

量子論に基づく山の高度と恒星の質量 のオーダーエスティメイト

北海道大学理学部地球惑星科学科
惑星宇宙グループ
倉本研究室 4年

02112026

寺尾 恭範

指導教員 倉本 圭

2015/02/02

要旨

本論文では Weisskopf (1975) のレビューを行い、電子のようなミクロスケールの物質を記述する量子論の考え方をを用いることで、山の高さの上限や恒星の質量に対する制限が見積もられることを示す。

電子が有限領域に束縛されているとき、粒子と波の二重性についてのド・ブロイの関係から、電子の波長には上限があることがわかる。波長と運動エネルギーの関係から電子は完全に静止することはできず、束縛領域を広ようとするシュレディンガー圧力を及ぼす。電子・陽子間のクーロン力とシュレディンガー圧力の釣り合いを考えることにより、水素原子の半径と束縛エネルギーが見積もられる。

山の高さの上限は重力によるエネルギーと塑性流動に必要なエネルギーの関係から決められる。重力加速度や地球半径を原子に関する物理量で表わすことにより、山の高さの上限をミクロなスケールでの相互作用の結果として理解することができる。

恒星の質量に対する制限は、陽子数の下限と上限を決めることにより与えられる。これを考える際には、シュレディンガー圧力と共にビリアル定理が用いられる。重力による圧縮で恒星の半径が小さくなると、シュレディンガー圧力が増大してやがて圧縮はとまる。そのときの恒星の温度が核反応に必要な温度を上回るという条件により、陽子数の下限が決まる。上限を見積もる際には、放射のエネルギーとビリアル定理の拡張を考えることが必要である。束縛系である恒星の全エネルギーは負でなければならないという要請から、放射のエネルギーと運動エネルギーの比に対しての条件が与えられ、これを用いて陽子数の上限が決まる。

量子論に基づく考え方は様々なスケールの物理を考える際に有用である。しかしこれらは近似を多く含んだ定性的な理解であり、厳密な定量的計算が重要となる場合もあることを忘れてはならない。

目次

第 1 章	はじめに	2
第 2 章	量子論の基礎	3
2.1	ド・ブロイの関係	3
2.2	束縛された粒子のシュレディンガー圧力	3
2.3	粒子が複数存在するときのシュレディンガー圧力	4
2.4	ボーア半径とリュードベリ単位	4
第 3 章	山の高さの上限	6
3.1	山が達し得る高さ	6
3.2	H の決め方	6
3.3	a_0 を用いた H の表現	7
第 4 章	恒星の質量	9
4.1	恒星内の陽子数 N^*	9
4.2	ビリアル定理と恒星の比熱	9
4.3	最高到達温度と N^* の下限	10
4.4	放射のエネルギーと N^* の上限	12
第 5 章	まとめ	14

謝辞	15
参考文献	16
付録 A Weisskopf (1975) 全訳	17
付録 B 式の導出	36
B.1 シュレディンガー圧力	36
B.2 ビリアル定理	38
B.3 表面張力波の分散関係	40
B.4 N_0	42

第1章 はじめに

本論文は量子論の基礎を学び，陽子や電子といったミクروسケールの物質が持つ性質を基にして様々なスケールの物理について定性的に理解することを目的とする．具体的には Weisskopf (1975) の内容をレビューし，束縛された電子が及ぼす圧力を考えることで，水素原子の半径や恒星の質量に対する制限など，大きく異なるスケールの物理について説明できることを見ていく．量子論的な考え方を学ぶことにより，物理に対する新たな視点を得ることができ，今後の研究活動の土台作りに有益であると考えます．

本論文は5つの章から構成される．続く第2章では，量子論の基本原理であるド・ブロイの関係から導かれる電子の運動エネルギーと圧力について説明し，それをを用いて水素原子の半径とエネルギーを決定する．第3章では地球上の山が達し得る最大の高さを決定する方法を述べ，水素原子の半径を用いてそれを表わすことを試みる．第4章では，電子の圧力やビリアル定理を考えることによって恒星に含まれる陽子数の条件を定め，恒星の質量を制限できることを示す．第5章には全体のまとめを記す．また，付録として Weisskopf (1975) の全訳と，いくつかの重要であり自らの理解を深めるのに役立つと思われる式の導出を掲載した．

