重力加速度	κ	熱拡散率

以下では、各変数を基本場における値とそこからの擾乱の和で表し、前者に添え字 B を、擾乱を表す量に $'$ をつける

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0(z) + \rho' \\ P &= P_B(z) + P' \\ T &= T_B(z) + T' \\ u &= u' \\ w &= w'\end{aligned}$$

ここで擾乱は十分に小さく、それらの積は無視できるとする。まずは、ナビエ-ストークス方程式について考える。基本場におけるナビエ-ストークス方程式は

$$x \text{ 成分} \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_B}{\partial x} = 0 \quad (4.4.5)$$

$$z \text{ 成分} \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_B}{\partial z} = -g \quad (4.4.6)$$

である。次に、擾乱を加えた場合のナビエ-ストークス方程式は次式となる。

$$x \text{ 成分} \quad \frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial(P_B + P')}{\partial x} + \nu \nabla^2 u' \quad (4.4.7)$$

$$z \text{ 成分} \quad \frac{\partial w'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial(P_B + P')}{\partial z} + \nu \nabla^2 w' - g \quad (4.4.8)$$

x 成分の圧力項をテイラー展開し、式 (4.4.5) を代入した後に線形近似を行うと

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial(P_B + P')}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{1}{1 + \frac{\rho'}{\rho_0}} \left(\frac{\partial P_B}{\partial x} + \frac{\partial P'}{\partial x} \right) \\ &\simeq -\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0} \right) \left(\frac{\partial P_B}{\partial x} + \frac{\partial P'}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0} \right) \left(0 + \frac{\partial P'}{\partial x} \right) \\ &\simeq -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P'}{\partial x}\end{aligned} \quad (4.4.9)$$

z 成分の圧力項も同様に考えると

$$-\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial(P_B + P')}{\partial z} \simeq -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho_0} g + g \quad (4.4.10)$$

となる。従って式 (4.4.7) と式 (4.4.8) は

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P'}{\partial x} + \nu \nabla^2 u' \quad (4.4.11)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P'}{\partial z} + \frac{\rho'}{\rho_0} g + \nu \nabla^2 w' \quad (4.4.12)$$

となる。

ρ が P と T の関数だとすると,

$$d\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P dT \quad (4.4.13)$$

と書くことができる. この式を熱膨張係数 α を用いて表す¹⁰と,

$$d\rho = -\alpha\rho dT + \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T dP \quad (4.4.14)$$

と表せる. 今, 密度は圧力によらないと考えているので,

$$d\rho = -\alpha\rho_0 dT \quad (4.4.15)$$

となる. 従って

$$\rho' = -\alpha\rho_0 T' \quad (4.4.16)$$

が成り立つ. 式 (4.4.12) は式 (4.4.16) を用いると

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P'}{\partial z} + \alpha T' g + \nu \nabla^2 w' \quad (4.4.17)$$

となる.

次に熱伝導方程式について考える. 基本場の温度 $T_B(z)$ は上方ほど温度が低いので, 温度源率 Γ を次式で定義する. $\Gamma \equiv -dT_B/dz > 0$. 基本場における熱伝導方程式は基本場が静止していることに注意すると

$$\kappa \nabla^2 T_B = \frac{\partial T_B}{\partial t} = 0 \quad (4.4.18)$$

擾乱を加えた場合の熱伝導方程式は

$$\kappa \nabla^2 (T_B + T') = \frac{\partial (T_B + T')}{\partial t} + u' \frac{\partial (T_B + T')}{\partial x} + w' \frac{\partial (T_B + T')}{\partial z} \quad (4.4.19)$$

となる. この式に式 (4.4.18) を代入した後に線形近似すると,

$$\kappa \nabla^2 T' = \frac{\partial T'}{\partial t} - w' \Gamma \quad (4.4.20)$$

となる.

$(\partial/\partial z)$ (式 (4.4.11)) $- (\partial/\partial x)$ (式 (4.4.17)) を計算し, 流線関数 φ' を用いる¹¹ と

¹⁰熱膨張係数 α は以下のように定義される. ただし $V = 1/\rho$

$$\alpha \equiv \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\frac{1}{\rho})}{\partial T}\right)_P = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P$$

¹¹流線関数 φ は二次元の場合以下のように定義される.

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad (4.4.21)$$

$$\alpha g \frac{\partial T'}{\partial x} = - \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 \varphi' \quad (4.4.22)$$

を得る. この式と $(\alpha g \partial / \partial x)$ (式 (4.4.20)) を用いて T' を消去すると, φ' に関する方程式が得られる.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 \varphi' = \alpha g \Gamma \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} \quad (4.4.23)$$

ここで以下のようなスケーリングを導入する. 時間は粘性による運動量の拡散時間 d^2/ν を単位として $t = (d^2/\nu)\tau$. 長さは d を単位として $(x, z) = d(\epsilon, \zeta)$. 流線関数は ν を単位として $\varphi' = \nu\phi$ とする. これらの関係式を式 (4.4.23) に代入すると, ϕ に関する無次元の方程式が得られる.

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - P_r^{-1} \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \nabla^2 \right) \nabla^2 \phi = G_r \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon^2} \quad (4.4.24)$$

ここで, P_r^{-1} はプラントル数, G_r はグラシヨフ数と呼ばれる無次元数で, 次式で定義される

$$P_r \equiv \frac{\nu}{\kappa}, \quad G_r \equiv \frac{\alpha g \Gamma d^4}{\nu^2} \quad (4.4.25)$$

この P_r と G_r の積がレイリー数 R_a である.

$$R_a \equiv P_r G_r = \frac{\alpha g \Gamma d^4}{\nu \kappa} \quad (4.4.26)$$

また $\Gamma = (T_1 - T_2)/d$, $\nu = \mu/\rho$ より

$$R_a = \frac{\rho \alpha g (T_1 - T_2) d^3}{\mu \kappa} \quad (4.4.27)$$

と表すこともできる.

擾乱が時間変化しない場合の ϕ に関する方程式は次式となる.

$$\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \phi = R_a \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon^2} \quad (4.4.28)$$

実験の経験より, 流れの分布は水平方向に繰り返すので,

$$\phi = \Phi(\zeta) \sin k\epsilon \quad (4.4.29)$$

とおく. k は x 方向への波数. この式を式 (4.4.28) に代入し計算すると次式を得る.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - k^2 \right)^3 \Phi = -k^2 R_a \Phi \quad (4.4.30)$$

この方程式の境界条件は

$$\zeta = 0, 1 \text{ で } \Phi = 0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} = 0$$

である. これを満たす条件は

$$\Phi = \Phi_0 \sin n\pi\zeta \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.4.31)$$

Φ_0 は定数. この式を式 (4.4.30) に代入し計算すると

$$Ra = \frac{(n^2\pi^2 + k^2)^3}{k^2} \quad (4.4.32)$$

となる. このレイリー数が最小となる波数 k を臨界波数, その場合のレイリー数を臨界レイリー数という. $n = 1$ の場合のレイリー数と波数の関係を図 (4.3) に示した. 図 (4.3) の曲線上では系は臨界状態であり, 曲線より下側では擾乱が発達せず安定状態である. また, 曲線より上側では擾乱が発達し, 不安定である. 従って, レイリー数が臨界レイリー数を超えた場合に系は不安定となり, 対流を生じ, 対流により熱を輸送する.

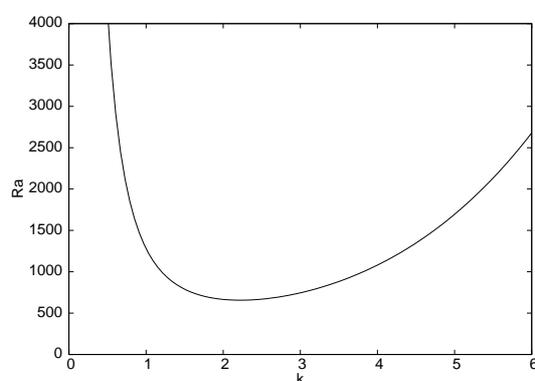


図 4.3: $n = 1$ の場合のレイリー数と波数の関係.

5 Hess and Parmentier (1995) 全訳

5.1 概要

月のマグマオーシャンの結晶化はアノーサイト質地殻と未分化の月の内部を覆っているマグマオーシャン沈積物からなる化学的に成層した月を形成する。マグマオーシャン沈積物の中では、最後に結晶化する液体は高密度の、イルメナイトに富む沈積物を形成する。そして、その沈積物は高濃度の不適合放射性元素を含む。基盤となるオリビン オルソパイロキシン沈積物もまた成層している。上層ほど後で結晶化した、高密度でより Fe に富む組成である。この論文では化学的浮力源の役割を考慮した、内部進化モデルの化学的、熱的帰結を詳しく述べる。Rayleigh-Taylor 不安定性は、高密度のイルメナイトに富む沈積物の層と、基盤となる鉄に富んだ沈積物を、月の中心に向かっていく沈み込みを引き起こす。そして、高密度の月のコアを形成する。この転倒の後、イルメナイトに富む沈積物のコアの内部の放射性加熱は上に横たわっているマントルを熱し、融解の原因となる。このモデルでは、海の高チタン玄武岩の起源領域は、少量かつ様々な量の混合したイルメナイトと KREEP を含む、コア マントル境界上で対流によって混合した層である。海の玄武岩の生成に必要とされる、この深い、高圧力溶融は、月に存在するだろう値の範囲内では、もしコアの中の放射性元素の含有量とコア上部の化学的密度勾配が十分に高いなら、海の高チタン玄武岩の火山作用の開始を説明するための無理のない時間間隔の後に起こる。特定のモデルパラメーターによって示唆される詳細とは関係なく、鉄に富むマグマオーシャン沈積物が高密度であることによって引き起こされる重力による転倒は、おそらくかなりの割合の放射性加熱と海の高チタン玄武岩の起源領域を集中させるべきである。これは月の熱進化と海の玄武岩の起源の両方にとって重要な意義であるだろう。

5.2 はじめに

この論文では月の内部の化学的進化のモデルについて述べる。このモデルでは月のマグマオーシャンの起源と進化、月のコアの存在の可能性を説明することを試みた [1,2]。高低チタンの海の高チタン玄武岩の火成活動の年代 (3.9-3.1 Ga)[6] と、400 - 500km を超える起源領域の推定された深さ ([3,4,5]) は月の内部進化の過程を反映していなければいけない。しかしながら、一般的に受け入れられている月のマグマ進化の特徴はこれまでの月の内部進化モデルでは説明されていない。多くの初期論文は月の進化上の地球物理学的 [7,8]、構造地質学的な制約 [9-13] に焦点をあてていた。それらの中でマグマオーシャンの固化 [14-16] に特に焦点をあてた、Solomon and Longhi の論文 [14] は大きなスケールの月の内部熱進化とマグマオーシャンの冷却と固化を関連づけている。彼らの結果によると、マグマオーシャンの苦鉄質沈積物、すなわち地球科学的制約を必要とする海の高チタン玄武岩の起源領域は、再溶融は必要としない。彼らのモデルによって予想された、マグマオーシャン沈積物の下の未分化の月のマントルの溶融はマグマを生成するだろうが、それらは海の高チタン玄武岩ではないだろう。明らかな結論としては、月の高チタン玄武岩の生成は Solomon と Longhi のモデルに含まれない要素を必要とするということである。

私たちは作業仮説として、厚さ数百 km の大きなマグマオーシャン、斜長石に富んだ地殻

と相補的に鉄とマグネシウムに富んだ元素の成層した沈積物マントルへの分離を受け入れることにする [17,18]. マグマオーシャン沈積物の初期の成層は、並はずれた大きさのマグマ体の結晶化の複雑性を特定することによってのみ推定することができる [19,20]. マグマオーシャンの固化は、平衡に近い結晶化作用から、完全な分別に近い結晶化作用、違う場所で起こっている両方の過程のいくつかの組み合わせに近似できるかもしれない。付け加えて、マグマオーシャンの下方への冷却されたメルトの急速な輸送によっておこる冷却は、オリピンの結晶化を引き起こす。そしてオリピンに富む月全体組成に近似される沈積物層を作り出す [21].

