

木星を想定した H₂-He 大気の冷却率に関する数値的研究
A Numerical Study about Cooling Rate of a H₂-He Atmosphere
supposed for Jupiter

学生番号 20103079

高橋 康人 TAKAHASHI Yasuto

北海道大学理学院宇宙理学専攻

惑星宇宙グループ

Major of Space Science, Graduate School of Science,

Hokkaido University

Planetary and Space Group

指導教官

倉本 圭 KURAMOTO Kiyoshi

平成 24 年 2 月 29 日

要旨

一般に惑星大気中での様々な大気循環は、鉛直対流が重要な駆動源の一つになっていると考えられている。そしてその対流の強度は放射による大気冷却率で決まり、対流による大気下層からの熱の供給がつりあって定常的な熱構造が維持されている。これは木星をはじめとした H_2 が主成分の厚い大気を持つガス惑星についても同様であり、帯状東西風などの特徴的な大気循環が見られることから、これらの惑星における大気冷却率の研究は特に重要である。しかしこれまでの研究の多くは熱放射スペクトルや大気掩蔽、大気プローブなどの観測結果の解析に重点が置かれており、冷却率を系統的に調べた研究は無い。そこで本研究では、水素主体の大気の熱的構造を放射と対流による熱輸送を解くことにより推定する数値モデルを製作し、大気各層のフラックス収支から大気冷却率をはじめとする各種の放射特性を算出することを試みた。さらに、木星に限らずガス惑星の普遍的な性質を調べるため、木星での値を基準としていくつかのパラメータスタディを行った。

モデルでは平行平板大気を仮定し、圧力 0.002-2 bar の範囲で放射伝達方程式 (定式化は Appleby and Hogan, 1984 を参考) に基づく放射計算をおこなった。大気組成は H_2 および He からなるとし、波数 $10\text{-}990\text{ cm}^{-1}$ (波長 $10\text{-}1000\mu\text{m}$ に相当) の範囲で $H_2\text{-}H_2$ および $H_2\text{-}He$ 衝突誘起吸収 (Borysow 1988, 2002) を波数別に考慮した。上部境界では自由に放射フラックスが通過できるものとした。対して下部境界では温度を固定し、より下層からの放射の入射はその温度-圧力関係に基づいて拡散近似から求めて与えた。以上の条件のもとで放射計算を行った後、大気各層で対流不安定が存在するかどうかを判定し、不安定がある場合は対流層全体で温位保存の対流調節が起きるものとした。ここまでの計算を 1 ループとし、温度構造の時間変化が十分に小さくなるまで計算を続けることで熱平衡温度構造を求めた。さらにパラメータスタディとして、 $H_2\text{:}He$ の大気分圧比を 8:2 (太陽組成比), 9:1 (木星での比), 10:0 (完全水素大気) にした場合、および大気下端 (2bar 面) の温度を 150-400K まで変化させた場合について、それぞれ計算をおこなった。

計算の結果、木星探査機ガリレオのプローブによるデータから推定された冷却率構造 (Sromovsky et al., 1998) と値・位置ともに概ね調和的な構造が得られた。Sromovsky らは NH_3 をはじめとする微量成分と雲の存在も考慮して推定を行っているにも関わらず本計算とほぼ一致していることから、1 bar 付近においてはこれらの成分の効果が小さいことを示唆する可能性がある。冷却率構造は 0.7bar 付近で極大値を持つ。この高度では各波長の光学的深さが概ね 1 程度になるため、放射が最も効率よく惑星外部へと抜ける。そのため放射による冷却効果が大きくなり、このような構造が見られると解釈できる。冷却率の極大値は $0.0165\text{ K/Jovian day}$ であり、地球の典型的な値である 1 K/day よりかなり小さい。主な原因は温度による放射量の違いと考えられるが、大気組成による大気層の放射特性の変化も大きく寄与しているものと考えられる。また対流圏の範囲に関して、下部境界に向かうにつれて急激に冷却率が小さくなっていることから 2bar 付近に対流圏の下

端が存在する可能性があり、より詳しく調べる必要があることがわかった。これらの特徴は大気組成比や下部境界温度を変化させた場合でもほぼ共通しており、系外惑星を含む他のガス惑星についても同様の示唆を与え得ると言える。

本研究で得られた冷却率に関する考察は、Sugiyama et al. (2006) をはじめとする大気対流モデルへの組み込みが可能である。また、本モデルは熱輸送の基本過程を正確に解いているため、大気冷却率以外の任意の物理量についても出力できる。特に今後計画されている系外惑星探査 (すばる望遠鏡の SEEDS など) による新たな系外惑星放射データの解析を視野に入れ、惑星放射スペクトル計算への応用に向けた改良を目指していく。

目次

第1章	はじめに	1
1.1	背景	1
1.1.1	ガス惑星大気の特徴と大気冷却率の重要性	1
1.2	本研究の目的	4
1.3	本論文の構成	4
第2章	モデルの構築	5
2.1	放射対流平衡モデルについて	5
2.2	仮定および計算設定	5
2.3	放射過程	5
2.4	吸収係数	8
2.5	対流調節	9
2.6	計算手順	10
2.7	パラメータ設定	11
第3章	計算結果	13
3.1	H ₂ :He 比に対する依存性	13
3.1.1	熱構造	13

3.1.2	正味上向きフラックス・有効温度	15
3.1.3	大気冷却率	17
3.1.4	熱放射スペクトル	17
3.2	下部境界温度への依存性	20
3.2.1	熱構造	20
3.2.2	正味上向きフラックス・有効温度	20
3.2.3	大気冷却率	21
3.2.4	熱放射スペクトル	23
第 4 章	考察および結論	25
4.1	冷却率構造の形成維持過程	25
4.2	惑星の進化に伴う大気構造の変化	25
第 5 章	今後の展望	27
5.1	モデルの改良	27
5.2	木星大気循環モデルへの応用	27
5.3	初期地球等の H ₂ -He 大気を持つ岩石惑星への応用	27
5.4	系外惑星探査への寄与	28
	謝辞	29
	参考文献	30
	付 録 A 連続吸収による光学的厚さの算出	32

付 録 B 放射計算補足	34
B.1 放射伝達方程式の基礎	34
B.2 フラックス導出	36
B.3 各フラックスによるエネルギー収支の導出	40
B.4 フラックスおよびエネルギー収支の離散化	42
B.5 指数積分の近似式を用いた天頂角積分計算	43
B.6 下部境界における拡散近似	44

第1章 はじめに

1.1 背景

1.1.1 ガス惑星大気の特徴と大気冷却率の重要性

太陽系において H_2 -He 大気を持つ代表的なガス惑星である木星について考える。木星では、地球には見られないような大気循環や気象現象が起きていることが知られている。例えば大気循環に関しては、古くから帯状構造が良く知られており、東向き気流と西向き気流が緯度方向に交互に存在している (Ingersoll et al., 2004 他)。また大赤斑に代表される巨大な渦流や雷雲の発生も確認されている (Little et al., 1999 他)。

これらの構造や現象の形成に強い影響を与えていると考えられているのが大気中の鉛直対流である。鉛直対流は気塊の運動量を輸送する役目があり、これがガス惑星に見られる強い帯状東西風の駆動源になっていると考えられている。また雲の形成についても、惑星外部から観測可能な雲層を特徴づける上で主要な役割を果たしていると考えられる。

そしてその鉛直対流の強度は、大気冷却率によって決定されている。大気冷却率とは放射過程による単位時間当たりの温度低下率のことをいう。定常状態においては放射冷却を受けている層は対流によって下層から運ばれる熱で熱され全体としては熱収支が釣り合う。このことは、冷却率の大きさが鉛直方向の大気対流の強度を左右することを意味している。また、Sugiyama et al. (2006) の木星に関する鉛直雲対流計算によれば、この冷却率の大きさと分布によって対流強度だけでなく凝結性成分の鉛直混合や対流の発生の間欠性も有意に変化する可能性が示唆されている (図 1.1)。雲の形成は放射伝達に強い影響を与えるため、大気冷却率と対流強度は相互に依存すると言える。

木星の大気冷却率に関する具体的な観測としては、木星探査機ガリレオの投下したプローブによるデータに基づく推定 (Sromovsky et al., 1998) がほぼ唯一である。Sromovsky らはプローブが搭載していた NFR (Net Flux Radiometer) によって得られたデータをもとに総熱フラックスを算出し、大気冷却率を推定した (図 1.2)。ただし、プローブの投下地点は周囲より温度の高い「ホットスポット」と呼ばれる地域であったことがわかっており、惑

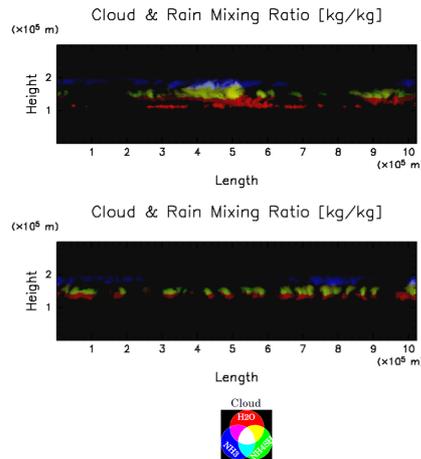


図 1.1: 木星の雲対流数値計算によって示された, 対流の活発度に応じた凝結性成分の分布. 青が NH_3 , 赤が H_2O , 緑が NH_4SH の分布を示す. 上図が対流活発期, 下図が静穏期であり, それぞれ分布が変化している様子が分かる. Sugiyama et al. (2006).

星全体の平均的な性質を示しているかについては疑問がある.

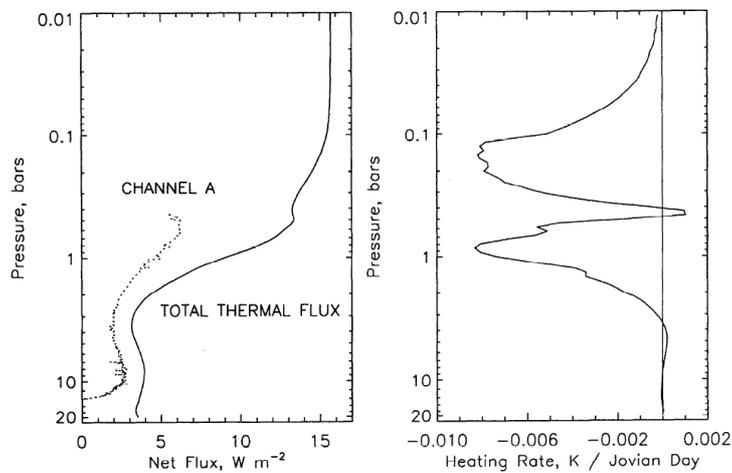


図 1.2: ガリレオプローブ搭載の NFR から得られたフラックス測定値 (左図点線) とそれに基づいて計算された総熱フラックス (左図実線), および総熱フラックスに基づいて推定された大気冷却率 (右). Sromovsky et al. (1998).

木星の鉛直大気構造の推定には, 理論モデルによるアプローチも多く試みられている. 対流平衡のみを仮定した Kuiper (1952) や Lasker (1963) に始まり, 逆に放射平衡のみを考慮した Trafton (1967), 両者を考慮した Hogan et al. (1969), その他定式化の変更や組

成の追加などがおこなわれた。良く知られているのが Appleby and Hogan (1984) であり、彼らは放射計算と対流計算を H_2 , He, CH_4 , C_2H_6 , C_2H_2 という大気組成において行い、さらにエアロゾルによる加熱も考慮した。この計算では、探査機ボイジャー 1 及び 2 による電波掩蔽のデータと良く一致する大気構造が推定されている (図 1.3)。その後、探査機ガリレオによって投下された探査プローブのデータを解析するために Seiff et al. (1998) や Sromovsky et al. (1998) でも計算が行われた。しかしながらこれらの研究のほとんどは木星大気の鉛直熱構造に関する観測結果を説明することを目的としており、大気冷却率については Sromovsky et al. (1998) を除いて求めていない。その Sromovsky et al. (1998) の計算もガリレオプローブ落下点のデータの再現にとどまっており、大気冷却率のような物理的性質の解明に重点を置いた系統的な研究はこれまでなされていなかった。徳永 (2009) ではこれらの問題に取り組むため、ガス惑星を想定した放射対流平衡モデルを作成し、大気冷却率を数値的に算出した。しかしながら同研究では純粋水素大気を想定しており、大気組成に関するパラメータ設定が限定的である。また下部境界からのフラックスを定温の黒体放射で近似していたため、下部境界付近で不自然な冷却率の増大を招いていた。

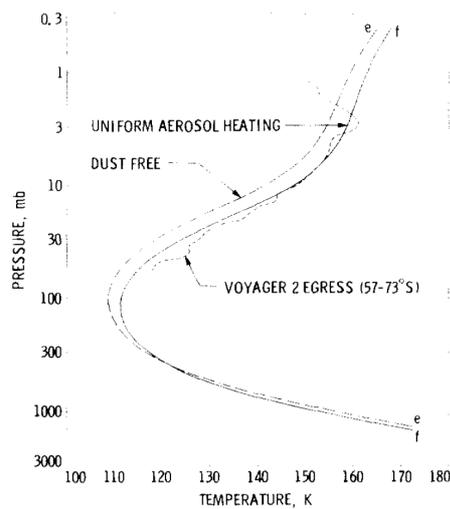


図 1.3: ボイジャー 2 の掩蔽観測から推定された温度構造 (破線) と数値モデル (実線がエアロゾルを含む場合、点線がエアロゾルの無い場合) の比較。Appleby and Hogan (1984)。

さらにこのような一連の大気システムは、スケールの差異などはあるものの木星に限らずガス惑星全般で見られると考えられている。現在までに発見された多くの系外惑星候補がガス惑星であり、今後さらに候補が増えるにつれて詳細な解析が進めば、これらの惑星の大気構造についても何らかの知見が得られるようになることが期待される。それを視野に入れ、多様な惑星環境を想定したパラメータスタディを進める意義は大きいものと考えられる。