本論文では主に6つの物理量 M, m, e, c, G, h を用いる．これらは順に陽子の質量，電子の質量と電荷，光速，万有引力定数，プランク定数である．

第2章 量子論の基礎

2.1 ド・ブロイの関係

この章では、量子論の考え方から導かれる、粒子のもつ運動エネルギーや圧力について説明する。量子論の出発点となる重要な原理は、粒子と波の二重性である。ド・ブロイの関係により、粒子の運動量 p と波長 λ が結び付き、エネルギー E と振動数 ν が結び付く。

$$p = \frac{h}{\lambda}, E = h\nu \quad (1)$$

2.2 束縛された粒子のシュレディンガー圧力

電子が有限の領域に束縛されているとき、その波長は束縛領域の寸法を超えることはできない。波長の最大値が決まると、式 (1) から運動量の最小値が決まる。したがって運動エネルギー $p^2/2m$ の最小値が

$$K_0 \sim \frac{h^2}{2mR^2} \quad (2)$$

と決まる。ここで R は束縛領域の特徴的な長さである。運動エネルギーの最小値が 0 より大きいので、束縛された電子は完全に静止することはできない。運動している電子は、束縛領域に対してその領域を広げようとする圧力を及ぼす。束縛領域が広がると運動エネルギーが小さくなり、より安定となるからである。この圧力は束縛された粒子のシュレディンガー方程式から導かれるので、“シュレディンガー圧力”と呼ぶことにし、 P_S で表わす。圧力はエネルギーを体積で微分して符号を変えたものであるから、

$$P_S \sim \frac{h^2}{mR^5} \quad (3)$$

となる。

2.3 粒子が複数存在するときのシュレディンガー圧力

同種の粒子が体積 V の内部に束縛されているとする。このとき束縛領域の特徴的長さは $V^{1/3}$ のオーダーであるが、粒子の波長の最大値はそれよりも小さい。これは、同種の粒子 (フェルミ粒子) は同一の量子状態を占めることができないという、パウリの原理に由来する。実際にそれぞれの粒子が占めることのできる束縛領域は V/N である。ゆえに最小の運動エネルギーは式 (2) で与えられる一粒子のそれよりも大きく、

$$K_0 \sim \frac{h^2}{2md^2}, d = \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \quad (4)$$

となる。したがってシュレディンガー圧力も一粒子の場合とは異なり、

$$P_S \sim \frac{h^2}{m} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3} \quad (5)$$

となる。(スピンを考慮したシュレディンガー圧力の正確な表式は付録 B.1 を参照)

2.4 ボーア半径とリュードベリ単位

シュレディンガー圧力の考え方をを用いて、水素原子の半径と束縛エネルギーを見積もることができる。最も単純な原子である水素の半径と束縛エネルギーが得られれば、それらを使って他の原子の半径と結合エネルギーを表わすことができる。

いま、一つの電子が陽子とのクーロン力によって束縛されている。クーロン力は電子を陽子に近づけようとするが、シュレディンガー圧力は束縛領域を広げるために電子を陽子から遠ざけようとする。これらの相反する力が釣り合っている状態が、水素原子の安定な状態として存在する。最も低い状態の全エネルギーの表式は、式 (2) で表わされる運動エネルギーの最小値を用いて

$$E = -\frac{e^2}{r} + \frac{h^2}{2mr^2} \quad (6)$$

に従う。ここで、電荷 e の次元は誘電率が式に現れないようなものを用いている。このエネルギーが最小のときに安定、つまりクーロン力とシュレディンガー圧力が釣り合っている。式 (6) を r で微分すると