しかしながら、結晶分別作用の明らかな証拠が、少なくともマグマオーシャンの結晶化の最終段階である。4.5Ga までのアノーサイトに富んだ地殻の形成と、4.4Ga までのイルメナイトを含んだ沈積物マントル層の確立 [6] はとても効果的な固相-液相分離を必要とする。フェロアンアノーサイトの母体となるマグマの希土類元素組成の計算は、80 - 90 % 固化がすすんでからのみ、マグマオーシャンからブラジオクレイスが分離し始めることを示す [22]. このように、結晶分別作用はマグマオーシャン進化の最終段階で働いている。イルメナイトを含む沈積物 (IBC) 層はおおよそマグマオーシャンの 95 % 固化の後に形成されるだろう [23]. これは、マグマオーシャン沈積物は低密度の MgO に富んだ相の上に高密度の FeO に富んだ相が成層したことを示している。

低密度のマントルの上に高密度のマントルがある構造は重力的に不安定である。この論文では、化学的浮力の可能な役割を考慮した内部進化モデルの化学的、熱的關係を説明する。月内部の大規模な転倒は、マントルの成分を再分配する。これは興味深い岩石 [2,3,15,24,25] と熱の帰結を伴う。マグマオーシャンの中の最終残液から形成されるので、IBC は不適合放射性元素を多く含有している。転倒の後、IBC 内の放射性加熱は上に横たわっているマントルを熱し、マントルが融解する原因となる。この熱源は深部融解を引き起こし、いくつかのパラメーターに対しては、月の玄武岩火成作用の開始を説明するために十分な時間間隔の後に、融解が起こる。もし月が地球への巨大衝突によって形成され [26]、地球のマントルから運ばれた主な物質から成り立つなら、金属鉄のコアのための物質は存在していないだろう。金属核が存在しないなら、IBC は月の中心へ沈み込んだであろう。すなわち、比較的高密度な核を形成する単純な方法を提供することになる。もし金属核がすでに存在するなら、IBC は核のまわりに層を形成しているだろう。

5.3 マグマオーシャンの固化 初期の化学的成層

私たちは、マグマオーシャンはアノーサイト質地殻と化学的に成層したマントルに分化すると仮定している。この分化での生成物は、マグマオーシャンの深さ、月の全体組成、分化過程の性質と効率に依存している。マグマオーシャンの深さの推定値は 250km から月全体にまで及んでいる [27]. 全球スケールでの、月の表面での伸長性または圧縮性の特徴が欠乏していることは過去 3.8Gyr で月の半径の変化量を ± 1 km に制限すると論じられてきた [9]. Solomon and Chaiken [9] は、十分にこの範囲を制限することにより、月の最も外側の層の冷却による収縮は、これはマグマオーシャンの結晶化した結果であると仮定している

が、より深部の放射性加熱によって平衡していなければならない、ということを見出した。彼らはこの制約はマグマオーシャンの深さを 400km 以下に限定すると論じている。Kirk and Stevenson [12] は、もし部分溶融と化学的分化による体積の変化によって、マグマオーシャンの収縮冷却が部分的に打ち消されるなら、630km の深さのマグマオーシャンも認められると示している。

マグマオーシャンの厚さの制約は、一部の初期に融解した月を要請する月の起源の理論にとって障害である [10]。しかし初期のモデルで考えられていない他の要素が重要かもしれない。熱源元素の下方への輸送は、後に議論するが、3.8Ga より前の年代での月の浅部の冷却を早めるだろう。そしてより長い時間スケールで深部の加熱を増加させるだろう。その両方の結果は Solomon and Chaiken の制約と矛盾しないより大きなマグマオーシャンの厚さを許すだろう。

400km よりも浅いマグマオーシャンは化学的な観点から問題がある。月全体の Al_2O_3 含有量が約 4% [28-30] よりも高い場合以外には、400km よりも薄いマグマオーシャンはアノサイト質地殻の Al_2O_3 含有量を供給することができない [18]。私たちは Al_2O_3 に富んだ月の可能性も受け入れるが、一般的に受け入れられている月全体組成を認めている。

マグマオーシャンの推定された厚さでの重要な問題を認めて、私たちは 400km から 800km にわたる値を考えている。私たちの基本的なモデルは 800km の深さのマグマオーシャンである。これは、60km のアノサイト質地殻 (Mg スーツ深成岩の最終的な付加を含む)、地殻の下の 30km のイルメナイトに富む沈積物層、上部に近い比較的高密度 (低 Mg^*) の塩基性斜方輝石 オリピン層と、基盤に近い低密度 (高 Mg^*) でオリピンに富んだ沈積物層から成る厚さ 710km の層から形成される [31]。この連続層理は月の 940km の未分化な部分を覆っている [30]。

塩基性の中でも超塩基性ケイ酸塩メルトのイルメナイトリキダスは 1100 以下の温度、低圧力で約 4-5wt % の TiO_2 を含む溶融を引き起こす [23]。もし私たちが 0.2-0.3wt % [30] のマグマオーシャンの TiO_2 含有量を仮定するなら、IBC は約 30km の厚さの層を形成する。IBC 層の密度は、イルメナイト ($\rho \sim 4800\text{kg/m}^3$) の量、輝石の Mg^* 値、斜長石 ($\rho \sim 2750\text{kg/m}^3$) モード比率によって制御されている。約 1100 での完全なメルトの、イルメナイトの標準イルメナイト含有量は約 10wt % である [23,32]。そして斜長石の標準含有量は約 35wt % である。もし斜長石のかなりの割合が浮かんでいて、アノサイト質地殻に付け加えられるなら、沈積物層のイルメナイトの含有量は 15wt % まで高くなり、この層の厚さは約 20km になるだろう。私たちは沈積物層の中の少量の斜長石の量と、輝石 ($\text{Mg}^* = 0.2-0.5$) の量に対して合理的な Mg^* 値の範囲を仮定している。この Mg^* 値の範囲は最も進化の進んだフェロアンアノサイトの Mg^* 値からなる。フェロアンアノサイトは、イルメナイトのリキダスには到達していないケイ酸塩メルト (おそらくマグマオーシャン) から結晶化する [27,33]。15% のイルメナイトと 85% の輝石 ($\text{Mg}^* = 0.30$) から成る沈積物の密度は、約 3700kg/m^3 である。

フェロアンアノーサイトでの最も初生的な塩基性鉱物は $Mg^* = 0.76$ である [24]. もしフェロアンアノーサイトが、マグマオーシャンが 80 % 結晶化 [22] が起こった後に析出するならば、IBC 層の下に横たわっている沈積物は Mg^* が 0.76 以上の沈積物を含んでいなくてはならない. それらの沈積物は大部分の密度 3400kg/m^3 をもつハルツバーサイトであることが尤もらしい [31]. マグマオーシャン沈積物層の最下部の初期沈積物は、マグマオーシャンの組成と結晶化圧力から推定された Mg^* 量をもつダナイトのようである [34]. Mg^* が 0.80 より大きいペリドタイトマグマと 3-4GPa の圧力で平衡なオリピンの Mg^* 量は 0.90 より大きい [34]. それらの沈積物層は密度 3300kg/m^3 である. それらの化学制約による沈積物層の計算された密度分布の一例は、図 5.1 で与えられている.

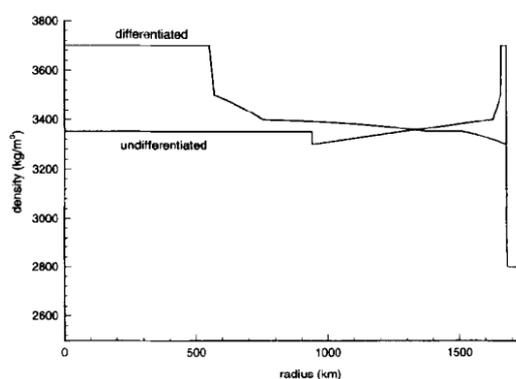


図 5.1: 転倒の前 (未分化) と後 (分化) での、半径の関数としての固有の (化学的) 密度分布. 元の不安定な形での浮揚力はマントル層の再配置に帰着し、そのため密度は半径と共に単調に減少.

マグマオーシャンの固化に必要な時間は、主として表面での固体相の厚さと持続性の関数である. 固体相では伝導によってのみ熱が輸送されるとする. 安定した固化地殻の形成までは、対流冷却とマグマオーシャンの固化は急速である [19,20]. ひとたびマグマオーシャンが安定した斜長石に富んだ地殻に覆われると、固化の速度は急激にゆっくりとなる [16]. 10km かそれ以上の安定した固化地殻がマグマオーシャンの永続的な存在となった以降は、固化の速度は 10^8yr ごとに約 100km であるべきである. Phinny [22] によると、マグマオーシャンの約 80 % が固化した後にアノーサイト質地殻はこの段階に到達していた.

このように、急速な対流冷却を経たマグマオーシャンから沈積した、最も初期の沈積物は、数百万年以内の短い時間間隔で形成された. 厚さ 800km のマグマオーシャンを仮定すると、この連続した沈積物の厚さは約 700km である (アノーサイト地殻はマグマオーシャンが約 80 % 固化した後のみ形成すると仮定している) [35]. マグマオーシャンの最後 100km はおよそ 100Myr の間隔にわたって結晶化し、約 40km のアノーサイト地殻 (現在の地殻の 20km 分はより若い Mg スーツ深成岩から成ると仮定している [36]) と約 60km の FeO に富むパイロキシン沈積物に分化した. このパイロキシン沈積物の上部 20km は IBC 層である. 後に議論するが、IBC 層と後の段階のパイロキシン沈積物を形成するために必要な

時間は、下部のオリビンに富んだ連続した沈積物が重力的に安定な成層を確立できる時間スケールの、1桁から2桁のオーダーの大きさで上回る。したがって、IBC層はMgOに富んだダナイト沈積物の比較的安定な台地の上に形成した。ここでダナイトは転倒した沈積物成層を表しているオリビン-オルソパイロキシン沈積物の上に横たわっている。

5.3.1 初期不安定成層の大規模転倒

マグマオーシャンの固化による沈積物マントルは重力的に不安定である。それは、高密度でイルメナイトに富む沈積物が、深さと共にFe/Mgが減少するオリビン-パイロキシン沈積物の上に横たわっているためである。この密度成層は月内部での大規模転倒の原因となるだろう。最初に、転倒の間の混合を無視した単純な理想像を考える。未分化の月のマントルは沈積物層の中で、浮力がつりあうレベルまで上昇する。そして、高密度のイルメナイトに富んだ層の大部分は中心に沈み込み、核を形成する [15]。IBCの密度 ($\rho \sim 3700\text{kg/m}^3$, 15%のイルメナイトと85%の単斜輝石, $Mg^* = 0.3$) はより下部の沈積物層とガーネットレルゾライト ($\rho \sim 3350\text{kg/m}^3$) であると仮定した未分化月の密度よりも著しく大きい。