1.2 本研究の目的

本研究では木星大気の大気冷却率を決める物理を理解することを第一の目的とし、微量成分については無視した $\text{H}_2\text{-He}$ 大気の放射対流平衡数値モデルを新たに開発する。それを用いて現在だけでなく過去の木星も想定した大気構造を算出し、大気冷却率をはじめとした大気の放射特性とその結果決まる放射対流平衡構造についてあきらかにする。また複数の条件下での計算結果から、それぞれに対応する環境を持った惑星についてこれらを考察する。本論文では、モデルに関する解説と計算結果の考察を示す。

1.3 本論文の構成

次章では、構築したモデルについて記述する。ただし詳しい数学的解説については付録 A, B で示す。第3章では、計算結果とその概略を示している。第4章では、前章の結果を踏まえ、そこから導かれる考察や議論を示している。第5章では、今回の研究成果を今後どう発展させることができるかを述べている。

第 2 章 モデルの構築

2.1 放射対流平衡モデルについて

本モデルは一般に放射対流平衡モデルと呼ばれるものである。惑星の大気は放射および運動の時定数よりも長い時間で平均すると熱的にほぼ平衡状態に達していると考えられる。この平衡構造は、大気中の熱輸送を担っている放射および対流の働きによって維持されている。放射対流平衡モデルとは、この熱輸送を数値的に記述することで平衡状態にある大気構造を求めるモデルである。

2.2 仮定および計算設定

物理過程を抽出するために純粋な $\text{H}_2\text{-He}$ 大気を仮定する。木星を想定して重力加速度は 24.82 m/sec^2 とし、静水圧平衡を仮定する。宇宙空間へ直接熱放射を伝えることのできる大気表層部を想定し、大気圧が 0.002 から 2 bar の平行平板大気を計算対象とする。この区間を均等圧力幅で 500 分割し、鉛直 1 次元の計算空間を設定した。太陽放射は無視し、また下部境界 (2 bar 面) は温度を固定する。この面は定温の熱浴として機能し、対流による加熱の熱源となる。下部境界よりもさらに下層からの上向き放射は、拡散近似により与える。 H_2 と He は一様な分圧比を持つものと仮定する。大気中の吸収源としては後述する $\text{H}_2\text{-H}_2$ および $\text{H}_2\text{-He}$ による衝突誘起吸収のみを考慮した。このほか、各種定数を表 2.1 の通り与える。

2.3 放射過程

本計算では放射フラックスを二方向近似し、その収支から大気が吸収したエネルギーを求め、温度を算出する。以下では定式化の概要を記述する。詳細な導出および式変形の方法については付録 B を参照のこと。

表 2.1: 計算に用いた定数一覧.

定数名	値
気体定数 ($\text{JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$)	8.31447
アボガドロ数 (mol^{-1})	$6.02214179 \times 10^{23}$
amagat 数 (m^{-3})	2.6867774×10^{25}
ボルツマン定数 (JK^{-1})	$1.3806504 \times 10^{-23}$
プランク定数 (Js)	6.626068×10^{-34}
光速 (ms^{-1})	2.99792458×10^8
オイラー定数	0.5772156649
ステファン・ボルツマン定数 ($\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$)	5.67×10^{-8}
H_2 分子質量 (kg)	3.34×10^{-27}
He 分子質量 (kg)	6.64884×10^{-27}

Appleby and Hogan (1984) に基づき, 大気各グリッド面におけるフラックスを以下のように定式化する.

$$\begin{aligned}
 F_{\nu}^{\downarrow}(\tau_{\nu}) &= -2\pi \int_0^{\tau_{\nu}} B_{\nu}(t) E_2(\tau_{\nu} - t) dt \\
 F_{\nu}^{\uparrow}(\tau_{\nu}) &= 2\pi \int_{\tau_{\nu}}^{\tau_{\nu, max}} B_{\nu}(t) E_2(t - \tau_{\nu}) dt \\
 F_{\nu}^{lb}(\tau_{\nu}) &= 2\pi \left(B_{\nu}(\tau_{\nu, max}) + 2 \left. \frac{dB}{dT} \frac{dT}{dP} \frac{dP}{d\tau} \right|_{\tau_{\nu, max}} \right) E_3(\tau_{\nu, max} - \tau_{\nu}).
 \end{aligned}$$

$F_{\nu}^{\downarrow}(\tau_{\nu})$ は波数 ν に対する光学的深さが τ_{ν} となる面を通過する下向きのフラックスのうち, 計算領域内にある他の大気層からの放射によるものである. 一般的にはこれとは別に上部境界からの入射による下向きフラックスがあるが, これは太陽放射に当たり, 本計算では前述の通り無視する. $F_{\nu}^{\uparrow}(\tau_{\nu})$ は上向きフラックスのうち, 計算領域にある他の大気層からの放射による寄与を表す. そして $F_{\nu}^{lb}(\tau_{\nu})$ は, 等温とおいた下部境界とそれよりさらに下にある大気層からの放射を拡散近似によって与えた上向きフラックスである. $B_{\nu}(\tau_{\nu})$ は光学的深さが τ_{ν} となる面におけるプランク関数である. $E_n(x)$ は指数積分であり, 放射の天頂角依存性を考慮した立体角積分を近似するために用いている. 指数積分は以下の式で定義される.

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{\exp(-x\omega)}{\omega^n} d\omega$$

これらのフラックスの高度微分が各波数毎の大気層のフラックス変化量となる. これを

上向きを正とする鉛直座標 z を用いて解析的に表すと以下ようになる.

$$\begin{aligned}\frac{dF_{\nu}^{\downarrow}(\tau_{\nu})}{dz} &= -2\pi \frac{d\tau_{\nu}}{dz} \left(B_{\nu}(\tau_{\nu}) - \int_0^{\tau_{\nu}} B_{\nu}(t) E_1(\tau_{\nu} - t) dt \right) \\ \frac{dF_{\nu}^{\uparrow}(\tau_{\nu})}{dz} &= 2\pi \frac{d\tau_{\nu}}{dz} \left(B_{\nu}(\tau_{\nu}) - \int_{\tau_{\nu}}^{\tau_{\nu, \max}} E_1(t - \tau_{\nu}) dt \right) \\ \frac{dF_{\nu}^{lb}(\tau_{\nu})}{dz} &= 2\pi \frac{d\tau_{\nu}}{dz} \left(B_{\nu}(\tau_{\nu, \max}) + 2 \left. \frac{dB}{dT} \frac{dT}{dP} \frac{dP}{d\tau} \right|_{\tau_{\nu, \max}} \right) E_2(\tau_{\nu, \max} - \tau_{\nu}).\end{aligned}$$

以上の微分式を各波数について数値的に計算し、最後に波数積分して各大気層の総エネルギー収支を求める.

$$E_{total}(z) = \int_{\nu} \left(\frac{dF_{\nu}^{\downarrow}(\tau_{\nu})}{dz} + \frac{dF_{\nu}^{\uparrow}(\tau_{\nu})}{dz} + \frac{dF_{\nu}^{lb}(\tau_{\nu})}{dz} \right) d\nu.$$

求められた総エネルギー収支を用い、大気層の温度変化率 (K/sec) は以下の式であらわされる.

$$\frac{dT(z)}{dt} = - \frac{E_{total}(z)}{\rho C_P}.$$

ここで ρ は大気質量密度, C_P は定圧比熱である.

フラックスおよびフラックス変化量を数値的に算出するため、連続的な積分を離散的に近似する必要がある. フラックスを離散化すると以下の形になる.

$$\begin{aligned}F_{\nu}^{\downarrow}(i) &= -2\pi \sum_{j=1}^{j=i} B_{\nu}(\bar{T}_{j,j-1}) (E_3(\tau_{\nu}(i) - \tau_{\nu}(j)) - E_3(\tau_{\nu}(i) - \tau_{\nu}(j-1))) \\ F_{\nu}^{\uparrow}(i) &= 2\pi \sum_{j=i}^{j=\max} B_{\nu}(\bar{T}_{j,j-1}) (E_3(\tau_{\nu}(j-1) - \tau_{\nu}(i)) - E_3(\tau_{\nu}(j) - \tau_{\nu}(i))).\end{aligned}$$

同様にフラックス変化量を離散化すると以下の形になる.

$$\begin{aligned}\frac{dF_{\nu}^{\downarrow}(i)}{dz} &= -2\pi \frac{d\tau_{\nu}}{dz} \left(B_{\nu}(T_i) - \sum_{j=1}^{j=i} B_{\nu}(\bar{T}_{j,j-1}) E_2(\tau_{\nu}(i) - \tau_{\nu}(j)) - E_2(\tau_{\nu}(i) - \tau_{\nu}(j-1)) \right) \\ \frac{dF_{\nu}^{\uparrow}(i)}{dz} &= 2\pi \frac{d\tau_{\nu}}{dz} \left(B_{\nu}(T_i) - \sum_{j=i}^{j=\max} B_{\nu}(\bar{T}_{j,j-1}) E_2(\tau_{\nu}(j-1) - \tau_{\nu}(i)) - E_2(\tau_{\nu}(j) - \tau_{\nu}(i)) \right).\end{aligned}$$

ここで i, j はグリッドの番号, $\bar{T}_{j,j-1}$ は j および $j-1$ 番目のグリッドの相加平均温度を表す.

2.4 吸収係数

本計算では波数 $10\text{-}990\text{ cm}^{-1}$ (波長 $10\text{-}1000\mu\text{m}$ に相当) の中間赤外線から遠赤外線の波長帯を計算対象とした。波数分解能は 10cm^{-1} である。この帯域で見られる $\text{H}_2\text{-H}_2$ および $\text{H}_2\text{-He}$ による衝突誘起吸収を考慮し、波数毎に吸収係数と光学的深さを導出している。水素分子は極性を持たないため赤外・遠赤外線に対する相互作用は弱いが、分子間衝突によって電気双極子モーメントが励起され、吸収を示す。これを衝突誘起吸収 (Collision Induced Absorption, CIA) と呼ぶ。吸収係数はさほど大きくはないが、水素分子が大量に存在する場合は重要な吸収源となる。本計算では存在量の多い水素分子同士 ($\text{H}_2\text{-H}_2$) および水素分子とヘリウム分子 ($\text{H}_2\text{-He}$) について衝突誘起吸収に伴う吸収を考慮した。水素分子は 2 原子分子である。したがって全体の自由度は 6 であり、このうち 3 が分子の重心位置の並進運動の自由度、さらに 2 が重心周りの回転運動の自由度となり、残りの 1 は原子間結合の振動の自由度となる。本計算で導入した衝突誘起吸収は、 $\text{H}_2\text{-H}_2$ に関しては回転-並進 (Roto-Translational, RT) および回転-振動 (Roto-Vibrational, RV) を考慮したもの、 $\text{H}_2\text{-He}$ については回転-並進を考慮したものをを用いている。具体的には、 $\text{H}_2\text{-H}_2$ については Borysow (2002) で示されたデータテーブル (波数方向に 10cm^{-1} 毎, 温度方向に 50K 毎) を線形内挿して与えている。 $\text{H}_2\text{-He}$ については Borysow (1988) のプログラム (<http://www.astro.ku.dk/~aborysow/programs/h2hert.for>) を一部改変して $\text{H}_2\text{-H}_2$ の場合と同様のデータテーブルを作成し、線形内挿して与えている。この吸収係数をそれぞれ図示したのが図 2.1 である。

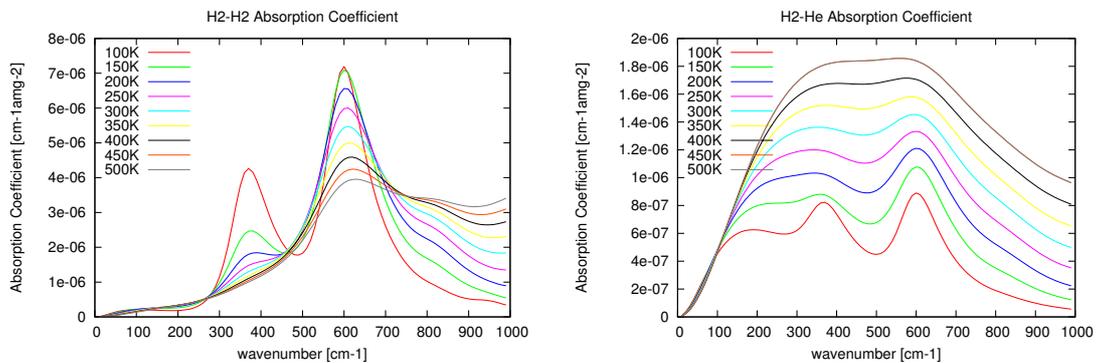


図 2.1: $\text{H}_2\text{-H}_2$ (左) および $\text{H}_2\text{-He}$ (右) による衝突誘起吸収に起因する温度別吸収係数。縦軸が吸収係数, 横軸が波数.

大気上端からの光学的深さへの寄与は以下の式で求められる^{*1} .

$$d\tau_\nu = (\alpha_{\text{H}_2\text{H}_2,\nu} P_{\text{H}_2} + \alpha_{\text{H}_2\text{He},\nu} P_{\text{He}}) \left(\frac{100 P_{\text{H}_2}}{g(n_{\text{unit},\text{amg}})^2 M P k T} \right) dP.$$

^{*1}導出は付録 A 参照

ここで τ_ν は波数 ν における光学的厚さ, $\alpha_{H_2H_2,\nu}, \alpha_{H_2He,\nu}$ は衝突誘起吸収係数 ($\text{cm}^{-1} \text{ amagat}^{-2}$), P_{H_2}, P_{He} は各成分の分圧, g は重力, $n_{unit,amg}$ は 1 amagat^{*2} , M は大気
の平均分子量, P は全圧, k はボルツマン定数, T は温度である.

これを最上層から積算していくことで, 各層の光学的深さが決定される. それを図示すると図 2.2 のようになる.

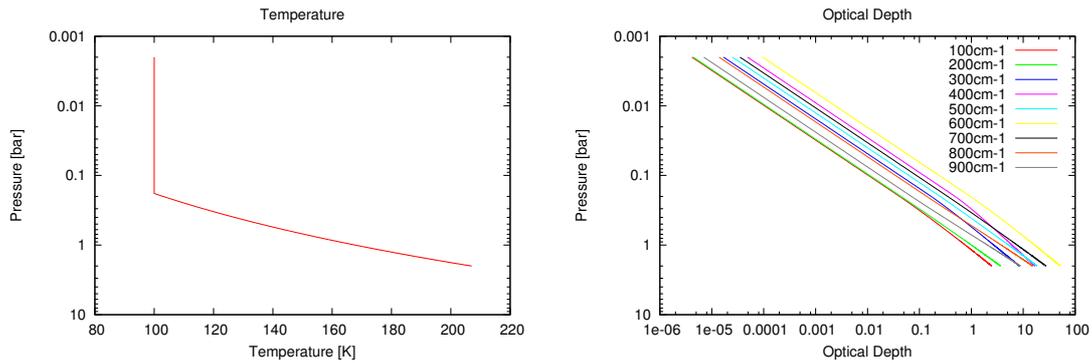


図 2.2: ある温度構造 (左) を与えたときの各波数での光学的深さ (右).

2.5 対流調節

全層で放射計算による温度変化を実施したののち, 対流不安定な大気層に対して対流調節を加える. 不安定性の判定のため, 隣接グリッド間の温度勾配と乾燥断熱温度勾配を比較する. 理想気体の乾燥断熱温度分布は以下の式で与えられる.

$$T(P) = T_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

ここで T_0, P_0 はそれぞれ下のグリッド面の温度と圧力, γ は比熱比である. γ は大気組成の関数として, 以下の式で決まる.

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{C_P}{C_V} \\ &= \frac{C_{P,H_2} P_{H_2} + C_{P,He} P_{He}}{C_{V,H_2} P_{H_2} + C_{V,He} P_{He}} \end{aligned}$$

ここで, $C_{p,x}, C_{v,x}, P_x$ はそれぞれの分子種 x の定圧および定積モル比熱^{*3}, 分圧を表す.

^{*2}amagat は数密度の単位の一つであり, 標準状態での単位体積当たりの理想気体分子数で定義される. 1 amagat は $2.6867774 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ である. この値はアボガドロ数をモル体積で割った値 (ロシュミット数) と本質的に同じである.

^{*3}比熱は分子の形状に応じて決まり, H_2 分子は 2 原子分子, He 分子は単原子分子なのでそれぞれ $C_{P,H_2} = \frac{7}{2}R, C_{P,He} = \frac{5}{2}R, C_{V,H_2} = \frac{5}{2}R, C_{V,He} = \frac{3}{2}R$ である.

このとき上のグリッド面の温度が乾燥断熱線よりも低温の場合には対流不安定であるので、対流調節をおこなうものとする。対流調節は、条件を満たす領域の下端のグリッド面の温度に基づく乾燥断熱線まで加熱されるものとしている。ただしこの対流層が下部境界面まで達する場合、それらの気層全体が下部境界面からの乾燥断熱減率に基づく温度分布に調節されるものとする。本計算における対流は条件を満たした場合にただちに調節されるものとしているが、冷却された大気層が乾燥断熱温度分布を保つにはエネルギーが必要になる。これは温度の固定された下部境界が一種の熱浴となっており、対流過程を通じて熱が補われると仮定したことに対応する。

2.6 計算手順

本モデルの計算過程を図示したものが図 2.3 である。

まず上層に下部境界温度の $1/2$ の温度を与え、下層には下部境界の温度から求まる乾燥断熱温度分布を上層と下層の温度が連続的につながるように与える。この温度構造を初期温度として計算を開始する。

この温度分布を与えられた大気に対して、大気各層の光学的深さを各波数について算出する。そして光学的深さをパラメータとし、放射伝達方程式に基づいて各グリッド面を通過する放射フラックスを計算する。このフラックスを波数積分して得られる正味上向きフラックスの収束（発散）が大気層の加熱（冷却）に使われたと見なし、加熱率（冷却率）を計算する。この値から温度変化を求め、一定の時間ステップが経過した後の新たな温度分布を決定する。続いて対流調節を行うため、温度分布に対して下層から順に対流条件を満たしているかを判定する。条件を満たしている場合は対流層全体の温位保存を考慮した温度調節を行う。ただしこのとき、対象となっている層よりも下部が全て対流層である場合には、下部境界面からの乾燥断熱減率に基づく温度分布まで上昇するものとする。

以上の計算を十分な回数繰り返す、全層の温度変化量の絶対値が 10^{-10} よりも小さくなれば、平衡状態に達したと判断して放射対流計算を終了する。こうして得られた最終的な温度構造について、その温度構造から推測される正味上向きフラックスや大気冷却率、スペクトルを算出する。

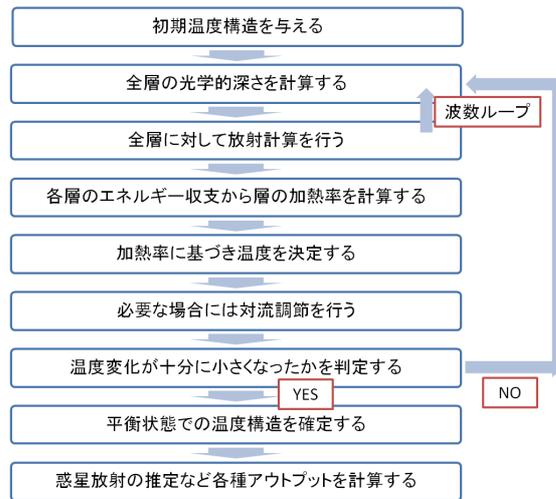


図 2.3: 本モデルの計算過程概略図.

2.7 パラメータ設定

以上の計算を、下部境界温度と大気組成を変化させ計 8 通りについておこなった。パラメータの一覧を表 2.2 にそれぞれ示す。

大気組成については $H_2:He$ の分圧比を 8:2, 9:1, 10:0 の 3 通りのパラメータで計算した。現在の木星は太陽組成比に比べて He の存在度が少ないことが知られている。その原因は、 H_2 に対して比重の重い He が木星のコアに向かって沈降したためであると考えられている。そこで、太陽組成比に近い 8:2, 現在の木星に近い 9:1, そして参考として完全水素大気 10:0 の 3 パターンを比較することにした。

下部境界温度は 150K から 400K までを 50K おきに与えて計算した。現在の木星は 2bar 面でおおよそ 200K 程度と考えられている。木星の平衡温度と有効温度の不一致から木星は現在も冷却が続いていると考えられ、過去にはより高温だった可能性があり、それを考慮して高温の境界条件も設定した。

ただし、大気組成を変化させた計算での下部境界温度は木星探査機ガリレオの投下したプローブデータの値を参照して 207K を与えた。また、下部境界温度を変化させた計算での大気組成は、 $H_2:He$ 比を太陽組成近似の 8:2 と与えた。

これらのパラメータ設定は木星の進化を念頭に置いているが、それと同時に多様な環境にある系外惑星についての想定としても有用であると考えられる。

H ₂ :He(2bar 面は 207K に固定)	8:2, 9:1, 10:0
2bar 面温度 (H ₂ :He は 8:2 に固定)	150K, 207K, 250K, 300K, 350K, 400K

表 2.2: 設定パラメーター一覧. ただし大気組成分圧比に関する計算は下部境界温度を 207K に固定, 下部境界面温度に関する計算は大気組成分圧比を 8:2 に固定する.

第3章 計算結果

本章では、大気組成を変化させたときと下部境界温度を変化させたときの、熱構造・正味上向きフラックス・有効温度・大気冷却率・熱放射スペクトルに関する結果をそれぞれ示す。

3.1 H₂:He 比に対する依存性

以下で示すのは H₂:He を太陽組成比を模した 8:2, それよりも He の少ない現在の木星を模した 9:1, 参考として完全 H₂ 大気を模した 10:0 という 3 パターンの大気組成を与えた場合の計算結果である。ただし、いずれも下部境界温度はガリレオプローブの観測値を基に 207 K と設定している。

3.1.1 熱構造

前章で解説したモデルを用いて達成された放射対流平衡状態での熱構造を示したのが図 3.1.1 である。図中の黒線はガリレオプローブによる観測値である (NASA/PDS)。ただし黒線の下部はプローブデータにベストフィットする乾燥断熱減率である。上部は放射平衡に達しているため等温であり、これは成層圏に該当する。一般に成層圏では太陽放射の吸収により上層に向かうほど温度が上昇するが、本計算では太陽放射を無視しているため等温となっている。一方で計算領域下部では、下部境界を起点とする乾燥断熱減率に概ね沿っており、これは対流圏に該当する。

図 3.1.1 で対流圏の構造を比較すると、いずれの組成の場合もさほど大きな違いは無い。対流圏の温度構造は (2.1) の式に従っているが、この式では組成の変化によって比熱比がわずかに変化するだけでほとんど影響が無いためであると考えられる。

表 3.1.1 には成層圏の温度を示している。成層圏の温度は H₂ の割合が大きい場合のほうが小さい場合に比べて若干低い。これは H₂ の割合が大きいほど大気の不透明度が増し、

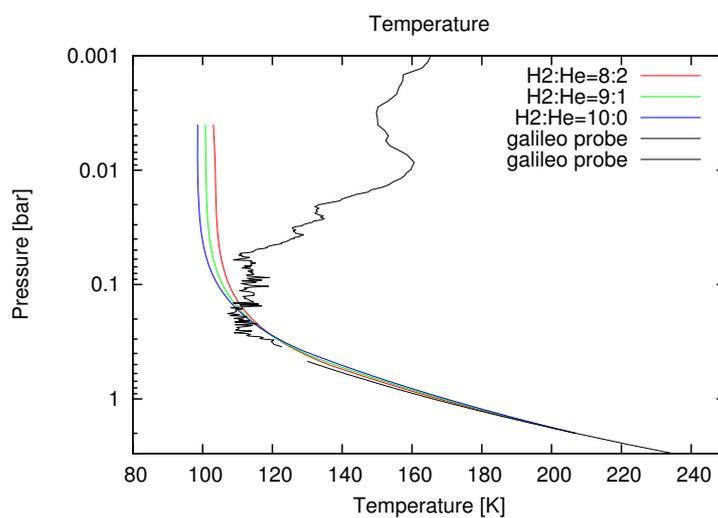


図 3.1.1: 各組成比に対する熱構造. 縦軸は圧力, 横軸は温度. 赤線, 緑線, 青線はそれぞれ H₂:He=8:2, 9:1, 10:0 での計算結果であり, 黒線はガリレオプローブによる観測値 (NASA/PDS) である.

温度の高い下層の放射が上部まで届きにくくなるためと考えられる。

組成比 (H ₂ :He)	成層圏温度 (K)
8:2	103.08
9:1	100.79
10:0	98.59

表 3.1.1: 各組成比に対する成層圏温度.

3.1.2 正味上向きフラックス・有効温度

放射対流平衡状態での熱構造において、各グリッドでのフラックス収支 $F_{total}(P) = \int_{\nu} (F_{\nu}^{\downarrow} + F_{\nu}^{\uparrow} + F_{\nu}^{lb}) d\nu$ を示したのが図 3.1.2 である。図中の黒線は図 1.2 で示したガリレオプローブのデータに基づく計算値である。成層圏の領域では正味上向き放射フラックスが一定となっている。これは大気層で放射平衡が成立していることを示す。これに対して下層では高度が上がるとともに正味上向き放射フラックスも増えている。ここから、大気層の下面に入射するフラックスよりも上面から出ていくフラックスの方が多くなり、結果として大気層からはエネルギーが失われて冷却されることが分かる。

図 3.1.2 より、H₂ の割合が増加すると対流圏における正味上向きフラックスの絶対値が小さくなっていることが分かる。これは大気の不透明度が上昇して放射の伝達距離が短くなったためと考えられる。

大気上端における正味上向き放射フラックスは惑星の熱放射に対応している。ここから以下の式を用いて有効温度を求めることができる。

$$T_{eff} = \left(\frac{F}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

それぞれの大气組成における惑星熱放射と有効温度を表 3.1.2 に示す。H₂ の割合が増加すると惑星熱放射は減少している。これも大気の不透明度の増加が原因で、外部から観測可能な領域が低温な大気層までとなったためである。本計算で求められた熱放射および有効温度は、木星の惑星熱放射および有効温度の観測値 (13.89 W/m⁻², 124.4 ± 0.3 K, Hanel et al., 1981) よりも高温である。これは本計算で設定した下部境界温度の根拠となっているガリレオプローブの投下地点が、周囲より高温の領域 (ホットスポット) であったことに起因している。

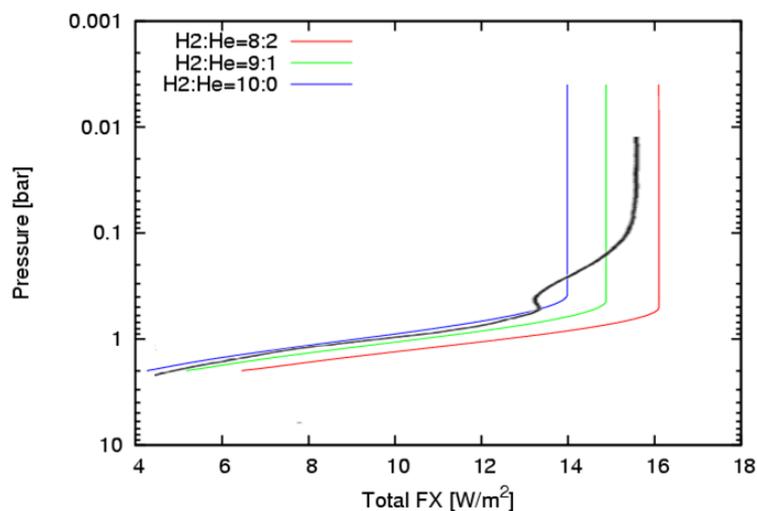


図 3.1.2: 各組成比に対する正味上向きフラックス. 縦軸は圧力, 横軸はフラックス. 赤線, 緑線, 青線はそれぞれ H₂:He=8:2, 9:1, 10:0 での計算結果であり, 黒線はガリレオプローブの NFR で得られたデータに基づく Sromovsky et al. (1998) の推定値である.

組成比 (H ₂ :He)	上端でのフラックス総量 (W/m ²)	有効温度 (K)
8:2	16.10	129.81
9:1	14.87	127.27
10:0	13.98	125.31

表 3.1.2: 大気組成に対する大気層上端での総フラックスおよび有効温度.