800kmの厚さのマグマオーシャンでは、IBCはコア-マントル境界に分離する。苦鉄質沈積物と未分化の内部を通して沈みこんだ後に、もしすでに半径400kmのFe-Ni-Sのコアが存在していたなら、200kmの薄い層として分離し、もしコアが存在していなかったら、半径約550kmの球として分離する。月のマントルの重力的安定が確立した後の、理想的な成層と密度分布は図6.1に示した。一定の密度範囲 [37] をわずかに下回った場合¹²の月の慣性モーメントは、小さな(半径~400km)金属核か、金属核を持たないモデルによって説明できる。このモデルでは、図6.1でのモデルによって示唆されているように深さと共にマントル密度が増加する。800kmのかわりに400kmの厚さのマグマオーシャンを仮定すると、半径約475kmのIBCコアに帰着するだろう。

転倒後、マントル最上部はひょっとしたら数kmよりも薄い層をまだ含んでいるかもしれない。この層はマグマオーシャンの最終残液から結晶化した不適合元素に富んだ沈積物層(この沈積物層はUrKREEP沈積物と呼ばれる [38])と転倒を逃れたいくばくかのIBC層である。それらの沈積物はオリビン沈積物 ($Mg^* > 0.90$) の上にのっている。一方でオリビン沈積物は初期の未分化だった内部物質から導かれた150kmの厚さの層の上に横たわっている。この層はIBC層の沈み込みによって上方に置き換えられている。未分化内部に相当する層は沈積物層の上に横たわっている。この沈積物層は初めはオリビン層に富んでいるが、深さと共にオリビン-オルソパイロキシン組み合わせ沈積物に次第に変化する。オリビン-オルソパイロキシン組み合わせ沈積物はIBC層-マントル境界までほぼ続いている。

少なくとも何らかの混合が起こるので、月の実際の層序はより複雑のはずである。例えば、IBCの小さな質量は小さな沈降速度を持ち、マントル中に留まって散乱したままになるかもしれない。沈み込みと上昇のダイアピルはマントルの一部を取り込み、それらが通り抜けてきたマントルの一部と対流して混ざる [3,39]。沈み込みとそれに伴う沈積物の混合は、

¹²本文中では exceed と記載されているが“下回る”に訂正

KREEP に富んだ沈積物と IBC がマントル全体に分散するひとつの過程を表す [19,40]. その様な混合は全く混合がないと仮定した図 1 でしめされた密度成層を減少させるだろう.

おおよそ 550km の半径の IBC コアは約 15wt % のイルメナイトを含む. IBC 沈積物は強不適合元素, 特に熱源元素に富んでいるべきでもある. IBC は月の約 20 倍の熱源元素存在度を含んでいるメルトから得られる. なぜなら, IBC の源となるメルトは 95 % マグマオーシャンが固化した後に得られる液体だからである. 私達は上昇する斜長石沈積物はこれらの元素に欠乏していると仮定している. そのために, 相補的なマントルは月の存在度の約 30 倍これらの元素を含む. それらの熱源元素の一部が月の IBC コアに運ばれたらう. 熱源元素は以下解析では 5-10 倍の全体の月の組成の存在度の範囲にあると仮定している.

5.3.2 初期化学成層の転倒での時間的、空間的スケール

レイリーテイラー不安定は 2 つの形をとる. 高密度のイルメナイトに富んだ沈積物層によってもたらされる大規模な内部転倒とイルメナイトに富んだ層の下に在るマグマオーシャン沈積物の内部転倒である. IBC 層の下に形成されたマグマオーシャン沈積物は, 先に形成した Mg に富んだ沈積物の上に高密度の Fe に富んだ沈積物が覆う形で内部で成層している. それらの沈積物のほとんどは内部の未分化領域よりも密度が小さい. そのため, 月の内部での大規模な転倒を促進しない. 沈積物の内部転倒にかかる時間スケールは, 粘性率一定の流体密度が深さと共に直線的に変化する流体層におけるレイリーテイラー不安定の成長率から見積もることができる.

$$t = \frac{4\pi^2\mu}{\Delta\rho g d}$$

$$\lambda = 2d$$

d は層の深さ, $\Delta\rho$ は上部と下部の密度差, μ は粘性率, λ は波長である. $\Delta\rho = 350\text{kg/m}^3$, $\mu = 10^{19}\text{Pas}$, $d = 7 \times 10^5\text{m}$ の場合, 特徴的な時間は約 0.03Myr である. ひとたびアノーサイト地殻が安定したら, マグマオーシャンの最後 100km の結晶化は非常にゆっくりであると以前に論じた. 結晶化の時間の見積もりは 100Myr のオーダーである. それゆえに IBC のほとんどが形成される前に下部の沈積物層は重力平衡に到達していただろう.

大規模な重力不安定は IBC 層の高密度によって主に促進されるだろう. おそらく非現実的ではあるが, 最初に単純な場合を考える. この単純な場合とは分化の時間スケールと比較して急速に IBC が固化する場合である. 月の中心への IBC 層の沈み込みに要する時間スケールは, レイリーテイラー不安定によるダイアピルの形成のための時間, もしくは月のマントルを通してダイアピルが沈み込むのに要する時間によって制御される. このタイムスケールは不安定の波長とそれと対応しているダイアピルの大きさによって確定できる.

イルメナイトに富んだ沈積物層のレイリーテイラー不安定が成長するために必要な時間の見積もり [52] は

$$t = \frac{6.5\mu_2^{2/3}\mu_1^{1/3}}{\Delta\rho gh}$$

不安定な波長ではこう書ける.

$$\lambda = 2.9h \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{1/3}$$

ただし $\mu_1 \ll \mu_2$ とした. これらの記号で μ_1 と μ_2 はそれぞれ IBC とその下に横たわっている沈積物の粘性率 (それらの熔融温度付近のマントルケイ酸塩にとって 10^{19} pa s は妥当な最小値である) $\Delta\rho(0.35 \times 10^3 \text{kg/m}^3)$ はそれらの間の密度差, h は層の厚さ ($\sim 20\text{km}$), g は考えている深さでの重力加速度である. 多くのそれらのパラメーター, 特に粘性率の不確か性を考えると, この時間は 10^4 から 10^5 yr の幅を持つ. 不安定性の波長はイルメナイトに富んだ沈積物層の粘性率に影響を受けやすい. もしこの粘性率が下に横たわっている沈積物層のそれよりも 1 桁小さいなら $\mu_1/\mu_2 \approx 10^{-1}$ であり, 不安定性の波長は約 $6h$ もしくは 120km だろう. 一つの不安定性の波長での層の体積 $\lambda^2 h$ とその結果生じるダイアピルの体積を等しいと置くと, ダイアピルの直径が約 80km となる. 約 2000 個のそのようなダイアピルが形成されているだろう. そのような不安定性の小さなスケールは分化の間のいくばくかの混合をもたらすかもしれない. このダイアピルの数は λ^2 に逆比例して変化し, それゆえにダイアピルの数は $(\mu_1/\mu_2)^{2/3}$ に比例する. $\mu_1/\mu_2 \approx 10^{-5}$ の場合には, ただ一つのダイアピルが形成されるだろう. この不安定性のより大きなスケールが分化の間のより少ない混合をもたらすだろう. 月の形状の中心と質量の中心のずれと対応する地殻の非対称 [37] はそのような大規模な不安定性の証であるという仮説をたてることは興味深い.

ダイアピルの沈み込みに必要な時間は, 粘性率 μ_2 の流体中を沈降する粘性率 μ_1 の流体球のストークス沈降速度を使用することで見積もられる [41].

$$V = \frac{1}{3} \frac{\Delta\rho g a^2}{\mu_2} \left(\frac{\mu_2 + \mu_1}{\mu_2 + \frac{3}{2}\mu_1} \right)$$

ここで a はダイアピルの半径で, $4\pi a^3/3 = \lambda^2 h$ である. $\mu_2 = 10^{19}$ Pa s での $\mu_1/\mu_2 \approx 10^{-1}$ と前述した $\mu_1/\mu_2 \approx 10^{-5}$ の場合, 月の半径に匹敵する距離にわたる沈み込み時間はそれぞれ 2Myr と $3 \times 10^{-2}\text{Myr}$ である. 従って $\mu_1/\mu_2 \approx 10^{-1}$ での分化時間は小さなダイアピルの沈み込みによって制御されるが, $\mu_1/\mu_2 \approx 10^{-5}$ ではその逆が正しい. 相対粘度の良い見積もりは分化での律速段階を理解するために大事である. IBC 層が粘度が非常に小さいがあるか, 下に横たわっているマントルよりもほんのわずか粘度が小さいかは, ダイアピルが形成し始めた時点でメルトの割合と, 粒子のサイズスケールでこのメルトがどのように分布するかに強く依存している. もしメルトが粒子の表面を濡らし, 薄くて低い剪断強度の膜を形成しているなら, 小さなメルトの割合でも非常に粘性率が減少するだろう. あるいは, メルトが粒子の表面を濡らさないなら, 三重会合点と粒子の端に集まった少量のメルトはわずかにしか粘性率を減少させないだろう [42]. 適正な組成のメルトが共存している鉱物の粒子境界を濡らす割合の実験的な証拠はまだ得られていない.

分化過程は, これらの単純な見積もりが一見示唆する事柄よりもより複雑であろうことを認めるのは重要だ. ダイアピルは上記で仮定したように固化が完全に起こった後よりもむしろ層がまだ固化している間に成長する. 成長するダイアピルの大きさは固化した IBC 層の厚くなる割合 \dot{h}/h とダイアピル形成の割合を等しいと置くことによって見積もられ

る。ここで、ダイアピル形成の割合は上記で与えられるレイリーテイラー成長時間の逆数によって決定されるとする。これは固化が進むにつれての定常状態の層の厚さの見積もりを与える。

$$h \approx \left(\frac{6.5\mu_1^{1/3}\mu_2^{2/3}\dot{h}}{\Delta\rho g} \right)^{1/2}$$

ここで $\Delta\rho$ は層と下に横たわっている沈積物の間の密度差であり、他の記号は上記と同じ意味を持つ。

この層の厚さの場合、不安定性の波長の見積もりと結果として生じるダイアピルの大きさは上記で与えられる式から得られる。 $\mu_1/\mu_2 \approx 10^{-1}$ で 0.1km/Myr の固化速度の場合、見積もられる層の厚さと不安定性の波長、ダイアピルの直径はそれぞれ 0.5km と 3km 、 2km である。 $\mu_1/\mu_2 \approx 10^{-5}$ で同じ固化速度の場合、対応する値は 0.1km と 13km 、 4km である。

層の固化速度は重要なパラメーターのように思われる。Solomon and Longhi [14] のモデルはマグマオーシャンの大部分が結晶化した後、残渣層が 350Myr の間、部分的に液体のままであることを予想している。これは約 0.05km/Myr の固化速度を与える。彼らのモデルでは、固化マントルは残りの液体層の上に存在する。残渣層の中を通る重力的に不安定な層の沈み込みによって、熱が表面に到達するように伝導するのに必要な距離をおよそ半分にする [14]。定常熱伝導による層の固化時間は層の深さ（この深さは熱が伝導する距離にあたる）と比例しており、また約 $1/2$ に減少するだろう。非定常な熱伝導の場合、冷却時間は距離の二乗に比例し、そのため $1/4$ に減少するだろう。ダイアピルの大きさは $\sqrt{\dot{h}}$ に比例し、そのため固化速度が $2-4$ 倍に大きくなってさえダイアピルの大きさは小さいだろう。

従って、IBC 層の結晶化につれて、小さなダイアピルは形成し続け、下に横たわっている沈積物層の中に沈み込む。その結果、IBC とより速く形成された沈積物が混合した層を作り出す。この混合した層の厚さは固化時間とダイアピルの沈降速度の積として見積もることができる。 0.1km/Myr で固化している 20km の厚さの IBC 層（固化時間 = 200Myr ）の場合、 2km の直径のダイアピルは最大 80km の距離を沈み込むはずである。IBC 層は従って $1/4$ に希釈される。沈降速度は \dot{h} に比例しており、固化時間は \dot{h} に逆比例するので、混合した層の厚さは固化速度と実際は無関係である。しかしながら、この混合層の中の IBC ダイアピルの大きさはこの速度によって決まる。