3.1.3 大気冷却率

大気冷却率の構造を示したのが図 3.1.3 である。図中の黒線は図 1.2 で示した推定値であり、0.1 bar 付近と 1 bar 付近の 2 か所に冷却率のピークが存在する。このうち 1bar 付近にあるものについては本計算でもみられたが、0.1 bar 付近のものについては現れなかった。ただしガリレオプローブの温度観測データをもとにフラックスを計算したところ同様のピークがあらわれたことから、この付近の温度は放射対流平衡ではなくプローブ投下地点の局所的・瞬間的な温度構造であったことが推測できる。

対流圏の冷却率構造は、いずれの大気組成においても 0.5-1.0 bar 付近にピークがある。これは図 1.2 の推定値で 1 bar 付近に見られるピークと同じものと思われる。このような冷却率のピークは、下向きフラックスによる冷却と上向きフラックスによる加熱の和が最小になるために生じている。これよりも上の領域では、それぞれのフラックスの効果が共に小さくなり、差も小さくなる。逆にこれよりも下の領域では、下向きのフラックスに加え上向きのフラックスも冷却の効果をもたらすが、これらの冷却効果を打ち消すように下部境界からのフラックスによる加熱が強くなる。下部境界付近では再び冷却率が大きくなっているが、これは下向きおよび上向きフラックスによる冷却効果の合計が、下部境界からのフラックスによる加熱効果を上回ったためである。最下層では大きく加熱されているように見えるが、これは下部境界を定温とおいているために見られる数値的なものである。

H_2 の割合が増えると温度の高い下層のフラックスが届かなくなるため、放射による熱輸送が弱まり冷却率の極大値は減少していることがわかる。

大気冷却率のグラフから、成層圏と対流圏の境界面(対流圏界面)と冷却率が極小になっている面の圧力を抽出し図 3.1.4 に示している。 H_2 が多くなると対流圏界面高度が上昇している。これは前節の正味上向きフラックスの平衡と一致している。また、冷却率のピークも同様に上昇している。これも不透明度の増加が原因で放射の伝達距離が変化し、圧力の低い層で放射加熱と放射冷却の差が大きくなったためと見られる。ただし、両者は組成に関わらず常に 0.4bar 程度のほぼ均等な相対高度を保っていることが分かる。

3.1.4 熱放射スペクトル

上部境界(0.002bar 面)におけるフラックス収支を波数別に示したのが図 3.1.5 である。惑星の放射が上部境界面から出ていると仮定すれば、この図は熱放射スペクトルを表していると考えることができる。黒線は赤外線天文衛星 Infrared Space Observatory (ISO) に搭載された Long Wave Spectrometer (LWS) での観測値である(Burgdorf et al., 2001)。本モデルによる計算値は観測値より低くなった。これはフラックスから得られた結論と矛

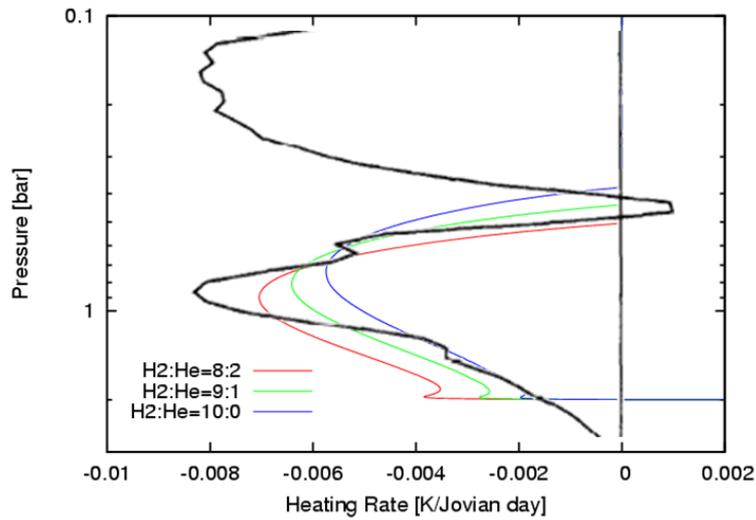


図 3.1.3: 各組成比に対する大気冷却率. 縦軸は圧力, 横軸は冷却率. 赤線, 緑線, 青線はそれぞれ H₂:He=8:2, 9:1, 10:0 での計算結果であり, 黒線は図 3.1.2 でのフラックス推定値を冷却率に変換したもの (Sromovsky et al., 1998) である.

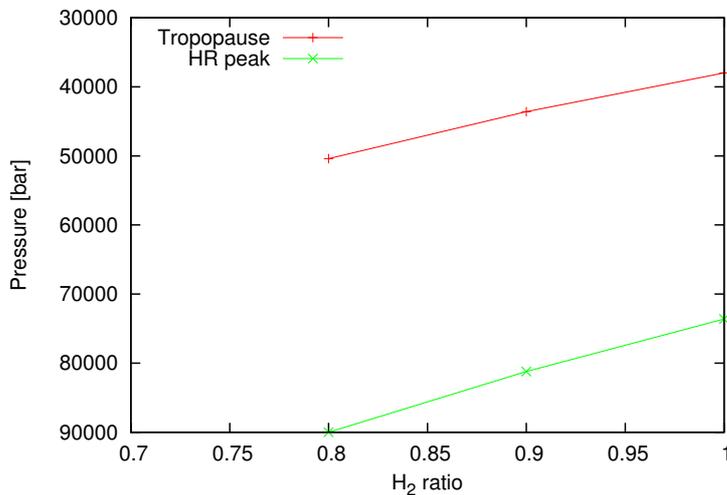


図 3.1.4: 各組成比に対する対流圏界面と冷却率極小高度. 縦軸は圧力座標, 横軸は組成比. 赤線が対流圏界面高度, 緑線が冷却率が極大になった高度.

盾しているように見えるが、40-100 μm での計算値は大気組成を変化させてもほとんど変化しないことから、この領域では他の微量成分による放射があるものと考えられる。また、太陽放射の効果も大きいとみられる。

H_2 が増加するとスペクトル強度が弱まるのは、不透明度の増加に伴う温度低下のためである。

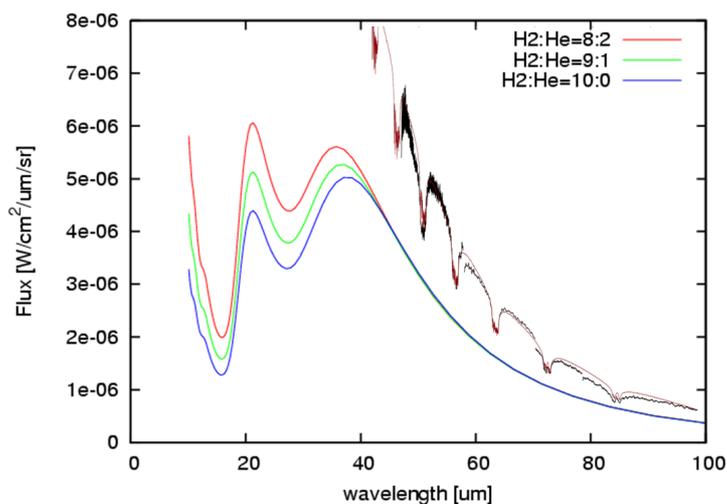


図 3.1.5: 各組成比に対するスペクトル図. 縦軸はスペクトル強度, 横軸は波長. 赤線, 緑線, 青線はそれぞれ $\text{H}_2:\text{He}=8:2, 9:1, 10:0$ での計算結果. 黒線は ISO による観測値, 褐色線は H_2 と He に加え NH_3 と PH_3 を考慮した Burgdorf らによる計算値 (Burgdorf et al., 2001).

3.2 下部境界温度への依存性

以下で示すのは下部境界面 (2bar 面) の温度として 150K, 207K, 250K, 300K, 350K, 400K を与えた場合の計算結果である。ただし、いずれも大気組成は $H_2:He = 8:2$ と設定している。

3.2.1 熱構造

下部境界温度を変えたときの温度構造は図 3.2.1 のようになった。下部境界温度の上昇に対してほぼ均一な温度上昇となっている。これは吸収係数の温度依存性が小さいために、光学的深さがほとんど変化していないためである。

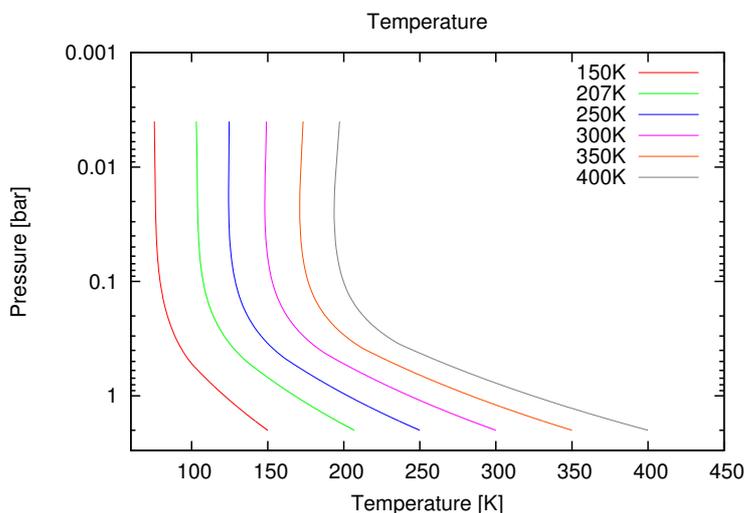


図 3.2.1: 各温度に対する熱構造。縦軸は圧力座標、横軸は温度。赤線が 150K, 緑線が 207K, 青線が 250K, 桃線が 300K, 橙線が 350K, 灰線が 400K。

表 3.2.1 より、成層圏の温度差は下部境界温度の差のほぼ半分の 25K 程度になっている。これは解析的に求められる概算値とほぼ等しい。

3.2.2 正味上向きフラックス・有効温度

図 3.2.2 では、温度を上げると熱放射フラックスが大きく増えていることが確認できる。放射は温度の 4 乗に比例するため、温度幅が等温であってもフラックス量は大きく変化する。

下部境界温度	成層圏温度
150K	75.46
207K	103.08
250K	124.68
300K	149.17
350K	173.23
400K	197.24

表 3.2.1: 各温度に対する成層圏温度.

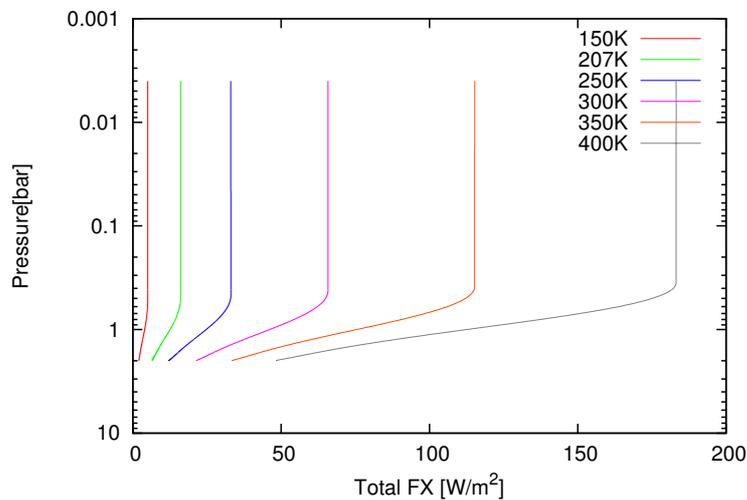


図 3.2.2: 各温度に対する正味上向きフラックス. 縦軸は圧力座標, 横軸は熱フラックス総量. 赤線が 150K, 緑線が 207K, 青線が 250K, 桃線が 300K, 橙線が 350K, 灰線が 400K.

上端でのフラックス量は温度が上がるほど大きくなる. これは温度上昇による放射量の増加による. ただし前述の通り吸収係数の温度依存性が小さいため, 構造自体にさほど大きな変化はない. 有効温度は成層圏温度と同様におおよそ 25 から 30 K 程度の幅となる.

3.2.3 大気冷却率

図 3.2.3 より温度を変えても基本的な構造は変化しないことがわかる. しかし放射量が増えているため, それに伴って放射冷却量が大きくなっている.

下部境界温度	上端でのフラックス総量	有効温度
150K	5.01	96.97
207K	16.10	129.81
250K	33.02	155.35
300K	65.78	184.56
350K	115.26	212.33
400K	183.19	238.41

表 3.2.2: 各温度に対する熱フラックス総量・有効温度.

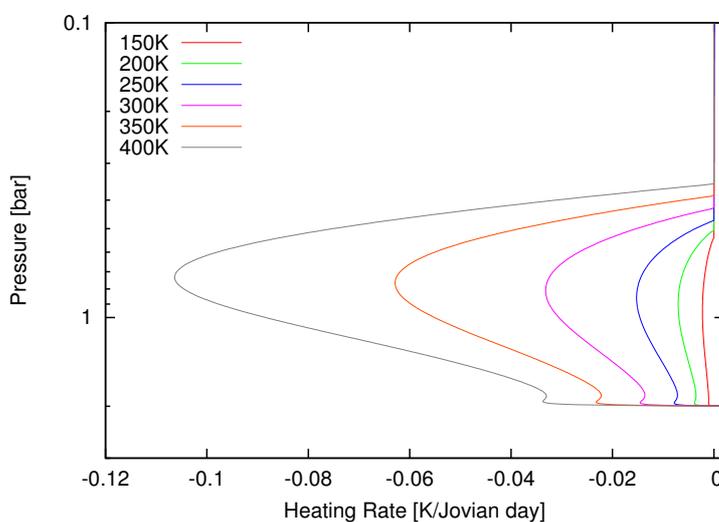


図 3.2.3: 各温度に対する大気冷却率. 縦軸は圧力座標, 横軸は冷却率. 赤線が 150K, 緑線が 207K, 青線が 250K, 桃線が 300K, 橙線が 350K, 灰線が 400K.

図 3.2.4 より, 温度があがると対流圏界面はわずかに上昇することがわかる. これは解析的に求められる推定値とほぼ等しい. ただし対流圏界面と冷却率が極小になる高度の相対高度は, 大気組成比を変えたときと同様に 0.4bar ほどでほとんど変化していない. これは吸収係数の温度依存性が小さく, 光学的深さにさほど差が無いためである.