このより厚い混合した層は、最初に IBC 層単独の場合での上記で述べたように、全体規模のスケールの不安定を発生させるだろう。 $\Delta\rho$ と層の厚さの積のみに依存する不安定性の時間スケールは以前に見積もったそれと同じままである。不安定性の波長は、混合した層のより大きな厚さと対応して約 4 倍により大きくなるだろう。しかしながら、この混合した層自身は層全体を形成するための時間よりも短い時間スケールで混合層それ自体がダイアピルを形成する。分化過程は明らかに複雑であるが、これらの単純な考察は分化は素早く起こることと IBC が約 $1/4$ に希釈されることを示唆する。

熱源がこの沈み込んでいる IBC と沈積物の混合物の中でどのように分配されるかを見積もることは、より難しい。もし熱源元素が完全に不適合（液相農集）なら、液体がそれらの

元素で飽和状態になるまで残っているどんな液体の中にも絶えず濃集するだろう。しかし、沈み込む固体はいくばくかの浮力のある粒間液体を運ぶだろう。断熱圧縮は、この液体を凝固し、密度を増加させ沈み込みを起りやすくする。どのくらいの液体がこの方法で下方に運ばれるかはメルトの移動の速度と/もしくは固体の圧密速度に依存している。分化過程の明らかな複雑さを考えると、私たちはIBC コア中の熱源量の値として月全体の値の5-10 倍を単純に考える。

5.3.3 大規模転倒の後の内部進化

転倒の後の月のマンツルの初期化学的成層は強く、重力的に安定である ($\Delta\rho \approx 200\text{kg/m}^3$)。典型的な熱膨張係数の場合 ($3 \times 10^{-5}/\text{K}$)、大規模な熱駆動マンツル対流がこの最初の成層を乱すためには、月のマンツルの上部と底部の間の超断熱的な温度差が2000 を超えなければならないだろう。マグマオーシャンの下にある月の内部の未分化領域でのとても低い初期温度を仮定してさえ、知られているマグマオーシャンの結晶化温度はこの大きな最初の段階での温度の違いを認めないだろう。内部領域での熱駆動対流はマンツルの上部付近の混合した層の中とコア-マンツル境界の混合層で始まる。そして厚さは熱的に浮力のあるマンツルを貫く化学密度の違いで決定される。以下の解析はその様なコア-マンツル境界と隣り合う層の発達を扱う。コア-マンツル境界ではマンツルの上部で成長すると予想されている相補的な層の影響が、十分に重要である深さにまだ到達していないと仮定している。

不適合熱源元素が月全体の5-10 倍に濃集しているイルメナイトのコアは上に横たわっているオリビン-オルソパイロキシン沈積物を熱する。伝導によって厚くなるコア-マンツル境界での熱境界層は、層の厚さをを用いたレイリー数が臨界値を超えたとき不安定となる。

$$Ra_{crit} = \frac{\rho\alpha g (T_c - T_m) \delta^3}{\mu\kappa} \approx 10^3$$

そして、上に横たわっている化学的に成層したマンツルの中を上昇するブリュームを発生する。ここで T_c と T_m はコア-マンツル境界と上に横たわっているマンツル中での温度である。 α は熱膨張係数 ($3 \times 10^{-5}\text{K}^{-1}$)、 κ は熱拡散率 ($10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$)、 g は深さ1200kmでの重力加速度である。この不安定性の基準では、熱的な密度差に比べて、熱境界層にわたる化学的な密度差がごくわずかであると仮定している。熱境界層が不安定となる厚さ δ に伝導によって成長する時間 τ は以下である。

$$\tau = \frac{\delta^2}{2\kappa}$$

成長をくりかえし、境界層の不安定性は上に横たわっているマンツルの中を上昇するサーマル(温かい流体塊)を形成する。熱境界層の中で物質の平均温度の見積もりとして $(T_c + T_m)/2$ をとると、上に横たわっているマンツル中への熱流量は、それぞれ境界層が不安定になる時間 $\rho c_P (T_c - T_m) \delta/2$ の間に付け加わる熱量と不安定性の振動数 $1/\tau$ の単純な積である。

$$q = \frac{\rho c_P (T_c - T_m) \delta}{2\tau}$$

ここで c_p (1kJ/kg K) は熱容量である.

いくつかの単純だが妥当な仮定をおいて, 化学的な成層の中を上昇する熱プルームの力学を扱うことにする. (1) コア-マントル境界 (CMB) で形成されたプルームは, もともと (化学的に) 低密度だがより冷たいマントル中を上昇する. ごく僅かに安定な熱境界層の中で平均温度と組成を持つプルームは, CMB から正の熱的浮力と負の化学的浮力がバランスする高さにまで上昇する. (2) プルームは転倒とそれらの上昇を通してのマントルの混合を引き起こす. よって, マントル層を熱的, 化学的に均質化し, それはプルームが上昇する高さと同じ. 従って, 図 5.2 で示したように熱境界層の上の混合層は一定の温度 T_m を持つ. 初期に固有の密度成層は CMB からの高さの単純な一次関数をとる. 図 5.2 で示したように, 完全な混合の仮定をおくと, 混合した層の中の固有密度 (温度を同じにして比較した密度) はちょうど初期に予め存在していた層の厚さにわたる密度幅の平均である. プルームの密度と混合層の上部のマントルの密度は, 図 5.2 のように熱膨張によって減少する固有密度によって与えられる. 時間と共に温度 T_m が増加するにつれて, 混合層の厚さもまた増加する.

混合した層の厚さ z^* の進化とその範囲内での平均温度 T_m は単純なエネルギー収支から得られる. わずかな時間の増分の間の熱エネルギーの変化は 熱境界層の不安定性によって加えられる熱量と混合層の中の冷却している上に横たわっているマントルの取り込みによってきまる. 球対称を仮定するとこのエネルギー収支は以下のように書ける. ここで R はコアの半径である.

$$\frac{1}{3R^2} \frac{d}{dt} \{ \rho c_p T_m [(R + z^*)^3 - R^3] \} = q - \rho c_p (T_m - T_i) \frac{dz^*}{dt}$$

コアの温度は, 上に横たわっているマントルへ失われる熱の割合と長期にわたる放射性熱源によるバランスで決定される. イルメナイトに富んだコアと熱境界層にはかなりの融解が起こるので, 融解熱 (600kJ/kg K) もまた考慮する.

初期のコアとマントルの温度が 1200 K とし, マントル粘性率の幅 ($10^{19} - 10^{20}$ Pa S) と放射性元素の値 (地球全体の 5-10 倍) を与えこのモデルから得られる予測について調べることにする. 上記のこのコアとマントルの初期温度は, IBC 層の固化温度を 1100 K とし扱うことと沈み込む IBC ダイアピルの断熱圧縮に伴う温度の上昇を含めることによって見積もられる. 図 5.1 での IBC コアのちょうど上部で, 密度が 100km の高さにならって約 1% 変化する. しかしながら, もしいくばくかの混合が転倒の間に起こっていたなら, 組成勾配は減少するだろう. それゆえ私たちは 100km にわたって 0.9%, 0.6%, 0.3% の密度変化をする場合を考える. 表 5.1 では私たちが分析したモデルパラメーターの幅をまとめた. ペリドタイトソリダスはイルメナイトを含むハルツバージャイトのそれとして得られる [3]. 図 5.3 はそのモデルの一つでの予想される温度分布を示している. そして図 5.3 の単純な線形変化として見積もられる熱境界層内での温度分布は, 各時点での不安定の起こる直前のものを示している. 図 5.4 は表 5.1 で載せたモデルのいくつかによる混合した層の温度と厚さの時間変化を示す. これらは以下でさらに議論する.

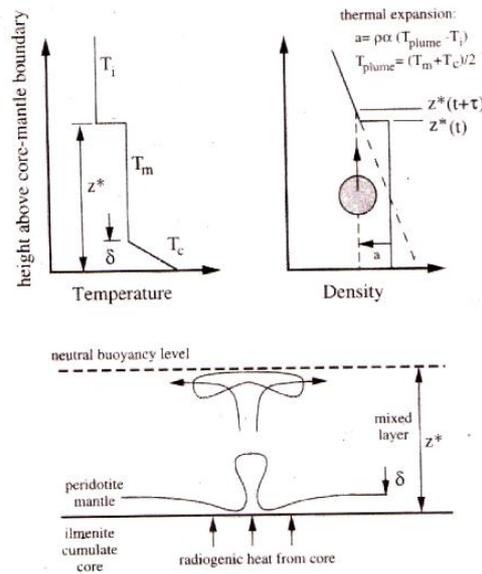


図 5.2: 化学的に成層した月のマンツルの熱的進化モデルの重要な特徴は、イルメナイトコア中の放射性熱源によって下から熱されていることである。下の図はマンツルの底で不安定な熱境界層からプリュームが形成されることを説明している。プリュームはある高さに断熱的に上昇する。この高さとは、プリュームの正の熱的浮力と負の化学的浮力がバランスするところである。プリュームの上昇は熱的、化学的に良く混合された層を作り出すと仮定されている。任意の時間 t で、厚さ $z^*(t)$ の良く混合した層を通して上昇するプリュームが高さ $z^*(t+\tau)$ まで上に横たわっているマンツルを突き抜ける。ここで τ は不安定性熱境界層を伝導的に形成するために必要な時間である。図 5.1 から見積もられるように、マンツルは高さと共に線形的に減少する固有の (化学的な) 密度と初期温度 T_i を持つ。

5.4 考察

これらのモデル全てにおいて、マンツル中での溶融はちょうどコア マンツル境界の上部の熱境界層の中で始まっている。例えば、モデル (3) (表 5.1) の場合のマンツルの熱進化を考える。モデル (3) では地球全体の値の 10 倍の熱源を持ち、コア マンツル境界の上部の高さで 100km につき 0.9% の密度勾配があるとしている。コアの形成と月のマンツルの転倒後、400Myr 後のコア マンツル境界よりも上のマンツルの温度プロファイルは温度 1425 K で 320km の良く混合したマンツル層を持つ。温度はまだその深さにおけるマンツルソリダスよりも十分に低い (図 5.3)。しかしながら、おおよそ 70km の厚さの熱境界層は部分的に溶融している。熱境界層中での溶融は部分溶融したマンツルの密度をわずかに増加もしくは減少させるだろう [5]。そして、それらの条件下でのメルトと固体の密度の推定値に依存する。溶融の浮力への効果は熱膨張の効果と比較すると小さいだろう。それゆえ私達は上記で述べられているモデルの中のメルトの浮力を無視している。月の核の中のメルトの存在により起こりえる効果は後に考察する。

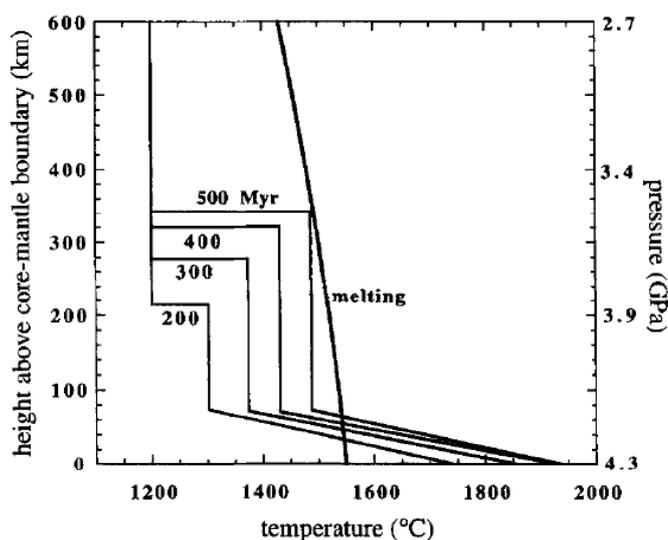


図 5.3: 核の放射性元素が地球全体の 10 倍, コア-マントル境界上部での化学的密度成層 $0.9 \times 10^{-7}/\text{km}$, マントル粘性率 10^{19}Pa s , 初期のコアとマントルの温度 1200 °C とした場合の時間の関数としての熱構造の時間変化の見積もり. これは表 1 の 3 列目でのパラメータと図 4 中の (3) の結果と対応する.