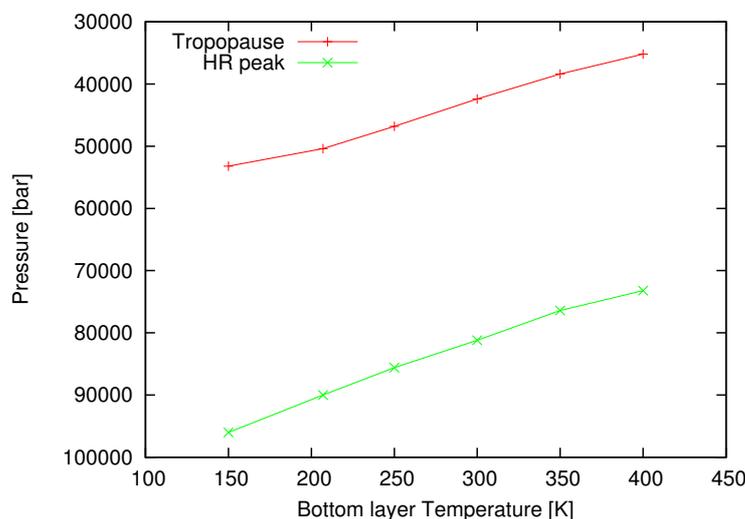


図 3.2.4: 各温度に対する対流圏界面と冷却率極大高度. 縦軸は圧力座標, 横軸は下部境界温度. 赤線が対流圏界面高度, 緑線が冷却率が極大になった高度.

3.2.4 熱放射スペクトル

図 3.2.5 より, 温度上昇に伴って惑星外部への放射量が大幅に増加していることがわかる. 特に短波長側の増加が顕著なのは, 黒体放射のピークがちょうどこの付近に位置する (300K でおおよそ $10 \mu\text{m}$) ためである. 本計算では $10 \mu\text{m}$ 未満の波長を考慮していないため, やりとりされているエネルギーが本来の値よりもかなり小さくなっている可能性がある.

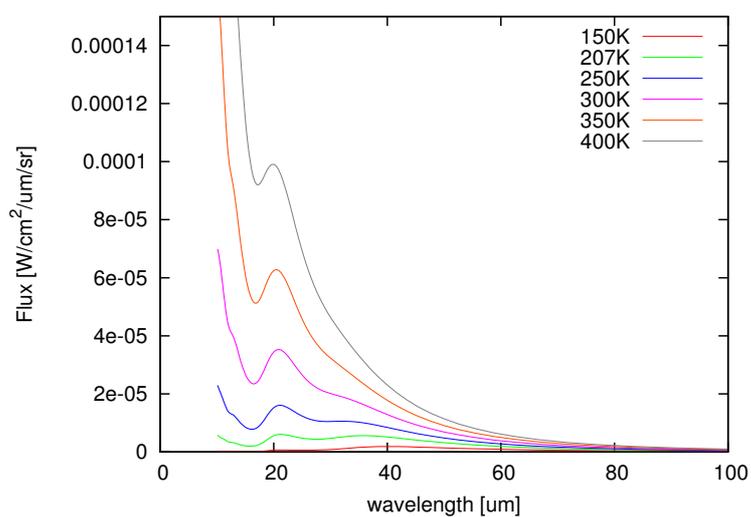


図 3.2.5: 各温度におけるスペクトル図. 縦軸はスペクトル強度, 横軸は波数. 赤線が 150K, 緑線が 207K, 青線が 250K, 桃線が 300K, 橙線が 350K, 灰線が 400K.

第4章 考察および結論

4.1 冷却率構造の形成維持過程

本計算から、 H_2 -He 大気における冷却率が熱輸送によってどのように維持されているかが示された。対流圏下部では、下部境界からのフラックスによる強い加熱があるが、高温であるために大気層自体の熱放射も多い。高度の上昇に伴って下部境界からのフラックスによる加熱は急激に減衰し、大気層の放射冷却が卓越するようになる。しかし徐々に大気層の温度が低下すると、高温な下層からの放射加熱を受ける。以上のようなフラックスのやり取りの総和が図 3.1.2 や図 3.2.2 であり、その結果として図 3.1.3 や図 3.2.3 のようなピークを持った構造が達成されている。このように、地表が存在せず代わりに十分な厚みを持つ大気を持ったガス惑星においては、放射による熱輸送が特徴的な振る舞いを持つことがわかった。

また、本計算では H_2 および He しか導入していないにも関わらず、 NH_3 をはじめとする微量成分と雲の存在も考慮して推定を行っている Sromovsky et al., (1998) での冷却率推定値に見られる 1bar 付近でのピークとよく一致していることから、この付近では他の成分による放射への寄与が小さい可能性がある。

さらに、下部境界に向かうにつれて急激に冷却率が小さくなっていることから 2bar 付近に対流圏の下端が存在するかもしれない。対流圏の下には再び放射層が存在するという推測もあり、計算範囲を拡張してより詳しく調べる必要がある。

これらの特徴は大気組成比や下部境界温度を変化させた場合でもほぼ共通しており、系外惑星を含む他のガス惑星についても同様の示唆を与え得ると言える。

4.2 惑星の進化に伴う大気構造の変化

これまでに示した計算結果の比較から、 H_2 -He 大気を持つ惑星の進化に伴う大気構造の変化を推定することが出来る。

先述のとおり、木星に関する観測では H_2/He が太陽組成比よりも大きくなることがわかっている。これは形成当初はほぼ太陽組成比に一致していたものの、 H_2 分子に対する He 分子の比重の大きさから He 分子が惑星中心に向かって降下し、外部から観測可能な大気表層部では少なくなったためと考えられている。これを踏まえると、今回の計算設定では $H_2:He = 8:2$ から徐々に H_2 の割合が増加して $10:0$ に向かうものと見ることが出来る。 H_2 分圧の増加は大気の不透明度を増加させ、対流圏界面の上昇を引き起こした。また大気冷却率の強度分布も変化していることから、惑星の進化に伴って大気の鉛直対流強度は徐々にゆるやかになっていくと考えられる。

下部境界温度については、惑星は形成期に得た膨大な集積エネルギーを徐々に熱として放出していることが分かっており、惑星は一般に高温から低温へと温度変化していくことが想像できる。これを踏まえ、今回の計算設定では 2bar 面において 400K から 150K までを考慮している。計算結果から、冷却に伴って放射量の減衰と対流強度の減少が見られることが分かった。

以上より、惑星の進化に伴って対流強度は減少するであろうと言える。木星を例に考えれば、過去にはより強い鉛直対流が存在しており、それによって現在とは異なった形の対流循環や渦構造が存在したかもしれない。

ただし、ここで得られた結論はあくまでも H_2-He 大気を用いた推定であり、現実には他の希少元素による吸収係数への寄与があることに注意すべきである。特に H_2O , CH_4 , NH_3 等については分子自体の放射特性に加えて、雲を形成することが知られている。また光化学反応の影響を受けるため化学平衡計算も必要になる。これらの詳細な寄与については本計算では扱っていない。実際の惑星を議論するには、これらの分子を考慮したうえで再度計算し直す必要がある。

第 5 章 今後の展望

5.1 モデルの改良

今回の計算から、微量成分の導入とそれに伴う吸収係数の拡張、そして太陽放射の導入が課題であると言える。またより高温な大気の計算を正確に解くため、短波長の側へ計算波長帯を拡張する必要がある。

5.2 木星大気循環モデルへの応用

本研究から、 H_2 -He 大気における大気冷却率の基本的な性質を示すことが出来た。これを先述の Sugiyama et al. (2006) に応用すれば、対流強度に関して従来よりも高精度な近似が可能になる。さらにそこから新たな木星大気循環モデルへと発展させていくことが一つの目標となる。

5.3 初期地球等の H_2 -He 大気を持つ岩石惑星への応用

現在広く知られている惑星形成論では、 H_2 -He 大気は形成初期の惑星およびガス惑星において存在するものと考えられる。形成初期の惑星は、周囲の円盤ガスを捕獲したり衝突天体の脱ガスによって H_2 主体の一次大気を纏うようになるためである。固体成分が主となる岩石惑星では質量が小さいため軽い一次大気が保持されずに散逸し、惑星内部からの脱ガス等によってより重い二次大気が形成される。一次大気の性質は地球における生命誕生の環境を知る上で重要な意義を持つ可能性があり、本モデルは大気散逸理論と組み合わせることでその議論に寄与できるだろう。同様に、巨大氷衛星についても初期大気は H_2 -He が中心であると考えられることから、これらの天体の表層環境についても示唆を与えることができるはずである。

5.4 系外惑星探査への寄与

1995 年に初めて候補が確認され、現在までに数百の候補が見つかった系外惑星 (太陽以外の恒星を公転する惑星) の多くでも、 H_2 が大気の主成分であるとみられている。これは半径の大きい惑星のほうが発見しやすく、そのような惑星は基本的にガス惑星であると考えられるからである。現在までに確認されている系外惑星の大部分を占めるホットジュピターのうちのいくつかでは、実際に透過スペクトル等による成分分析が行われており、この推定を裏付けている。さらに、今後の系外惑星探査計画によってより質量の小さい、あるいは公転周期の長い系外惑星が見つかるようになれば、木星のような比較的低温のガス惑星のほか、一次大気を持つ岩石惑星や、岩石惑星でありながら一次大気を保持するのに十分な質量を持つ惑星なども発見が期待できるだろう。

現在、これらの系外惑星を集中的に探査する計画が世界各地の観測施設で企画されている。それらの計画が本格的に実行されれば、今後より多くの系外惑星候補が確認され、その中には H_2 -He 大気を持つ惑星も少なからず存在するだろう。本研究では大気構造と惑星放射を結び付け、観測から得られた惑星放射データから対象惑星の大気構造に関する推定を可能にすることを目標に掲げている。

謝辞

本論文の執筆に当たり、指導教官である北海道大学倉本圭教授からは多大なご指導・ご助言をいただきました。何度も初歩的な課題で躓き、プレゼンテーション能力も一向に進歩しない著者に対して、時間が掛かるのも厭わず根気強くご指導して下さったことに深く感謝いたします。また本研究は徳永義哉氏の修士研究論文が土台となっており、同氏の研究成果に敬意を表するものであります。北海道大学石渡正樹准教授には、対流運動の基礎知識や計算手法に関するご助言をいただきました。北海道大学橋元明彦准教授には、研究発表の場で独自の視点からご意見をいただきました。岡山大学はしもとじょーじ准教授には、ごく限られた機会の中で放射計算に関する有益な情報をご紹介していただきました。北海道大学小高正嗣助教には、数値計算に関する技術的知識をご教授いただきました。北海道大学杉山耕一郎特任助教には、数値計算技術および木星の鉛直構造に関する知識をご教授いただきました。北海道大学博士後期課程山下達也氏には、筆者の乏しい数学的見識では証明できない数々の公式あるいは近似式について、大変的確な解説を示していただきました。その他、著者の所属する北海道大学理学院宇宙理学専攻惑星宇宙グループにいらっしゃるスタッフおよび学生の皆さまから、直接的・間接的問わず数々のご助力をいただきました。ここに深く感謝いたします。また私事ではありますが、研究をアマチュア視点で楽しむ機会を与えてくれた北大天文同好会のみなさま、そして日々の生活を支えてくださる私の家族に、この場を借りて感謝をささげます。

参考文献

1. Appleby, J. F., J. S. Hogan, 1984: Radiative-Convective Equilibrium Models of Jupiter and Saturn. *Icarus*, 59, 336-366.
2. Borysow, A. 2002 : Collision induced absorption coefficients of H₂ pairs at temperatures from 60K to 1000K”, *Astron. Astrophys.*, 390, p. 779-782.
3. Borysow, J. Frommhold, L. and Birnbaum, G. 1988 : ”Collision-induced rototranslational absorption spectra of H₂-He pairs at temperatures from 40 to 3000K” *Astrophysical Journal*, vol. 326, p.509-515.
4. Burgdorf, M. J.; Encrenaz, Th.; Feuchtgruber, H.; Davis, G. R.; Fouchet, Th.; Gautier, D.; Lellouch, E.; Orton, G. S.; Sidher, S. D. 2001 : ISO Far-Infrared Spectroscopic Observations of Jupiter . The Promise of the Herschel Space Observatory. Eds. G.L. Pilbratt, J. Cernicharo, A.M. Heras, T. Prusti, R. Harris. ESA-SP 460, p. 365
5. Hanel, R.; Conrath, B.; Herath, L.; Kunde, V.; Pirraglia, J. 1981 : Albedo, internal heat, and energy balance of Jupiter - Preliminary results of the Voyager infrared investigation. *Journal of Geophysical Research*, vol. 86, Sept. 30, 1981, p. 8705-8712.
6. Hogan, J. S., S. I. Rasool, and T. Encrenaz, 1969: The thermal structure of the Jovian atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, 26, 898-905.
7. Ingersoll, A.P. et al. 2004 : Dynamics of Jupiter 's atmosphere. Cambridge University Press, New York.
8. Kuiper, G. P., 1952: The Atmospheres of the Earth and Planets. Univ. of Chicago-Press Chicago.
9. Lasker, B. M., 1963: Wet adiabatic model atmospheres for Jupiter. *Astrophys. J.*, 138,709-719.

10. Little, Blane; Anger, Clifford D.; Ingersoll, Andrew P.; Vasavada, Ashwin R.; Senske, David A.; Breneman, H. Herbert; Borucki, William J.; The Galileo SSI Team, 1999 : Galileo Images of Lightning on Jupiter. *Icarus*, Volume 142, Issue *Icarus*, pp. 306-323.
11. Niemann, H. B., S. K. Atreya, G. R. Carignan, T. M. Donahue, J. A. Haberman, D. N. Harpold, R. E. Hartle, D. M. Hunten, W. T. Kasprzak, P. R. Mahaffy, T. C. Owen, and S. H. Way, 1998: The composition fo the Jovian atmosphere as determined by the Galileo probe mass spectrometer. *J. Geophys. Res.*, 103, 22,831 - 22,845.
12. Seiff, Alvin; Kirk, Donn B.; Knight, Tony C. D.; Young, Richard E.; Mihalov, John D.; Young, Leslie A.; Milos, Frank S.; Schubert, Gerald; Blanchard, Robert C.; Atkinson, David. 1998 : Thermal structure of Jupiter's atmosphere near the edge of a 5- μ m hot spot in the north equatorial belt. *Journal of Geophysical Research*, Volume 103, Issue E10, p. 22857-22890
13. Sromovsky, L. A., A. D. Collard, P. M. Fry, G. S. Orton, M. T. Lemmon, M. G. Tomasko and R. S. Freedman, 1998: Galileo probe measurements of thermal and solar radiation fluxes in the Jovian atmosphere. *J. Geo. Res.*, 103, 22,929 - 22,978.
14. Strobel, D. F.; Smith, G. R. 1973 : On the temperature of the Jovian thermosphere. *Journal of Atmospheric Science*, Vol. 30, p. 718 - 725.
15. Trafton, L. M., 1967: Model atmospheres of the major planets. *Astrophys. J.*, 147,765-781.
16. 杉山耕一朗, 2006: H₂O;NH₃ の凝結と NH₄SH の生成反応を考慮した木星大気の雲対流ならびにその直接数値計算. 学位論文, 北海道大学.
17. 徳永義哉, 2010: 木星型惑星を想定した水素大気の放射対流平衡構造. 修士論文, 北海道大学.

付録 A 連続吸収による光学的厚さの算出

Borysow 2002, 1998 からは、吸収係数の一種として $\alpha_{H_2-H_2}, \alpha_{H_2-He}(\text{cm}^{-1}\text{amg}^{-2})$ が与えられる。これらを用いると光学的厚さは以下のように書ける。

$$d\tau_\nu = \alpha_{H_2-H_2} n_{H_2,amg}^2 dz_{cm} + \alpha_{H_2-He} n_{H_2,amg} n_{He,amg} dz_{cm}.$$

ただし、 $n_{H_2,amg}, n_{He,amg}$ は各分子の amagat 密度、 dz_{cm} は cm 単位の微小 z である。 $n_{H_2,amg}, n_{He,amg}$ を温度と圧力の関数として与えるため、理想気体の状態方程式を用いて変形すると

$$\begin{aligned} n_{H_2,amg} &= \frac{n_{H_2,number}}{n_{unit,amg}} \\ &= \frac{1}{n_{unit,amg}} \frac{\rho_{H_2,mass}}{M_{H_2}} \\ &= \frac{1}{n_{unit,amg}} \frac{1}{M_{H_2}} \frac{M_{H_2} P_{H_2}}{kT} \\ &= \frac{1}{n_{unit,amg}} \frac{P_{H_2}}{kT} \\ n_{He,amg} &= \frac{n_{He,number}}{n_{unit,amg}} \\ &= \frac{1}{n_{unit,amg}} \frac{\rho_{He,mass}}{M_{He}} \\ &= \frac{1}{n_{unit,amg}} \frac{1}{M_{He}} \frac{M_{He} P_{He}}{kT} \\ &= \frac{1}{n_{unit,amg}} \frac{P_{He}}{kT}. \end{aligned}$$

ただし、 $n_{H_2,number}, n_{He,number}$ は各分子の数密度 (m^{-3})、 $n_{unit,amg}$ は amagat 単位の基準量 ($2.6867774e+25 \text{ m}^{-3}$)、 $\rho_{H_2,mass}, \rho_{He,mass}$ は各分子の質量密度 (kg/m^{-3})、 M_{H_2}, M_{He} は各分子一個当たりの質量 (kg)、 P_{H_2}, P_{He} は各分子の分圧を表す。これを代入すると

$$\begin{aligned} d\tau_\nu &= \alpha_{H_2-H_2} \left(\frac{1}{n_{unit,amg}} \frac{P_{H_2}}{kT} \right)^2 dz_{cm} + \alpha_{H_2-He} \left(\frac{1}{n_{unit,amg}} \frac{P_{H_2}}{kT} \right) \left(\frac{1}{n_{unit,amg}} \frac{P_{He}}{kT} \right) dz_{cm} \\ &= \left(\frac{\alpha_{H_2-H_2} P_{H_2}}{n_{unit,amg} kT} + \frac{\alpha_{H_2-He} P_{He}}{n_{unit,amg} kT} \right) \left(\frac{P_{H_2}}{n_{unit,amg} kT} \right) 100 dz. \end{aligned}$$

ここで dz を、以下の静水圧平衡の式を用いて置換する.

$$\begin{aligned} dz &= -\frac{dP}{\rho g} \\ &= -\frac{kT}{M_{avg}P_{total}g}dP. \end{aligned}$$

ただし, ρ は全体の質量密度, g は重力加速度, M_{avg} は大気分子の平均質量, P_{total} は全圧を表す. 以上より以下の式が導かれる.

$$\begin{aligned} d\tau_\nu &= (\alpha_{H_2-H_2}P_{H_2} + \alpha_{H_2-He}P_{He}) \left(\frac{P_{H_2}}{(n_{unit,avg}kT)^2} \right) \frac{100kT}{M_{avg}P_{total}g}dP \\ &= (\alpha_{H_2-H_2}P_{H_2} + \alpha_{H_2-He}P_{He}) \left(\frac{100P_{H_2}}{(n_{unit,avg})^2M_{avg}P_{total}gkT} \right) dP. \end{aligned}$$

付録 B 放射計算補足

B.1 放射伝達方程式の基礎

以下では、放射伝達過程を考慮する際の出発点となる基礎方程式を考える。また、特に LTE を仮定した場合の基礎方程式を考える。

密度 ρ の物質中を距離 ds だけ通過した時の、任意の振動数を持つ放射強度 I_ν の変化 dI_ν は以下の式であらわされる。

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho(z) I_\nu ds + \rho(z) j_\nu ds. \quad (\text{B.1})$$

ただしは質量吸収係数、 j_ν は放出係数である。右辺第一項は物質による吸収を表すため負の値であり、第二項は物質による放射を表すため正の値である。注意点として、この式では放射の方向は考慮されていない。また、入射や変化後の強度は「場の量」であることに注意しなければならない。

ここで LTE であると仮定すると、入射してくる放射強度 I_ν は、温度 T の物質による黒体輻射強度 $B_\nu(T)$ であると考えることができ、 $I_\nu = B_\nu(T)$ と書ける。この時、入射してくる I_ν は入射地点における物質の温度 T による黒体輻射であり、あくまで「場の量」であることに注意すべきである。また LTE であることから、放射強度はどこをとっても $B_\nu(T)$ となるため、 $dI_\nu = 0$ といえる。

この LTE という仮定に伴う $I_\nu = B_\nu(T)$ 、 $dI_\nu = 0$ を基礎方程式に代入すると、 j_ν について

$$j_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T)$$

が成り立つ。これをキルヒホッフの法則と呼ぶ。この式から、放出係数は吸収係数とプランク関数であらわせることがわかる。また、この形において κ_ν が第一項と第二項に現れることから、吸収しやすいほど放出もしやすいこともわかる。

キルヒホッフの法則を用いて (B.1) を書きなおすと、

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho(z) I_\nu ds + \kappa_\nu \rho(z) B_\nu(T) ds \quad (\text{B.2})$$

となる. この表式に直すことで, 元の基礎方程式にあった未知数 κ_ν と j_ν のうち j_ν を消去し, 代わりにより扱いやすい温度 T の関数である $B_\nu(T)$ を使えるようになる.

続いて以下では, 放射伝達過程を考慮する際に有効な新たな鉛直方向座標系として光学の深さ τ を導入する. いわゆる光学の距離と本質的にはまったく同じものである. ある振動数 ν の光が大気上端から入射し, 地表からの高度が z の気層に達した時, その光にとっての大気の深度を表す値として

$$\tau_\nu = \int_z^\infty \rho(z) \kappa_\nu dz \quad (\text{B.3})$$

を定義し, τ_ν を振動数 ν に対する大気の光学の深さと呼ぶ. 光学の深さは鉛直座標 z と一対一に対応しており, 座標 z の代わりに使うことができる. 光学の深さは大気が十分に薄い最上層を 0 とし, 地表に向かうほど値が大きくなる. つまり鉛直座標と正の方向が真逆である. (B.3) を大気最上層から地表まで積分することで得られる値を, 大気的全光学の深さ $\tau_{\nu, \max}$ と呼ぶ. ρ が大きい (小さい), あるいは着目している振動数帯における質量吸収係数 κ_ν が大きい (小さい) とき, 光学の深さの変化率 $\frac{d\tau_\nu}{dz}$ は大きく (小さく) なり, 上層と下層の光学の深さの差 $\tau_\nu(z=0) - \tau_\nu(z=\infty)$ が大きく (小さく) なる.

続いて以下では, 放射伝達の基礎方程式 (B.2) に光学の深さ τ_ν を導入する. まず, 鉛直上向き座標 z と放射の伝播距離 ds について, z 軸に対し ds がなす角度を天頂角 θ とすると,

$$\frac{dz}{ds} = \cos \theta$$

という関係が成り立つ. また先に説明した通り, 鉛直座標 z と光学の深さ τ_ν は一対一に対応しており, その関係式は (B.3) を微分に直して

$$d\tau_\nu = -\rho(z) \kappa_\nu dz$$

と書ける. 以上の二式より

$$\rho(z) \kappa_\nu ds = -\frac{d\tau_\nu}{\cos \theta}$$

となる. これを用いて放射伝達の基礎方程式 (B.2) における ds を光学の深さ $d\tau_\nu$ に置き換えると,

$$\cos \theta \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - B_\nu(T) \quad (\text{B.4})$$

となる.

光学の深さの導入によって, 大気中で $ds = \frac{d\tau_\nu}{\rho(z) \kappa_\nu \cos \theta}$ の距離を伝播する間に, 実際に光がどの程度の吸収放射を行うかがとらえやすくなる.

B.2 フラックス導出

以下では、高度 τ_ν にある気層へ流入するフラックスを4種類に分解できるものと仮定し、その概念を述べる。

ある任意の高度 (τ_ν) にある気層へは、次の4種類のフラックスが流入するものと仮定できる。

1. (τ_ν) よりも鉛直方向で上 ($\tau_\nu \geq t \geq 0$) にある全ての気層から (τ_ν) にある気層への θ 方向の入射の総和 $I_\nu(\theta)$ の、鉛直下向きを中心とした半球積分から求められるフラックス F_ν^\downarrow
ただしこの時の天頂角 θ は $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ の範囲である。
2. 上部境界からの放射 (太陽放射) I_ν^\odot によるフラックス F_ν^\odot 。ただし本計算では惑星放射を中心として考慮しているため、現状では導入していない。
3. (τ_ν) よりも鉛直方向で下 ($\tau_{\nu,max} \geq t \geq \tau_\nu$) にある全ての気層から (τ_ν) にある気層への θ 方向の入射の総和 $I_\nu(\theta)$ の、鉛直上向きを中心とした半球積分から求められるフラックス F_ν^\uparrow
ただしこの時の天頂角 θ は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲である。
4. 下部境界からの放射 $I_\nu^{surface}$ によるフラックス $F_\nu^{surface}$

この4種のフラックスによって、ある任意の高度 τ_ν にある気層は加熱されると考えることができる。

まず、光学的深さが0から τ_ν の間にある気層からの放射によって得られるフラックス F_ν^\downarrow を導出する。(B.4) を定数変化法を用いて解くと $I_\nu(\tau_\nu, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi)$ は次のような形となる。

*1

$$I_\nu(\tau_\nu, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi) = -\frac{1}{\cos \theta} e^{-\frac{\tau_\nu}{\cos \theta}} \int_0^{\tau_\nu} B_\nu(t) e^{-\frac{t}{\cos \theta}} dt \quad (B.6)$$

*1まず $B_\nu = 0$ において解くと

$$I_\nu(\tau_\nu, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi) = A e^{-\frac{\tau_\nu}{\cos \theta}}. \quad (B.5)$$

ここで A を定数ではなく τ_ν の関数であるとみなし、また高度 τ_ν 毎に温度 T が定まると考えれば B_ν についても τ_ν の関数と考えることができることを踏まえ、再び (B.5) に代入して計算すると、

$$\begin{aligned} \cos \theta e^{-\frac{\tau_\nu}{\cos \theta}} \frac{dA(\tau_\nu)}{d\tau_\nu} &= -B_\nu(\tau_\nu) \\ \frac{dA(\tau_\nu)}{d\tau_\nu} &= -\frac{1}{\cos \theta} B_\nu(\tau_\nu) e^{-\frac{\tau_\nu}{\cos \theta}} \\ A(\tau_\nu, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi) - A(0) &= -\frac{1}{\cos \theta} \int_0^{\tau_\nu} B_\nu(t) e^{-\frac{t}{\cos \theta}} dt. \end{aligned}$$

この $I_\nu(\tau_\nu, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi)$ は、光学的深さ τ_ν と角度 θ の関数であり、光学的深さ τ_ν にある気層の単位面積を、天頂角 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ の方向へ向けて通過する振動数 ν の放射の強度である。

今求めようとしている高度 $\tau_{\nu,a}$ における鉛直下向きのフラックス $F_\nu^\downarrow(\tau_{\nu,a})$ は、この高度における各方向への入射強度 $I_\nu(\tau_{\nu,a}, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi)$ の鉛直下向き成分を抽出し、それを入射単位面の下半球について立体角積分することで得ることができる。

$$\begin{aligned} F_\nu^\downarrow(\tau_{\nu,a}) &= \int I_\nu(\tau_{\nu,a}, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi) \cos \theta \, d\Omega \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi I_\nu(\tau_{\nu,a}, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi I_\nu(\tau_{\nu,a}, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \\ &= -2\pi \int_0^{-1} I_\nu(\tau_{\nu,a}, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi) \cos \theta \, d(\cos \theta) \\ &= 2\pi \int_{-1}^0 I_\nu(\tau_{\nu,a}, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi) \cos \theta \, d(\cos \theta) \end{aligned}$$

これに (B.6) を代入すると、

$$\begin{aligned} F_\nu^\downarrow(\tau_{\nu,a}) &= 2\pi \int_{-1}^0 \left(-\frac{1}{\cos \theta} e^{\frac{\tau_{\nu,a}}{\cos \theta}} \int_0^{\tau_{\nu,a}} B_\nu(t) e^{-\frac{t}{\cos \theta}} \, dt \right) \cos \theta \, d(\cos \theta) \\ &= -2\pi \int_{-1}^0 \left(e^{\frac{\tau_{\nu,a}}{\cos \theta}} \int_0^{\tau_{\nu,a}} B_\nu(t) e^{-\frac{t}{\cos \theta}} \, dt \right) \, d(\cos \theta) \end{aligned} \quad (B.7)$$