表 5.1: 選択したモデルパラメータとその結果

	heating	viscosity (Pa-sec)	core radius (km)	compositional density gradient (km^{-1})	time to melting (Myr)	melting depth (km)	melting temperature (°C)	melting pressure (GPa)
(1)	10.	10^{19}	550.	0.3×10^{-7}	996.	336.	1365.	1.84
(2)	10.	10^{19}	550.	0.6×10^{-7}	636.	760.	1458.	3.08
(3)	10.	10^{19}	550.	0.9×10^{-7}	507.	807.	1491.	3.54
(4)	5.	10^{19}	550.	0.3×10^{-7}	1965.	522.	1421.	2.59
(5)	10.	10^{20}	550.	0.9×10^{-7}	735.	664.	1459.	3.09
(6)	10.	10^{19}	475.	0.6×10^{-7}	774.	810.	1474.	3.42
(7)	10.	10^{19}	475.	0.9×10^{-7}	642.	948.	1502.	3.79

熱境界層は熱的な浮力が存在し不安定となり, 上に横たわっているマントルと熱的にも化学的にも混合する. 熱境界層の大部分は混合したマントルの平均温度まで冷却される. 混合した層の温度が局所的なソリダスよりも低い場合, 熱境界層から混合した層へ輸送されるメルトは全て結晶化し, 混合したマントル層へ潜熱を解放する. 図 5.3 で表されている温度はこの潜熱の熱的な寄与を含んでいる.

コア形成の 500Myr 以内に, 混合した層の厚さは 340km 以上に到達し, より重要なこととして, 混合した層の上部での温度は 3.5GPa の圧力と対応する深さで局所的なソリダスに到達する. 混合した層の中で溶融が始まるタイミングと深さはいくつかのモデルパラメー

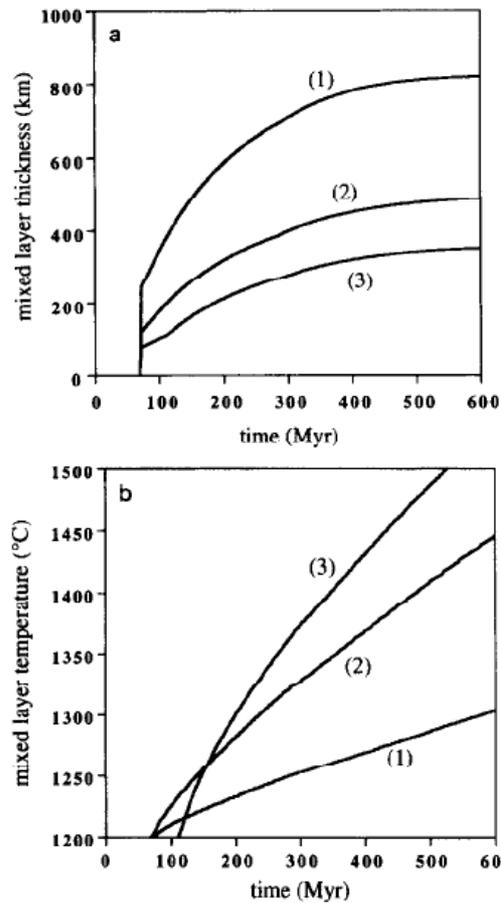


図 5.4: 表 1 中の (1)(2)(3) 列と対応している化学的密度勾配の幅の場合の, 時間の関数としての混合した層の厚さと温度. 最も高い化学的密度勾配 (3) の場合は各時点で比較すると混合層が最も薄く, 温度が最も高い場合と対応している. これはほぼ同じ量の熱がより薄い層につけ加えられるためである.

タに依存している. 図 5.4 の a と b は混合した層の温度と厚さの時間進化を表している. それぞれコア-マントル境界より上部で 100km につき -0.3% , -0.6% , -0.9% の密度勾配の場合である. 最も冷たく, 最も厚い混合した層は, 最も小さな密度勾配でのマントルに対して得られる. 小さな密度成層でより大きな層の厚さになるのは, より小さな組成密度勾配の中で熱プルームの高さがより上昇するためである. より低い温度は, 繰り返す熱境界層の不安定性から, 混合した層でのより大きなマントルの大きな質量に熱をつけ加えるためである. 図 5.4 の結果を基にして, ある時間で低い組成密度勾配を持つ混合したマントルは高い組成密度勾配を持つそれよりも厚いが冷たい. より安定した化学成層は熱をより薄い層に留めるように作用する. 結果として, 高密度勾配よりも低密度勾配の場合, 混合した層の溶融はより低い圧力, より低い温度, 400Myr よりもさらに後で起こる.

熱進化と続いて起こる混合した層の溶融もまたコア中の熱源元素の濃集に依存している.

放射性元素を地球全体の5倍の値に減らすことは劇的な結果をもたらす。混合した層の上部でソリダスに到達するには、10倍のコアの放射性元素の場合よりもさらに1 Gyr 経過した後である(表 5.1)。同様に、 10^{19} から 10^{20} Pa s にマントル粘性率が増加すると、混合した層の上部で溶融するまでの時間は約 200 Myr 増加する。この場合、わずかに低い温度といくらか浅い所でメルトは発生する(表 5.1 の (3) と (5) を比較)。

私達は熱境界層の底部とコア中で得られる温度は転倒の後すぐにソリダスを超えることに既に注目していた。マントルはハルツバージャイトかもしかしたらオリピンを含んだオルソパイロキシナイトだと仮定すると、溶融率は 100 % に近くなる。フォルステライト-エンスタタイトの共晶点 ($Mg^* = 1.0$) の温度は 4 GPa で約 1900 °C である。エンスタタイトとフォルステライトそれぞれの一致融解点はこれらの圧力で約 1920 °C と 2100 °C である [43]。これらの沈積物の Mg^* 値は 0.80 と仮定されている [44]。オリピンのリキダス温度は $3 / Mg^*$ 数つまり $Mg^* = 0.80$ の場合約 60 °C 低下する。従ってオリピンとエンスタタイト ($Mg^* = 0.80$) のリキダス温度は特にこれらの圧力でおおよそ 2040 °C と 1860 °C である。よって図 5.3 で示されている温度の場合、熱境界層の低部はパイロキシナイトに富んだ岩石の場合は全体として融解されて、オリピンに富んだ沈積物の場合は部分的に溶融されている。

月のコアのリキダス温度はさらに低い。なぜなら、 Mg^* 値がより低いからである。もしこの解析が正しいなら、地球全体の 10 倍の放射性元素によって核が形成した後約 400-500 Myr で月のコアは完全に溶融している。800 km の半径である現在まで続く中心部分での部分的な融解によって、月の明らかに高いラブレ数が説明できることは興味深い [13]。月の中心に向かう熱源への低い融解温度物質の濃集は現在溶融している月のコアの説明を容易にする。

マントル底部での熱的、化学的進化の中での月の IBC コアの融解はどのような役割を果たすだろうか？ 私達のモデルでは、月のコアは約 15 wt % のイルメナイトと 85 wt % のパイロキシナイトとプラジオクレイスを含んでいる。融解したコアの密度は妥当な熱膨張と圧縮率に対して大きな外挿をすることによって見積もることができる。さらに TiO_2 、 Mg^* 数と SiO_2 含有量において起こりうる少量の変化は見積もられた密度に重大な影響を及ぼす。8 % TiO_2 を持つ月の海のようなメルトの場合 (15 % のノルムイルメナイト量と等価)、Delano [5] による結果からは融解したコアの密度は約 $3400 \pm 100 \text{ kg/m}^3$ が示唆される。

相対的に、熱境界層の中で部分的にもしくは完全に溶融したマントルの密度はかなり小さい。熱境界層中のマントルは主に低 CaO-パイロキシナイト ($Mg^* \approx 0.90$) と少量のイルメナイトであると仮定している。1900 °C で溶融した低 CaO-パイロキシナイトの密度は約 2700 kg/m^3 であり [45]、その一方で少しも溶融していないオリピンはこれらの温度で 3300 kg/m^3 以下の密度を持つ [5]。4.5 GPa でのメルトの密度 [5] はおおよそ 3000 kg/m^3 である。部分的に完全に溶融した熱境界層は、溶融したコアと重力的に安定な関係にある。しかしながら、二つの層はお互いに分離したままではないだろう。熱境界層が不安定となるにつれて、コア物質が取り込まれ、上に横たわっている沈積物の中を上昇するだろう。あるいはコア中の対流が熱境界層の中の溶融したマントルを取り込み、マントルの底部を侵食するだろう。これらの過程は重要かもしれないが、上記で表したモデルには組み込まれて

おらず、この論文ではこれ以上考えてはいない。どちらの影響もコアからマントル底部へ運ぶ熱の割合をさらに強めるだろう。

溶融したコアの密度に対して私達のより低い見積もりが正しいなら、それは上に横たわっているマントルと不安定な関係だろう。 $\rho < 3400\text{kg/m}^3$ での溶融したメルトは、より鉄とパイロキシニに富む沈積物と不安定な関係となる (図 5.1)。もしそうなら、いったん溶融したコア物質は上昇し、その結果月の中心部から外れた層を形成する。この層は上に横たわっている沈積物マントル中で浮力のバランスのとれた高さに形成される。また、コア物質に限られた範囲内で上に横たわっているマントルと混合する可能性もある。興味深いのが、これらの可能性はこの論文ではこれ以上追及はしない。

5.4.1 海の玄武岩の起源

実験的な相関係によって得られる海の岩石生成上の重大な制約は、初期の海のガラスは 2.0-2.5GPa の間の圧力でオリビンとオルソパイロキシニで複相飽和するが、リキダス上ではより低い圧力でオリビンだけで複相飽和することを示している [4,46]。もしそれらが初生マグマで、そのソース領域の中にオリビンとオルソパイロキシニ両方とも残っているなら、海のガラスは約 2.0-2.5GPa の圧力から得られなければならない。もしそれぞれオリビンかオルソパイロキシニだけソース領域に残っていたなら、圧力はこの幅よりも高いか低いだろう。ピクライト質の海のガラスは比較的低い融解度に由来する初生マグマだと仮定している [47]。私達のモデルの母岩は浅いマグマオーシャンからオリビン-オルソパイロキシニ沈積物として得られ、そして転倒の間内部領域の中でより圧力の高い下方へと運ばれる。約 0.5-0.6GPa よりも高い圧力の場合、オリビン-オルソパイロキシニ共晶点がブラジオクレイス-オルソパイロキシニ結合のかなり近くに接近しており、これらの液体から得られる沈積物はオルソパイロキシニ \gg オリビンとなる。それゆえ、オリビンがソース領域の中で唯一溶融していない相になれないことを示唆する。これは海のガラスはオルソパイロキシニ \pm オリビンのソース領域から得られ、少なくとも 2.0-2.5GPa (~400-500km) の圧力に相当する深さから得られることを意味している。