ここで、 $\cos \theta = -\frac{1}{\omega}$ *2 と変数変換し、さらに指数積分を以下のように定義し (B.7) に代入

よって、

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_\nu, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi) &= A e^{\frac{\tau_\nu}{\cos \theta}} \\ &= \left(A(0) - \frac{1}{\cos \theta} \int_0^{\tau_\nu} B_\nu(t) e^{-\frac{t}{\cos \theta}} \, dt \right) e^{\frac{\tau_\nu}{\cos \theta}}. \end{aligned}$$

ここで、上部境界からの入射強度が 0 であるという境界条件を与えてやると、高度 $\tau_\nu = 0$ において次式のような式が成り立ち、 $A(0)$ を決定できる。

$$\begin{aligned} I_\nu(0, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi) &= \left(A(0) - \frac{1}{\cos \theta} \int_0^0 B_\nu(t) e^{-\frac{t}{\cos \theta}} \, dt \right) e^{\frac{0}{\cos \theta}} \\ &= A(0) = 0 \end{aligned}$$

よって、ある高度 τ_ν の単位面積を $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 方向へ向けて通過する振動数 ν の放射の強度 $I_\nu(\tau_\nu, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi)$ は以下となる。

$$I_\nu(\tau_\nu, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi) = -\frac{1}{\cos \theta} e^{\frac{\tau_\nu}{\cos \theta}} \int_0^{\tau_\nu} B_\nu(t) e^{-\frac{t}{\cos \theta}} \, dt$$

*2これを ω で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d \cos \theta}{d\omega} &= -\frac{d}{d\omega} \frac{1}{\omega} \\ &= \frac{1}{\omega^2} \end{aligned}$$

する.

$$\begin{aligned}
 E_n(x) &= \int_1^\infty \frac{e^{-\omega x}}{\omega^n} d\omega \\
 F_\nu^\downarrow(\tau_{\nu,a}) &= -2\pi \int_{-1}^0 \left(e^{\frac{\tau_{\nu,a}}{\cos\theta}} \int_0^{\tau_{\nu,a}} B_\nu(t) e^{-\frac{t}{\cos\theta}} dt \right) d(\cos\theta) \\
 &= -2\pi \int_1^\infty \left(e^{-\tau_{\nu,a}w} \int_0^{\tau_{\nu,a}} B_\nu(t) e^{tw} dt \right) \frac{1}{w^2} dw \\
 &= -2\pi \int_0^{\tau_{\nu,a}} B_\nu(t) \left(\int_1^\infty \frac{e^{-(\tau_{\nu,a}-t)w}}{w^2} dw \right) dt \\
 &= -2\pi \int_0^{\tau_{\nu,a}} B_\nu(t) E_2(\tau_{\nu,a} - t) dt
 \end{aligned}$$

これが、より上にある層から光学的深さ τ_ν にある気層へと入射する鉛直下向きフラックス F_ν^\downarrow である.

続いて以下では、光学的深さが τ_ν から $\tau_{\nu,max}$ の間にある気層からの放射によって得られるフラックス F_ν^\uparrow と、下部境界からのフラックス F_ν^s を導出する. 原則的には F_ν^\downarrow と同じである. ただし $I_\nu(\tau_\nu, 0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ の表式と、変数変換の際に $\cos\theta = \frac{1}{\omega}$ とする点に注意する.

(B.4) を定数変化法を用いて解くと $I_\nu(\tau_\nu, 0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ は次のような形となる. ^{*3}

$$I_\nu(\tau_\nu, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}) = B_\nu(\tau_{max}) e^{-\frac{\tau_{max}-\tau_\nu}{\cos\theta}} + \frac{1}{\cos\theta} e^{\frac{\tau_\nu}{\cos\theta}} \int_{\tau_\nu}^{\tau_{max}} B_\nu(t) e^{-\frac{t}{\cos\theta}} dt \quad (\text{B.8})$$

よって

$$d \cos\theta = \frac{1}{\omega^2} d\omega$$

^{*3}まず $B_\nu = 0$ とおいて解くと

$$I_\nu(\tau_\nu, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}) = A e^{\frac{\tau_\nu}{\cos\theta}}$$

ここで A を定数ではなく τ_ν の関数であるとみなし、また高度 τ_ν 毎に温度 T が定まると考えれば B_ν についても τ_ν の関数と考えることができることを踏まえ、再び最初の式に代入して計算すると、

$$\begin{aligned}
 \cos\theta e^{\frac{\tau_\nu}{\cos\theta}} \frac{dA(\tau_\nu)}{d\tau_\nu} &= -B_\nu(\tau_\nu) \\
 \frac{dA(\tau_\nu)}{d\tau_\nu} &= -\frac{1}{\cos\theta} B_\nu(\tau_\nu) e^{-\frac{\tau_\nu}{\cos\theta}} \\
 A(\tau_{max}) - A(\tau_\nu, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}) &= -\frac{1}{\cos\theta} \int_{\tau_\nu}^{\tau_{max}} B_\nu(t) e^{-\frac{t}{\cos\theta}} dt
 \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
 I_\nu(\tau_\nu, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}) &= A e^{\frac{\tau_\nu}{\cos\theta}} \\
 &= \left(A(\tau_{max}) + \frac{1}{\cos\theta} \int_{\tau_\nu}^{\tau_{max}} B_\nu(t) e^{-\frac{t}{\cos\theta}} dt \right) e^{\frac{\tau_\nu}{\cos\theta}}
 \end{aligned}$$

ここで、光学的深さが τ_{max} である下部境界からの入射強度が、下部境界の温度 $T_{surface}$ の黒体放射 $B_\nu(T_{surface}) = B_\nu(\tau_{max})$ であるという境界条件を与えてやると、高度 $\tau_{\nu,max}$ において次式のような式

この $I_\nu(\tau_\nu, 0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ は、光学的深さ τ_ν と角度 θ の関数であり、光学的深さ τ_ν にある気層の単位面積を、天頂角 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の方向へ向けて通過する振動数 ν の放射の強度である。

今求めようとしている高度 $\tau_{\nu,a}$ における鉛直上向きのフラックス $F_\nu^\uparrow(\tau_{\nu,a})$ は、この高度における各方向への入射強度 $I_\nu(\tau_{\nu,a}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ の鉛直上向き成分を抽出し、それを入射単位面の上半球について立体角積分することで得ることができる。

$$\begin{aligned}
F_\nu^s(\tau_{\nu,a}) + F_\nu^\uparrow(\tau_{\nu,a}) &= \int I_\nu(\tau_{\nu,a}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \cos \theta \, d\Omega \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\nu(\tau_{\nu,a}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\nu(\tau_{\nu,a}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \\
&= -2\pi \int_1^0 I_\nu(\tau_{\nu,a}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \cos \theta \, d(\cos \theta) \\
&= 2\pi \int_0^1 I_\nu(\tau_{\nu,a}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \cos \theta \, d(\cos \theta)
\end{aligned}$$

これに (B.8) を代入すると、

$$F_\nu^s(\tau_{\nu,a}) + F_\nu^\uparrow(\tau_{\nu,a}) = 2\pi \int_0^1 \left(B_\nu(\tau_{max}) e^{-\frac{\tau_{max} - \tau_{\nu,a}}{\cos \theta}} + \frac{1}{\cos \theta} e^{\frac{\tau_{\nu,a}}{\cos \theta}} \int_{\tau_{\nu,a}}^{\tau_{max}} B_\nu(t) e^{-\frac{t}{\cos \theta}} dt \right) \cos \theta \, d(\cos \theta).$$

ここで、 $\cos \theta = \frac{1}{\omega}$ *4 と変数変換し、さらに指数積分を以下のように定義し (B.9) に代入が成り立ち、 $A(\tau_{max})$ を決定できる。

$$\begin{aligned}
I_\nu(\tau_{max}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}) &= \left(A(\tau_{max}) + \frac{1}{\cos \theta} \int_{\tau_{max}}^{\tau_{max}} B_\nu(t) e^{-\frac{t}{\cos \theta}} dt \right) e^{\frac{\tau_\nu}{\cos \theta}} \\
&= A(\tau_{max}) e^{\frac{\tau_{max}}{\cos \theta}} = B_\nu(\tau_{max}) \\
A(\tau_{max}) &= B_\nu(\tau_{max}) e^{-\frac{\tau_{max}}{\cos \theta}}
\end{aligned}$$

よって、ある高度 τ_ν の単位面積を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 方向へ向けて通過する振動数 ν の放射の強度 $I_\nu(\tau_\nu, 0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ は以下となる。

$$\begin{aligned}
I_\nu(\tau_\nu, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}) &= \left(B_\nu(\tau_{max}) e^{-\frac{\tau_{max}}{\cos \theta}} + \frac{1}{\cos \theta} \int_{\tau_\nu}^{\tau_{max}} B_\nu(t) e^{-\frac{t}{\cos \theta}} dt \right) e^{\frac{\tau_\nu}{\cos \theta}} \\
&= B_\nu(\tau_{max}) e^{-\frac{\tau_{max} - \tau_\nu}{\cos \theta}} + \frac{1}{\cos \theta} e^{\frac{\tau_\nu}{\cos \theta}} \int_{\tau_\nu}^{\tau_{max}} B_\nu(t) e^{-\frac{t}{\cos \theta}} dt
\end{aligned}$$

*4これを ω で微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{d \cos \theta}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega} \frac{1}{\omega} \\
&= -\frac{1}{\omega^2}
\end{aligned}$$

よって

$$d \cos \theta = -\frac{1}{\omega^2} d\omega$$

する.

$$\begin{aligned}
 E_n(x) &= \int_1^\infty \frac{e^{-\omega x}}{\omega^n} d\omega \\
 F_\nu^{surface}(\tau_{\nu,a}) + F_\nu^\uparrow(\tau_{\nu,a}) &= 2\pi \int_0^1 \left(B_\nu(\tau_{max}) e^{-\frac{\tau_{max}-\tau_{\nu,a}}{\cos\theta}} + \frac{1}{\cos\theta} e^{\frac{\tau_{\nu,a}}{\cos\theta}} \int_{\tau_{\nu,a}}^{\tau_{max}} B_\nu(t) e^{-\frac{t}{\cos\theta}} dt \right) \cos\theta d(\cos\theta) \\
 &= 2\pi \int_\infty^1 \left(B_\nu(\tau_{max}) e^{-(\tau_{max}-\tau_{\nu,a})w} + w e^{\tau_{\nu,a}w} \int_{\tau_{\nu,a}}^{\tau_{max}} B_\nu(t) e^{-tw} dt \right) \frac{1}{w} \left(-\frac{1}{w^2} dw \right) \\
 &= 2\pi \left(B_\nu(\tau_{max}) \int_1^\infty \frac{e^{-(\tau_{max}-\tau_{\nu,a})w}}{w^3} dw + \int_{\tau_{\nu,a}}^{\tau_{max}} B_\nu(t) \left(\int_1^\infty \frac{e^{-(t-\tau_{\nu,a})w}}{w^2} dw \right) dt \right) \\
 &= 2\pi B_\nu(\tau_{max}) E_3(\tau_{max} - \tau_{\nu,a}) + 2\pi \int_{\tau_{\nu,a}}^{\tau_{max}} B_\nu(t) E_2(t - \tau_{\nu,a}) dt
 \end{aligned}$$

これが、より下にある層から光学的深さ τ_ν にある気層へと入射する鉛直上向きフラックス F_ν^\uparrow と、下部境界からの放射による上向きフラックス $F_\nu^s(\tau_\nu)$ である.

B.3 各フラックスによるエネルギー収支の導出

求めた 3 種のフラックスによって光学的深さ τ_ν にある気層が受け取る正味のエネルギー E_{total} は、高度の微小変化に対するフラックス量変化を全波数について積分したものととして考えることができる. よって,

$$E_{total} = \int_\nu \left(\frac{dF_\nu^\downarrow(\tau_{\nu,a})}{dz} + \frac{dF_\nu^\uparrow(\tau_{\nu,a})}{dz} + \frac{dF_\nu^{surface}(\tau_{\nu,a})}{dz} \right) d\nu$$

この E_{total} が 0 になったとき、放射平衡に達したといえる.

F_ν^\downarrow の微分は以下のように変形できる.

$$\begin{aligned}
 \frac{dF_\nu^\downarrow}{dz} &= \frac{d}{dz} \left(-2\pi \int_0^{\tau_{\nu,a}} B_\nu(t) E_2(\tau_{\nu,a} - t) dt \right) \\
 &= -2\pi \frac{d}{dz} \left(\int_0^{\tau_{\nu,a}} B_\nu(t) E_2(\tau_{\nu,a} - t) dt \right) \\
 &= -2\pi \frac{d\tau}{dz} \frac{d}{d\tau} \left(\int_0^{\tau_{\nu,a}} B_\nu(t) E_2(\tau_{\nu,a} - t) dt \right) \tag{B.9}
 \end{aligned}$$

ここで以下の公式を用いる.