もし海の玄武岩が初生マグマでなく、しかし表面付近でのオリビンの結晶化を経験しているなら、発生する深さの見積もりは複相飽和の圧力よりも高くなる。オルソパイロキシニ-オリビン共晶点は圧力が増加するにつれてよりオリビン成分に富むことが実験的観察から得られる。Lomghi [48] によって提案されたように海の玄武岩が様々な圧力で生じたメルトの集まりなら、複相飽和の見かけの圧力メルト組成の平均的な圧力を表す。言い換えれば、メルトは 2-2.5GPa 以上と以下両方の圧力で発生した。

海の火成活動に対するソース領域として、混合した層の上部での溶融は、メルトが固体に対して浮力を持つような十分に低い圧力と、上で議論した複相飽和の制約を満足する十分に高い圧力で起こらなくてはならない。混合した層の上部での溶融は転倒の 500-600Myr 以内に始まらなくてはならない。なぜなら最も古い高 TiO_2 の海の玄武岩は少なくとも現在から 3.9Gyr 前には生じているからである [6]。表 5.1 でまとめた我々の結果は、放射性元

素濃度が地球全体の 10 倍のコア, コアの半径 550km, そして最も高い組成密度勾配の場合に混合した層の上部が約 500Myr 後にソリダスを横切るという制約を満足することを示す。しかし全体の放射性元素がより小さいモデルではそうではない。地球全体の 5 倍の放射性元素の値でのモデルはコアの形成後, 1Gyr より後にだけメルトを発生する。小さな組成密度勾配のモデルは似た問題を持つ。同じ放射性元素の値とマントル粘性率の場合, 100km につき 0.3 %, 0.6 %, 0.9 % 密度変化させたモデルはそれぞれ 1000Myr, 636Myr, 507Myr でメルトが発生する。低い勾配の場合, 必要とする時間の中でメルトを生成することはできないことと中間勾配の場合は辛うじて条件をみたすことは明らかである。最も高い勾配の場合だけ海の火成活動上での知られている年代的な制約を明らかに満足する。コアの半径 475km のモデルでも同様のことが成り立つ。しかしながら, これはコアの半径 550km のモデルよりもより高い熱の割合を必要とする。500-600Myr で混合した層の上部で熔融を起こすモデルでは, 融解の圧力は 3-3.5GPa の幅の中である (表 5.1 参照)。

高 TiO_2 の海の玄武岩のメルトが, 2-2.5GPa の圧力幅でオリビンに富んだマントルに対して中立的な浮力を持つなら, そのような深さからの高 TiO_2 の海の玄武岩の発生によるどんなモデルも深刻な問題に直面する [4,49]。高圧力でオリビンと/もしくはオルソパイロキシンの残りよりも高密度である高 TiO_2 の海の玄武岩のメルトはそれゆえに噴出するために表面へ向かって上昇するよりもむしろ沈降すべきである。このジレンマの一つの解決策は高 TiO_2 の海のメルトがオリビンと/もしくはパイロキシンの粒子境界を濡らしていないことを仮定することである。実際, Toramaru and Fujii [50] は地球の海洋底玄武岩のメルトがマントルペリドタイト中のエンスタタイトの粒子境界を濡らしていない実験的証拠を示した。オリビン-オルソパイロキシン-ブラジオクレイスの系での乾燥した実験の中で, メルトはパイロキシン粒子の三重会合点から排除される [51]。メルトの連結性の度合いは完全にメルトの組成に依存しているので, このふるまいが月のマントル中での高 TiO_2 の海のメルトに当てはまると結論付けることはできない。しかし, もし海の玄武岩のメルトが, 小さな溶融度によって相互に連結されることがないなら, メルトはオルソパイロキシンを含んでいる粒子の会合点に沿って初期に捕えられただろう。その様なメルトは, たとえメルトが存在するところでマントルに対して浮力を持たないとしても, 上昇するマントルによって上方に運ばれるだろう。

別の解決法 [3] はマントルの上昇速度がメルトの沈降速度よりも大きいことである。ソリダスの付近ではその断熱曲線に沿って低下するときメルトは結晶化する。中立浮力深度より上の場合だけが, 個々の塊にメルトを分離できる。その塊の中ではメルトはマントルから効率よく分離するようになる。もしこのモデルが正しいなら, 高 TiO_2 のメルトは様々な圧力下で生じた融解の結果であり, 複相飽和のみかけの圧力はメルトが正の浮力を得る浅い部分での圧力である。

5.5 要約

この論文は月のマグマオーシャンの結晶化に由来する放射性元素の含有量の違いと化学的浮力のもつ役割を考慮した内部進化モデルの化学的, 熱的帰結を研究した。レイリーテイ

ラー不安定によって、マグマオーシャンの固化の最終段階に形成される高密度のイルメナイトに富んだ沈積物層と下に横たわっている Fe に富んだ沈積物が月の中心に向かって沈み込む。この転倒の後、イルメナイトに富んだ沈積物コア内の放射性熱源は上に横たわっているマントルを熱し、コア-マントル境界上部の加熱され対流混合する層が発達する。最終的にはこの層は十分に厚くなり、また熱くなりやがて融解する。深部の高い圧力における融解は海の玄武岩の化学的性質からの要請を満たし、そして実際の海の玄武岩の火成活動の開始時期を説明するのに適切な時間間隔の後生じる。ただしこの結果は、コア中の放射性元素の含有量が月全体の約 10 倍 (地球全体の値に相当する) で、コアから上の化学的密度勾配が、次の値と一致する場合に得られる。それは、初期の不安定な成層した月の内部の大規模な転倒の間に起こった混合の量が最小限に抑えられている場合に予期される値である。

主なモデルパラメータによって暗示されている詳細によらず、マグマオーシャンのイルメナイトを含む沈積物の高密度によって駆動される重力的な転倒は高 TiO_2 の海の玄武岩のソース領域と放射性熱源の重要な部分を月の中心へ向かっておそらく集中させる。これは月の熱的進化と海の玄武岩の起源にとって重要な意味を持つだろう。

5.6 参考文献

1. P.C. Hess and E.M. Parmentier (1994), Overturn of magma ocean ilmenite cumulate layer: implications for lunar thermal and magmatic evolution, *Lunar Planet. Sci.* 25, pp. 541-542.
2. P.C. Hess and E.M. Parmentier (1993), Overturn of magma ocean ilmenite cumulate layer: implications for lunar thermal and magmatic evolution, *Lunar Planet. Sci.* 24, p. 651.
3. P.C. Hess (1991), Diapirism and the origin of high TiO_2 mare glasses, *Geophys. Res. Lett.* 18, pp. 2069-2072.
4. J. Delano (1986), Pristine lunar glasses: Criteria, data and implications, *J. Geophys. Res.* 91, pp. 201-213.
5. J.W. Delano (1990), Buoyancy driven melt segregation in the Earth's moon, *Proc. Lunar Planet. Sci. Conf.* 20, pp. 3-12.
6. L.E. Nyquist and C.-Y. Shih (1992), The isotopic record of lunar volcanism, *Geochim. Cosmochim. Acta* 56, pp. 2213-2234.
7. D.L. Turcotte, F.A. Cooke and R.J. Willeman (1979), Parameterized convection within the Moon and the terrestrial planets, *Proc. Lunar Planet. Sci. Conf.* 10, pp. 2375-2392.
8. G. Schubert, P. Cassen and R.E. Young (1979), Subsolidus convective cooling histories of terrestrial planets, *Icarus* 38, pp. 192-211.
9. S.C. Solomon and J. Chaikin (1976), Thermal expansion and thermal stress in the Moon and terrestrial planets: Clues to early thermal history, *Proc. Lunar Sci. Conf.* 7, pp. 3229-3243.
10. S.C. Solomon (1986), On the early thermal state of the Moon. In: W.K. Hartman, R.J. Phillips and G.J. Taylor, Editors, *Origin of the Moon*, Lunar Planet. Inst., Houston, TX, pp. 435-452.
11. S. Mueller, G.J. Taylor and R. Phillips (1988), Lunar composition: A geophysical and petrological synthesis, *J. Geophys. Res.* 93, pp. 6338-6352.
12. R.L. Kirk and D.J. Stevenson (1989), The competition between thermal contraction and differentiation in the stress history of the Moon, *J. Geophys. Res.* 94, pp. 12133-12144.
13. J.O. Dickey, P.L. Bender, J.E. Faller, X.X. Newhall, R.L. Ricklefs, J.G. Ries, P.J. Shelus, C. Viellet, A.L. Whipple, J.R. Wiant, J.R. Williams and C.F. Yoder (1994), Lunar laser ranging. A continuing legacy of the Apollo program, *Science* 265, pp. 482-490.

14. S.C. Solomon and J. Longhi (1977), Magma oceanography: 1. Thermal evolution, Proc. Lunar Planet. Sci. Conf. 8, pp. 583-599.
15. F. Herbert (1980), Time dependent lunar density models, Proc. Lunar Planet. Sci. Conf. 11, pp. 2015-2030.
16. J.W. Minear (1980), The lunar magma ocean: A transient lunar phenomenon?, Proc. Lunar Planet. Sci. Conf. 11, pp. 1941-1955.
17. S.R. Taylor (1982), Planetary Science: A Lunar Perspective, Lunar Planet. Inst., Houston, TX.
18. J.A. Wood (1986), Moon over Mauna Loa: A review of the hypothesis of the formation of the Earth's Moon. In: W.K. Hartman, R.J. Phillips and G.J. Taylor, Editors, Origin of the Moon, Lunar Planet. Inst., Houston, TX, pp. 17-56.
19. F.J. Spera (1992), Lunar magmas transport phenomena, Geochim. Cosmochim. Acta 56, pp. 2253-2266.
20. W.B. Tonks and H.J. Melosh (1990), The physics of crystal settling and suspension in a turbulent magma ocean. In: Newsom and Jones, Editors, Origin of the Earth, pp. 151-174.
21. D. Walker and W.S. Kieffer (1985), Xenolith digestion in large magma bodies, Proc. Lunar and Planet. Sci. Conf., J. Geophys. Res. 90, pp. C585-C590 15(2).
22. W.C. Phinney (1991), Lunar anorthosites, the equilibrium melts and the bulk moon, Proc. Lunar Planet. Sci. 21, pp. 29-50.
23. P.C. Hess, M.J. Rutherford and H.W. Campbell (1978), Ilmenite crystallization in non-mare basalt: Genesis of KREEP and high-Ti mare basalt, Proc. Lunar Planet. Sci. Conf. 9, pp. 705-724.
24. G. Ryder (1991), Lunar ferroan anorthosites and mare basalt sources: The mixed connection, Geophys. Res. Lett. 18, pp. 2065-2068.
25. A.E. Ringwood and S.E. Kesson (1976), A dynamic model for mare basalt petrogenesis, Proc. Lunar Planet. Sci. Conf. 7, pp. 1697-1722.
26. A.G.W. Cameron and W. Benz (1991), The origin of the Moon and the Single Impact Hypothesis, IV, Icarus 92, pp. 204-216.
27. P.H. Warren (1986), The bulk moon MgO/FeO ratio: a highlands perspective. In: W.K. Hartman, R.J. Phillips and G.J. Taylor, Editors, Origin of the Moon, Lunar Planet. Inst., Houston, TX, pp. 278-310.
28. A.E. Ringwood, S. Seifert and H. Wanke (1987), Komatiite component in Apollo 10 highland breccias: Implications for the nickel-cobalt systematics and the bulk composition of the Moon, Earth Planet. Sci. Lett. 81, pp. 105-117.