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t)g(x-t)dt = f(x)g(0) + \int_0^x f(t) \frac{d}{dx} g(x-t)dt \tag{B.10}$$

この公式を用いて (B.9) を変換すると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{dF_\nu^\downarrow}{dz} &= -2\pi \frac{d\tau}{dz} \frac{d}{d\tau} \left(\int_0^{\tau_{\nu,a}} B_\nu(t) E_2(\tau_{\nu,a} - t) dt \right) \\
&= -2\pi \frac{d\tau}{dz} \left(B_\nu(\tau_\nu) E_2(0) + \int_0^{\tau_{\nu,a}} B_\nu(t) \frac{d}{d\tau} (E_2(\tau_{\nu,a} - t)) dt \right) \\
&= -2\pi \frac{d\tau}{dz} \left(B_\nu(\tau_\nu) E_2(0) + \int_0^{\tau_{\nu,a}} B_\nu(t) (-E_1(\tau_{\nu,a} - t)) dt \right) \\
&= -2\pi \frac{d\tau}{dz} \left(B_\nu(\tau_\nu) E_2(0) - \int_0^{\tau_{\nu,a}} B_\nu(t) E_1(\tau_{\nu,a} - t) dt \right)
\end{aligned}$$

ここで $E_2(0) = 1$ ^{*5} より、以下の形となる。

$$\frac{dF_\nu^\downarrow}{dz} = -2\pi \frac{d\tau}{dz} \left(B_\nu(\tau_\nu) - \int_0^{\tau_{\nu,a}} B_\nu(t) E_1(\tau_{\nu,a} - t) dt \right)$$

F_ν^\uparrow の微分は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\frac{dF_\nu^\uparrow}{dz} &= \frac{d}{dz} \left(2\pi \int_{\tau_{\nu,a}}^{\tau_{max}} B_\nu(t) E_2(t - \tau_{\nu,a}) dt \right) \\
&= 2\pi \frac{d\tau}{dz} \frac{d}{d\tau} \left(\int_{\tau_{\nu,a}}^{\tau_{max}} B_\nu(t) E_2(t - \tau_{\nu,a}) dt \right)
\end{aligned}$$

ここで以下の公式を用いる。

$$\frac{d}{dx} \int_x^A f(t) g(t-x) dt = f(x) g(0) + \int_x^A f(t) \frac{d}{dx} g(t-x) dt$$

この公式を用いて変形すると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{dF_\nu^\uparrow(\tau_\nu)}{dz} &= 2\pi \frac{d\tau}{dz} \left(B_\nu(\tau_{max}) E_2(0) - \int_{\tau_{\nu,a}}^{\tau_{max}} B_\nu(t) \frac{d}{d\tau} E_2(t - \tau_{\nu,a}) dt \right) \\
&= 2\pi \frac{d\tau_\nu}{dz} \left(B_\nu(\tau_\nu) - \int_{\tau_\nu}^{\tau_{\nu,max}} E_1(t - \tau_\nu) dt \right)
\end{aligned}$$

F_ν^s の微分は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\frac{dF_\nu^s}{dz} &= \frac{d}{dz} (2\pi B_\nu(\tau_{max}) E_3(\tau_{max} - \tau_{\nu,a})) \\
&= 2\pi B_\nu(\tau_{max}) \frac{d\tau}{dz} \frac{d}{d\tau} (E_3(\tau_{max} - \tau_{\nu,a})) \\
&= 2\pi B_\nu(\tau_{max}) \frac{d\tau}{dz} E_2(\tau_{max} - \tau_{\nu,a})
\end{aligned}$$

^{*5}計算は以下の通り。

$$\begin{aligned}
E_2(0) &= \int_1^\infty \frac{\exp(-0\omega)}{\omega^2} d\omega \\
&= \int_1^\infty \omega^{-2} d\omega \\
&= 1
\end{aligned}$$

B.4 フラックスおよびエネルギー収支の離散化

前節までで求めたフラックスおよびエネルギー収支を、計算機で扱えるよう離散化する。具体的には、各式にある積分を適切な形の総和に置き換える。フラックスは以下のようになる。

$$\begin{aligned}
F_{\nu}^{\downarrow}(n) &= -2\pi \int_0^{\tau_{\nu,a}} B_{\nu}(t) E_2(\tau_{\nu,a} - t) dt \\
&\approx -2\pi \sum_{i=1}^n B(T_{i,i-1}^-) \left(\int_{\tau_{\nu,i-1}}^{\tau_{\nu,i}} E_2(\tau_{\nu} - t) dt \right) \\
&= -2\pi \sum_1^n B(T_{i,i-1}^-) (E_3(\tau_{\nu} - \tau_{\nu,i}) - E_3(\tau_{\nu} - \tau_{\nu,i-1})) \\
F_{\nu}^{\uparrow}(n) &= 2\pi \int_{\tau_{\nu,a}}^{\tau_{\nu,max}} B_{\nu}(t) E_2(t - \tau_{\nu,a}) dt \\
&\approx 2\pi \sum_{i=n}^{n_{max}} B(T_{i,i-1}^-) \left(\int_{\tau_{\nu,i-1}}^{\tau_{\nu,i}} E_2(t - \tau_{\nu,a}) dt \right) \\
&= 2\pi \sum_{i=n}^{n_{max}} B(T_{i,i-1}^-) (E_3(\tau_{\nu,i-1} - \tau_{\nu}) - E_3(\tau_{\nu,i} - \tau_{\nu}))
\end{aligned}$$

$F_{\nu}^s(n)$ は積分が含まれないためそのまま計算する。エネルギー収支は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{dF_{\nu}^{\downarrow}}{dz} &= -2\pi \frac{d\tau}{dz} \left(B_{\nu}(\tau_{\nu}) - \int_0^{\tau_{\nu,a}} B_{\nu}(t) E_1(\tau_{\nu,a} - t) dt \right) \\
&\approx -2\pi \frac{d\tau}{dz} \left(B_{\nu}(\tau_{\nu}) - \sum_{i=1}^n B(T_{i,i-1}^-) \left(\int_{\tau_{\nu,i-1}}^{\tau_{\nu,i}} E_1(\tau_{\nu} - t) dt \right) \right) \\
&= -2\pi \frac{d\tau}{dz} \sum_{i=1}^n B(T_{i,i-1}^-) (E_2(\tau_{\nu} - \tau_{\nu,i}) - E_2(\tau_{\nu} - \tau_{\nu,i-1})) \\
\frac{dF_{\nu}^{\uparrow}(\tau_{\nu})}{dz} &= 2\pi \frac{d\tau_{\nu}}{dz} \left(B_{\nu}(\tau_{\nu}) - \int_{\tau_{\nu}}^{\tau_{\nu,max}} E_1(t - \tau_{\nu}) dt \right) \\
&\approx 2\pi \sum_{i=n}^{n_{max}} B(T_{i,i-1}^-) \left(\int_{\tau_{\nu,i-1}}^{\tau_{\nu,i}} E_1(t - \tau_{\nu,a}) dt \right) \\
&= 2\pi \sum_{i=n}^{n_{max}} B(T_{i,i-1}^-) (E_2(\tau_{\nu,i-1} - \tau_{\nu}) - E_2(\tau_{\nu,i} - \tau_{\nu}))
\end{aligned}$$

$\frac{dF_{\nu}^s}{dz}$ は積分が含まれないためそのまま計算する。以上で得られた離散化式には、まだ指数積分の中に天頂角積分が含まれているため完全ではない。この指数積分については既知の近似式を用いて計算する。詳細は次節で述べる。

B.5 指数積分の近似式を用いた天頂角積分計算

フラックスおよびエネルギー収支の計算において、立体角積分のうち天頂角方向については指数積分を用いた。

指数積分は以下の式で定義される。

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{\exp(-x\omega)}{\omega^n} d\omega$$

本モデルで用いているのは $n = 1, 2, 3$ の場合である。 x としては光学的深さ τ の関数がいわれている。しばしば τ の積分と共にあらわれるが、積分順序の入れ替えで計算できることが多い。

指数積分の数値計算に当たっては近似式を用いている。

指数積分は積分指数関数の特別な場合である。積分指数関数は以下で定義される (岩波公式 1 p154)。

$$Ei(-x) = - \int_x^\infty \frac{\exp(-t)}{t} dt = \int_{-\infty}^{-x} \frac{\exp(t)}{t} dt$$

ただし $0 < x$ 。これを級数展開すると以下ようになる (岩波公式 3 p24)

$$Ei(-x) = \gamma + \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!n}$$

積分指数関数と指数積分は以下の関係を持つ。

$$Ei(-x) = -E_1(x)$$

また、指数積分には以下の性質がある。

$$nE_{n+1}(x) = \exp(-x) - xE_n(x)$$

この関係式を基に以下の指数積分が求められる。

$$\begin{aligned} E_1(x) &= -\gamma - \log x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!n} \\ E_2(x) &= \exp(-x) + \gamma x + x \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!n} \\ E_3(x) &= \frac{1}{2} \left((1-x) \exp(-x) - \gamma x^2 - x^2 \log x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n!n} \right) \end{aligned}$$

ただし $1 \leq x < \infty$ の場合は以下の近似式が用いられる (岩波公式 3 p80)。

$$-x \exp(x) Ei(-x) = \frac{0.250621 + 2.334733x + x^2}{1.681534 + 3.330657x + x^2}$$

ただし誤差は $5.0e-5$ である. ここから近似式を求めると以下ようになる.

$$\begin{aligned} E_1(x) &= \frac{0.250621 + 2.334733x + x^2}{1.681534 + 3.330657x + x^2} \frac{1}{x \exp(x)} \\ E_2(x) &= \frac{1.430913 + 0.995924x}{1.681534 + 3.330657x + x^2} \exp(-x) \\ E_3(x) &= \frac{1}{2} \frac{1.681534 + 1.899744x + 0.004076x^2}{1.681534 + 3.330657x + x^2} \exp(-x) \end{aligned}$$

モデル中の数値計算では以上の近似式を条件に応じて用いている. 級数展開は $n = 10$ としている.

B.6 下部境界における拡散近似

下部境界におけるフラックスは, それより下にある層からのフラックスによるものとして考える. F_ν^\uparrow の式を下部境界より下の層について適用すると以下のような形になる.

$$F_\nu^\uparrow(\tau_{\nu, max}) = 2\pi \int_{\tau_{\nu, max}}^{\tau_{\nu, \infty}} B_\nu(t) E_2(t - \tau_{\nu, max}) dt$$

ここで, 積分内にあるプランク関数を $\tau_{\nu, max}$ まわりでテイラー展開する. このとき, 十分下方にある層のフラックスは光学的厚さに阻まれて下部境界まで到達できないことを考慮し, 一次の項未満を切り捨てるものとする. この操作によって以下の形となる.

$$F_\nu^\uparrow(\tau_{\nu, max}) = 2\pi \int_{\tau_{\nu, max}}^{\tau_{\nu, \infty}} \left(B_\nu(\tau_{\nu, max}) + \frac{dB_\nu}{d\tau} \Big|_{\tau_{\nu, max}} (t - \tau_{\nu, max}) \right) E_2(t - \tau_{\nu, max}) dt$$

第一項は以下のように計算できる.

$$\begin{aligned} & 2 \pi \int_{\tau_{\nu, max}}^{\tau_{\nu, \infty}} B_\nu(\tau_{\nu, max}) E_2(t - \tau_{\nu, max}) dt \\ &= 2 \pi B_\nu(\tau_{\nu, max}) \int_{\tau_{\nu, max}}^{\tau_{\nu, \infty}} E_2(t - \tau_{\nu, max}) dt \\ &= 2 \pi B_\nu(\tau_{\nu, max}) \int_1^\infty \int_{\tau_{\nu, max}}^{\tau_{\nu, \infty}} \frac{\exp(-\omega(t - \tau_{\nu, max}))}{\omega^2} dt d\omega \\ &= 2 \pi B_\nu(\tau_{\nu, max}) \int_1^\infty \left(-\frac{\exp(-\omega(\tau_{\nu, \infty} - \tau_{\nu, max}))}{\omega^3} + \frac{1}{\omega^3} \right) d\omega \\ &= 2 \pi B_\nu(\tau_{\nu, max}) \left(-E_3(\tau_{\nu, \infty} - \tau_{\nu, max}) + \frac{1}{2} \right) \\ &= -2 \pi B_\nu(\tau_{\nu, max}) E_3(\tau_{\nu, \infty} - \tau_{\nu, max}) + \pi B_\nu(\tau_{\nu, max}) \\ &= \pi B_\nu(\tau_{\nu, max}) \end{aligned}$$

ただし $E_3(\tau_{\nu,\infty} - \tau_{\nu,max}) = 0$ である。第二項については以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
 & 2 \pi \int_{\tau_{\nu,max}}^{\tau_{\nu,\infty}} \left(\frac{dB_\nu}{d\tau} \Big|_{\tau_{\nu,max}} (t - \tau_{\nu,max}) \right) E_2(t - \tau_{\nu,max}) dt \\
 = & 2 \pi \frac{dB_\nu}{d\tau} \Big|_{\tau_{\nu,max}} \int_{\tau_{\nu,max}}^{\tau_{\nu,\infty}} (t - \tau_{\nu,max}) E_2(t - \tau_{\nu,max}) dt \\
 = & 2 \pi \left(\frac{dB}{dT} \frac{dT}{dP} \frac{dP}{d\tau} \right)_{\tau_{\nu,max}} \int_{\tau_{\nu,max}}^{\tau_{\nu,\infty}} (t - \tau_{\nu,max}) E_2(t - \tau_{\nu,max}) dt \\
 = & 2 \pi \left(\frac{dB}{dT} \frac{dT}{dP} \frac{dP}{d\tau} \right)_{\tau_{\nu,max}} (-E_2(\tau_{\nu,\infty} - \tau_{\nu,max}) + 1) \\
 = & 2 \pi \left(\frac{dB}{dT} \frac{dT}{dP} \frac{dP}{d\tau} \right)_{\tau_{\nu,max}}
 \end{aligned}$$

ただし $E_2(\tau_{\nu,\infty} - \tau_{\nu,max}) = 0$ である。以上より、下部境界におけるフラックス $F_\nu^\uparrow(\tau_{\nu,max})$ は以下の様に見える。

$$F_\nu^\uparrow(\tau_{\nu,max}) = \pi B_\nu(\tau_{\nu,max}) + 2\pi \left(\frac{dB}{dT} \frac{dT}{dP} \frac{dP}{d\tau} \right)_{\tau_{\nu,max}}$$

第二項の微分群についてはそれぞれ以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
 \frac{dB}{dT} &= \frac{d}{dT} \frac{2hc(100n)^3}{\exp\left(\frac{hc(100n)}{kT}\right) - 1} \\
 &= 2hc(100n)^3 \frac{d}{dT} \left(\exp\left(\frac{hc(100n)}{kT}\right) - 1 \right)^{-1} \\
 &= 2hc(100n)^3 \left(- \left(\exp\left(\frac{hc(100n)}{kT}\right) - 1 \right)^{-2} \right) \left(-\frac{hc(100n)}{kT^2} \exp\left(\frac{hc(100n)}{kT}\right) T^{-1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\frac{dT}{dP} = \frac{T_0 - T_{max-1}}{P_{max} - P_{max-1}}$$

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{P_0 - P_{max-1}}{\tau_{max} - \tau_{max-1}}$$