29. J.H. Jones and J.W. Delano (1989), A three component model for the bulk composition of the Moon, *Geochim. Cosmochim. Acta* 53, pp. 513-527.
30. H.St.C. O'Neill (1991), The origin of the Moon and the early history of the Earth? A chemical model, Part 1, The Moon, *Geochim. Cosmochim. Acta* 55, pp. 1135-1157.
31. G.A. Snyder, L.A. Taylor and C.R. Neal (1992), A chemical model for generating sources of mare basalts: Combined equilibrium and fractional crystallization of the lunar magmasphere, *Geochim. Cosmochim. Acta* 56, pp. 3809-3823.
32. P.C. Hess, M.J. Rutherford, R.N. Guillemette, F.J. Ryerson and H.A. Tuffield (1975), Residual products of fractional crystallization of lunar magma: An experimental study, *Proc. Lunar Planet. Sci. Conf.* 6, pp. 895-909.
33. M.D. Norman and G. Ryder (1979), A summary of the petrology and geochemistry of pristine highland rocks, *Proc. Lunar Planet. Sci. Conf.* 10, pp. 531-559.
34. P. Ulmer (1989), The dependence of the Fe^{+2}Mg cation partitioning between olivine and basaltic liquid on pressure, temperature and composition. An experimental study to 30 kbar, *Contrib. Mineral. Petrol.* 101, pp. 261-273.
35. P.C. Hess (1994), Petrogenesis of lunar troctolites, *J. Geophys. Res.* 99, pp. 19083-19093.
36. P.H. Warren (1990), Lunar anorthosites and the magma ocean hypothesis: importance of FeO enrichment in the parent magmas, *Am. Mineral.* 75, pp. 46-58.
37. L.L. Hood (1986), Geophysical constraints on the lunar interior. In: W.K. Hartman, R.J. Phillips and G.J. Taylor, Editors, *Origins of the Moon*, Lunar Planet. Inst., Houston, TX, pp. 361-410.
38. P.H. Warren and J.T. Wasson (1979), Origin of KREEP, *Rev. Geophys. Space Phys.* 17, pp. 73-88.
39. R.W. Griffiths and I.H. Campbell (1990), Stirring and structure in mantle starting plumes, *Earth Planet. Sci. Lett.* 90, pp. 60-78.
40. C.K. Shearer and J.J. Papike (1993), Basaltic magmatism on the Moon: a perspective from volcanic picritic glass beads, *Geochim. Cosmochim. Acta* 57, pp. 4812-4875.
41. G.K. Batchelor (1967), *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
42. G. Hirth and D.L. Kohlstedt (1995), Experimental constraints on the dynamics of the partially molten upper mantle: deformation in the diffusion creep regime, *J. Geophys. Res.* 100, pp. 1981-2001.

43. I.D. MacGregor (1969), The system MgO-SiO₂-TiO₂ and its bearing on the distribution of TiO₂ in basalts, *Am. J. Sci.* 267A, pp. 342-363.
44. S.A. Morse (1980), *Basalts and Phase Diagrams*, Springer, New York, NY.
45. R.A. Lange and I.S.E. Carmichael (1987), Densities of Na₂O-K₂O-CaO-MgO-FeO-Fe₂O₃-Al₂O₃-TiO₂-SiO₂ liquids: New measurements and derived partial molar properties, *Geochim Cosmochim Acta* 51, pp. 2931-2946.
46. J. Longhi (1992), Experimental petrology and petrogenesis of mare volcanics, *Geochim. Cosmochim. Acta* 56, pp. 2235-2252.
47. S.S. Hughes, J.W. Delano and R.A. Schmitt (1989), Petrogenetic modeling of 74220 high-TiO₂ orange volcanic glasses and the Apollo 11 and 17 high Ti-mare basalt, *Proc. Lunar Planet. Sci. Conf.* 19, pp. 175-188.
48. J. Longhi (1992), Origin of picritic green glass magmas by polybaric fusion, *Proc. Lunar Planet. Sci. Conf.* 22, pp. 343-354.
49. C.B. Agee and S. Circone (1995), Crystal-liquid density inversions in high-TiO₂ lunar basalt, *Lunar Planet. Sci.* 25, pp. 5-6.
50. A. Toramaru and N. Fujii (1986), Connectivity of melt phase in a partially molten peridotite, *J. Geophys. Res.* 91, pp. 9239-9252.
51. N. Fujii, K. Osamura and E. Takahashi (1986), Effect of water saturation on the distribution of partial melt in the olivinepyroxene-plagioclase system, *J. Geophys. Res.* 91, pp. 9253-9259.
52. J.A. Whitehead (1988), Fluid models of geological hotspots, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 20, pp. 61-87.

5.7 流体中を沈降する球の抵抗力の導出

ここで一般には、代表的な長さが d の物体が、他には乱されていない流体中を速度 U で定常な並進運動をする時、 d と U は流れの場合全体に対する代表的な長さとして速度である。ナビエ-ストークス方程式より、液体の慣性力は $\rho U^2/d$ 程度であり、粘性力は $\mu U/d^2$ 程度である。ここで慣性力を粘性力で割ると $\rho d U/\mu (=R$ とおく) となる。したがって、 $R \ll 1$ のときは慣性力を無視できる。また、もし物体が U^2/d より小さい加速度で動くのであれば、そのときも慣性力は無視できる (よって今回は慣性力を無視する)。

従ってナビエ-ストークス方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{K} \quad (5.7.1)$$

より

$$\nabla \left(\frac{p - p_0}{\mu} \right) = \nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (5.7.2)$$

ここで \mathbf{u} は流体の速度、 ρ は流体の密度、 ν は流体の動粘性率、 \mathbf{K} は外力、 μ は粘性率、 $\boldsymbol{\omega}$ は渦度を表し、 $\nu = \mu/\rho$ である。連続の式より

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5.7.3)$$

ここで p_0 は物体から無限遠での一様な圧力である。無限遠で流体が静止するように座標系を選ぶと、速度 U で動く物体の境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u} = U \quad (\text{物体表面}) \\ \mathbf{u} \rightarrow 0 \text{ および } p - p_0 \rightarrow 0 \quad (\text{無限遠}) \end{array} \right\} \quad (5.7.4)$$

である。ここで式 (5.7.2) と式 (5.7.3)、境界条件 (5.7.4) が \mathbf{u} 、 $(p - p_0)/\mu$ は U について‘線形で同次’である。よって \mathbf{u} と $(p - p_0)/\mu$ は U について線形で同次でなくてはならない。

5.7.1 剛体球の場合

簡単のため、まず物体が剛体球の場合を考える。座標系の原点を、半径 a の球の中心とする。また U に平行な軸を x 軸とし、それを極軸とする極座標 (r, θ, ϕ) で流れの場を記述する。 \mathbf{u} と $(p - p_0)/\mu$ の擾乱は、球の中心を通り x 軸に対して軸対称である。したがって、速度の ϕ 成分は 0 であり、 ϕ に関する微分もすべて 0 である。また、ベクトル \mathbf{u} はこの軸を含む面内にある。式 (5.7.2)、(5.7.3) 中の微分演算子は座標系の取り方によらないので、 \mathbf{u} と $(p - p_0)/\mu$ はベクトル \mathbf{x} に依存し、ベクトル \mathbf{x} の成分のどのような組み合わせにも依存しない。

$(p - p_0)/\mu$ は U について線形で同次であることから、 $(p - p_0)/\mu$ は $U \cdot \mathbf{x} F$ の形でなければならない。ここで、 F は $U \cdot \mathbf{x} F$ を無次元とする関数である。 $(p - p_0)$ はラプラス方程式を満たし、無限遠で 0 となるので、 r の負の関数の球面調和関数の級数で表せる。この形に適合する級数の項は次数 1 の項 (ダイポール項) だけである。よって

$$\frac{p - p_0}{\mu} = \frac{1}{r} \frac{C U \cdot \mathbf{x}}{r^2} \quad (5.7.5)$$

である. ここで C は定数. まったく同じ議論が渦度 ω ($\omega = \text{rot} v$) に適用できる. これは方位角方向 (ϕ 方向) のベクトルであり, $U \times x/r^3$ に比例しなければならない. 比例定数は式 (5.7.2) より C であることがわかり,

$$\omega = \frac{CU \times x}{r^3} \quad (5.7.6)$$

となる. 極座標系で渦度が 0 でない唯一の成分である方位角方向の成分は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad (5.7.7)$$

と定義される. ここで u_r, u_θ は流線関数 ψ を用いると

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (5.7.8)$$

となる. これを式 (5.7.7) に代入すると

$$-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \quad (5.7.9)$$

となる. 式 (5.7.6) と式 (5.7.9) より

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) &= \frac{CU r \sin \theta}{r^3} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) &= -\frac{CU \sin^2 \theta}{r} \end{aligned} \quad (5.7.10)$$

となる. ψ の特解は明らかに $\sin^2 \theta$ に比例しているので

$$\psi = U \sin^2 \theta f(r) \quad (5.7.11)$$

と置く. これを式 (5.7.8) に代入し, ベクトル形式にまとめると

$$\mathbf{u} = U \left(\frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) + \mathbf{x} \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{U}}{r^2} \left(\frac{2f}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) \quad (5.7.12)$$

という形の速度ベクトルになる. 未知関数 f に対する方程式は式 (5.7.10) に式 (5.7.11) を代入し求まり,

$$\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{2f}{r^2} = -\frac{C}{r} \quad (5.7.13)$$

である. 次にこの f に対する方程式の一般解を求める. 境界条件は

$$\begin{cases} u_r = U \cos \theta, u_\theta = -U \sin \theta & (r = a) \\ u_r \rightarrow 0, u_\theta \rightarrow 0 & (r \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (5.7.14)$$

あるいは書き換えて

$$\begin{cases} f(a) = \frac{a^2}{2}, f'(a) = a & (r = a) \\ \frac{f(r)}{r^2} \rightarrow 0 & (r \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (5.7.15)$$

である.

特解 $f_s(r)$ は

$$f_s(r) = \frac{C}{2}r \quad (5.7.16)$$

$f(r)$ に対する方程式を同次方程式とみなすと

$$\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{2f}{r^2} = 0 \quad (5.7.17)$$

この同次方程式の一般解を $f_g(r) = r^n$ とおき, 式 (5.7.17) に代入すると

$$(n-2)(n+1)r^{n-2} = 0 \quad (5.7.18)$$

となり, $n = -1, 2$ の場合に式 (5.7.17) が成立することがわかる. 従って同次方程式の一般解は A, B を任意定数として

$$f_g(r) = Ar^2 + B\frac{1}{r} \quad (5.7.19)$$

となり, 求める方程式の一般解 $f(r)$ は

$$f(r) = f_s(r) + f_g(r) = \frac{C}{2}r + Ar^2 + B\frac{1}{r} \quad (5.7.20)$$

となる. 境界条件から

$$\begin{cases} f(a) = \frac{C}{2}a + \frac{a^2}{A}a^2 + B\frac{1}{a} = \frac{a^2}{2} \\ \frac{f(r)}{r^2} = \frac{C}{2r} + A + B\frac{1}{r^3} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (5.7.21)$$

. これらより定数が $A = 0, B = -\frac{1}{4}a^3$, に定まる. また, 滑らない条件である $u_\theta = -U \sin \theta$ ($r = a$), 書き換えて $f'(a) = a$ ($r = a$) より

$$C = \frac{3}{2}a \quad (5.7.22)$$

が求まり,

$$f(r) = \frac{3}{4}ra - \frac{1}{4}\frac{a^3}{r} \quad (5.7.23)$$

となる. 流れの方程式は

$$\psi = Ur^2 \sin^2 \theta \left(\frac{3a}{4r} - \frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3} \right) \quad (5.7.24)$$

である.

次に流体が球に及ぼす力を求めるために, $r = a$ での応力テンソルを求める. $x = an$ で表される位置では, 球面上の単位面積あたりの力の i 成分は

$$n_j(\sigma_{ij})_{r=a} = n_j \left\{ -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\}_{r=a} \quad (5.7.25)$$

であり, 式 (5.7.12) の速度ベクトルに対しては

$$= \left\{ -pn_i + \mu n_i \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \left(-\frac{f''}{r} + \frac{6f'}{r^2} - \frac{10f}{r^3} \right) + \mu U_i \left(\frac{f''}{r} - \frac{2f'}{r^2} + \frac{2f}{r^3} \right) \right\}_{r=a} \quad (5.7.26)$$

となる. ここで式 (5.7.2) と (5.7.20), $A = 0, B = -\frac{1}{4}a^3$ を代入すると

$$n_j(\sigma_{ij})_{r=a} = n_i \left\{ -p_0 + \frac{3\mu \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}}{a} \left(\frac{2C}{a} - 3 \right) \right\} + \frac{3\mu U_i}{a} \left(1 - \frac{C}{a} \right) \quad (5.7.27)$$

となり, 球の表面で流体と剛体球が滑らない条件より求められる C の値 ($C = \frac{3}{2}a$) を代入すると

$$= -p_0 n_i - \frac{3\mu U_i}{2a} \quad (5.7.28)$$

となる. これを球表面上で積分すると球に働く抵抗 D が以下のように求まる (右辺第一項は積分には寄与しない).

$$D = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{3\mu U}{2a} a^2 \sin \theta d\theta = -6\pi \mu a U \quad (5.7.29)$$

式 (5.7.29) はストークスの法則としてよく知られている.

5.7.2 球の内部が流体の場合

より現実的に, ダイアピルが流体である場合, すなわち上記で考えた剛体球の内部が流体の場合を考える. 流体と流体球, 二つの液体は混合できず, 接触面での表面張力は '小滴' を変形しようとする粘性力の影響を受けても, 近似的に球に保つほどつようと仮定する. また, 小滴内の運動のレイノルズ数は外側の流体の運動と同様に, 1 よりも小さいとする.

この場合の終端速度は, 剛体球の場合に用いた議論をほぼ同様にして求められる. 球内外の運動は軸対象であり, 粘性率は違う値であるが, 式 (5.7.2) と式 (5.7.3) を満たす. \mathbf{u} と $p - p_0$ は上記と同様に無限遠で 0 でなければならない. $\bar{\mathbf{u}}$ と $\bar{p} - \bar{p}_0$ は球内のいたるところで有限である. ここで, オーバーラインは内部流体とその運動に関係する量を示す. 接触面で共通な運動学的条件は

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{U} \quad (r = a) \quad (5.7.30)$$

である. 剛体球の表面での滑らない条件の代わりに, いくつかの力学的な接合条件がある. 一つ目は, 接触面では二つの流体の相対運動が起こらないという条件である. これは

$$\mathbf{x} \times \mathbf{u} = \mathbf{x} \times \bar{\mathbf{u}} \quad (r = a) \quad (5.7.31)$$

と表せる. 二つ目は, 接触面の力学的性質は一樣な表面張力だけであると仮定し, 外部流体による接戦応力は, 内部流体によるものと大きさが等しく, 異符号であるという条件である. これは

$$\epsilon_{mki} n_k n_j (\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}) = 0 \quad (r = a) \quad (5.7.32)$$

と表せる. ここで ϵ_{mki} は循環テンソル¹³のことである.

方程式と境界条件は $p - p_0, \bar{u}, \bar{p} - \bar{p}_0$ および U について線形で同次であるから, 式 (5.7.5) から式 (5.7.22) までの関係はここでも成立する. \bar{p} は p と同様にラプラスの方程式を満たし, $\bar{p} - \bar{p}_0$ は球内のいたるところで有限であるので, 式 (5.7.5) に類似する解は

$$\frac{(\bar{p} - \bar{p}_0)}{\bar{\mu}} = \bar{C}U \cdot \mathbf{x} \quad (5.7.33)$$

ここで \bar{C} は定数である. 剛体球の場合と同様の議論を式 (5.7.2) を満たすように行くと内部渦度は

$$\bar{\omega} = -\frac{1}{2}\bar{C}U \times \mathbf{x} \quad (5.7.34)$$

である. 式 (5.7.9) と式 (5.7.34) から

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) &= -\frac{1}{2}\bar{C}rU \sin \theta \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) &= \frac{1}{2}\bar{C}r^2 \end{aligned} \quad (5.7.35)$$

となり,

$$\psi = U \sin^2 \theta \bar{f}(r) \quad (5.7.36)$$

と置くと

$$\frac{d^2 \bar{f}}{dr^2} - \frac{2\bar{f}}{r^2} = \frac{1}{2}\bar{C}r^2 \quad (5.7.37)$$

となる. この方程式の一般解 $f(r)$ は

$$\bar{f}(r) = \frac{1}{20}\bar{C}r^4 + \bar{A}r^2 + \bar{B}\frac{1}{r} \quad (5.7.38)$$

$r = 0$ での特異性を避ければ, $r = a$ での運動学的条件から

$$\bar{A} = \frac{1}{2} - \frac{1}{20}\bar{C}a^2, \bar{B} = 0 \quad (5.7.39)$$

が求まる. よって

$$\bar{f}(r) = \frac{1}{20}\bar{C}r^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\bar{C}}{20}a^2 \right) r^2 \quad (5.7.40)$$

となる. さらに球内の速度ベクトルは式 (5.7.12) と同様の形を持ち

$$\bar{\mathbf{u}} = U \left(\frac{1}{r} \frac{d\bar{f}}{dr} \right) + \mathbf{x} \frac{\mathbf{x} \cdot U}{r^2} \left(\frac{2\bar{f}}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{d\bar{f}}{dr} \right) \quad (5.7.41)$$

であるので, 式 (5.7.40) を代入して

$$\bar{\mathbf{u}} = U - \frac{1}{10}\bar{C} \{ U (a^2 - 2r^2) + \mathbf{x}U \cdot \mathbf{x} \} \quad (5.7.42)$$

¹³循環テンソル ϵ_{ijk} とは, i, j, k が循環的に 1, 2, 3 の順序のときは $1, i, j, k$ がすべて違わなければ 0, i, j, k がそれ以外の場合には -1 である. 例を挙げると $\epsilon_{123} = 1, \epsilon_{231} = 1, \epsilon_{112} = 0, \epsilon_{213} = -1$ である.

となる. 次に力学的な接合条件から C と \bar{C} を決定する. 式 (5.7.31) より,

$$C - \frac{1}{2}a = a + \frac{1}{10}\bar{C}a^3 \quad (5.7.43)$$

が求まる. また球面上の単位面積あたりの力の i 成分を求めた式 (5.7.26) において, U_i を含む項だけが接線成分に影響するため, 接線成分の接合から

$$\begin{aligned} \mu U_i \left(\frac{f''}{r} - \frac{2f'}{r^2} + \frac{2f}{r^3} \right) &= \bar{\mu} U_i \left(\frac{\bar{f}''}{r} - \frac{2\bar{f}'}{r^2} + \frac{2\bar{f}}{r^3} \right) \\ \frac{3\mu}{a^2}(a - C) &= \frac{3}{10}\bar{C}\bar{\mu}a \end{aligned} \quad (5.7.44)$$

が求まる. 式 (5.7.43) と式 (5.7.44) より

$$C = \frac{1}{2}a \frac{2\mu + 3\bar{\mu}}{\mu + \bar{\mu}}, \quad \bar{C} = -\frac{5}{a^2} \frac{\mu}{\mu + \bar{\mu}} \quad (5.7.45)$$

である. 外部の流体が接触面に及ぼす抵抗力は, 接触面 A にわたる. よって抵抗力は式 (5.7.26) を積分して得られ,

$$\int n_j (\sigma_{ij})_{r=a} dA = -4\pi\mu UC = -4\pi a \mu U \frac{\mu + \frac{3}{2}}{\mu + \bar{\mu}} \quad (5.7.46)$$

となることが分かる.

謝辞

本卒業論文の作成において、多くの方のお世話になりました。この場を借りて、厚くお礼申し上げます。

特に指導教官の倉本圭 教授には、本研究のテーマの決定から、卒業論文の書き方の指導、惑星科学について学び、研究する面白さ等を教えていただきました。また、博士研究員である木村淳 氏にはゼミにおいて多くの助言と有意義な知識をいただきました。そのほか、惑星宇宙グループに所属する皆様にも様々な形でご協力いただきました。

以上の皆様方に、心よりお礼申し上げます。

参考文献

- Anderson, J.D., W.L. Sjogren, and G. Schubert (1996), Galileo Gravity Results and the Internal Structure of Io, *Science.*, 711 pp. 709-712.
- Basaltic Volcanism Study Project(BVSP) (1981), Basaltic Volcanism on the Terrestrial Planets. Pergamon Press, New York, 1286pp.
- Batchelor G.K. (1967), An introduction to Fluid Dynamics. Cambridge Univ. Press, Cambridge 635 pp.
- Heiken, G.H., D.T. Vaniman and B.M. French (1991), Lunar sourcebook, A user's guide to the Moon, Cambridge University Press 736 pp.
- Hess, P.C., and E.M. Parmentier (1995), A model for the thermal and chemical evolution of the Moon's interior: implications for the onset of mare volcanism. *Earth Planet. Sci. Lett.* 134, pp. 501-514.
- Hood, L.L. (1986). Geophysical constraints on the lunar interior. In: W.K. Hartman, R.J. Phillips and G.J. Taylor, Editors, *Origins of the Moon*, Lunar Planet. Inst., Houston, TX , pp. 361-410.
- Ishihara, Y., S. Goossens, K. Matsumoto, H. Noda, H. Araki, N. Namiki, H. Hanada, T. Iwata, S. Tazawa, and S. Sasaki (2009), Crustal thickness of the Moon. Implications for farside basin structures. *Geophys. Res. Lett.*, 36, L 19202.
- Jolliff, B.L., J.J. Gillis, L.A. Haskin, R.L. Korotev and M.A. Wieczorek (2000), Major lunar crustal terranes: Surface expressions and crust-mantle origins, *J. Geophys. Res.*, 105, pp. 4197-4216.
- Konopliv, A.S., A.B. Binder, L.L. Hood, A.B. Kucinskis and J.G. Williams (1998), Improved gravity field of the Moon from lunar prospector, *Science.*, 281, pp. 1476-1480.
- Parmentier, E.M., S. Zhong, M.T Zuber (2002), Gravitational differentiation due to initial chemical stratification: origin of lunar asymmetry by the creep of dense KREEP? *Earth Planet. Sci. Lett.*, 201 pp. 473-480.
- Rambaux, N., T. Van Hoolst, and Ö. Karatekin (2011), Librational response of Europa, Ganymede, and Callisto with an ocean for a non-Keplerian orbit, *A & A* 527, A118.
- Taylor, G.J. (1994), The scientific legacy of Apollo. *Sci. Am.*, 271.pp. 26-33.
- Whitehead, J.A. (1988), Fluid models of geological hotspots. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 20, pp. 61-87.

- 木村竜治 (1983), 地球流体力学入門 大気と海洋の流れのしくみ 東京堂出版 p105-131.
- 倉本圭 (2008), 第 4 章 月および惑星, 地球化学講座 2 宇宙・惑星化学 培風館 p112-165.
- 黒田美紀 (2010), ベナール・レイリー型対流の線形論に関する考察 神戸大学理学部卒業論文.
- 国立天文台編, (2010), 理科年表 平成 23 年 丸善 1080 pp.
- 長山一成 (2009), 冥王星の内部構造 北海道大学理学部卒業論文.
- 松信八十男 (1995), 連続体力学 流体および弾性体 サイエンス社 231 pp.