$$\frac{dE}{dr} = \frac{e^2}{r^2} - \frac{h^2}{mr^3} \quad (7)$$

$dE/dr = 0$ とおくと E が最小となるときの原子半径が得られる。この半径をボーア半径と呼び、 a_0 で表わす。

$$r = \frac{h^2}{me^2} \equiv a_0 \quad (8)$$

よってエネルギーの最小値は

$$E = -\frac{me^4}{2h^2} \quad (9)$$

となる。水素原子の電子と陽子を分離するために必要なエネルギーをリュードベリ単位 R_y と呼ぶことにする。上式より

$$R_y = \frac{me^4}{2h^2} \quad (10)$$

である。これらの値を用いて、他の原子や単純な分子の半径 R と結合エネルギー B の値がスケールできる。

$$R = fa_0 \quad 1 < f < 6 \quad (11)$$

$$B = \gamma R_y \quad 0.1 < \gamma < 0.3 \quad (12)$$

原子や分子の種類により係数の値は異なるが、 R はボーア半径より大きく、 B はリュードベリ単位より小さい。このことは、水素原子が最も単純な構造を持つことと、結合した原子中の電子のエネルギーは水素原子の電子が持つエネルギーよりも大きいことから、直感的に理解できる。

第3章 山の高さの上限

3.1 山が達し得る高さ

山が高くなりすぎると、その基部は質量を支えられなくなり塑性流動を始め、沈み始める。このときの山の高さ H が山が達し得る最大の高さである。

以下では、 H のオーダーをボーア半径 a_0 を用いて表わす。ここでは、山を水平な地面の上で静止している直方体として単純化する。山と地面はともに二酸化ケイ素で構成されていると考える。

3.2 H の決め方

山が高くなると重力による位置エネルギーが大きくなる。山の沈み込みは、それが沈むことによって解放される位置エネルギーと山の基部が塑性流動を起こすのに必要なエネルギーが等しくなる高さで起こる。このエネルギーは岩石の融解エネルギーよりもいくらか小さい程度であるが、簡単のために融解エネルギーと等しいとおく。基部の物質のある量が塑性流動を起こすと、それと同じ分、山が沈み込むと考えられる。したがって分子一つについてのエネルギーの関係式が

$$AMHg = E_1 \quad (1)$$

として得られる。左辺は高さ H での重力による位置エネルギーであり、 g は地球上での重力加速度である。また、 AM は陽子の質量 M に分子量 A を掛けたものであり、分子一つの質量である。二酸化ケイ素の場合、 $A = 60$ である。右辺の E_1 は一分子あたりの融解エネルギーであり結合エネルギー B を用いて $E_1 = \xi B$ と表わされる。無機物の場合 ξ は 0.05 のオーダーであり結合エネルギーよりも小さいが、これは、固体を気体にする際には液体にする時よりも大きなエネルギーが必要であることを思い出せば理解できる。結合エネルギーはリュードベリ単位 R_y を用いて表わせるから

$$E_1 = \xi B = \xi \gamma R_y \quad (2)$$

である。したがって山の達し得る最大の高さ

$$H = \xi \gamma \frac{R_y}{AMg} \quad (3)$$

を得る. $\xi = 0.05, \gamma = 0.2$ とすると, $H \sim 21\text{km}$ である. 塑性流動のために必要なエネルギーと融解エネルギーの差を考慮した実際の値は 10km 程度であり, それと同程度のオーダーの値が得られた.

3.3 a_0 を用いた H の表現

式 (3) には重力加速度 g が含まれているが, これは万有引力定数 G と地球に存在する核子 (陽子と中性子) の数 N_E を用いて表わすことができる.

$$\begin{aligned} N_E M g &= \frac{G(N_E M)^2}{R_E^2} \\ \therefore g &= \frac{G N_E M}{R_E^2} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで R_E は地球の半径である. 地球内部には物質が密に詰まっているので, R_E は地球の典型的な成分の一分子あたりの大きさを用いて表わすことができる. ここでは鉄原子の半径 R により R_E を表わす. 鉄の原子量 A は 55 であるが, これは地球のもう一つの典型的成分である二酸化ケイ素の分子量とほぼ変わらない.

一つの鉄原子には A 個の核子が含まれるので, 地球が全て鉄から成ると考えると, 鉄原子の数は N_E/A である. したがって地球の半径は

$$R_E \sim \left(\frac{N_E}{A}\right)^{1/3} R = \left(\frac{N_E}{A}\right)^{1/3} f a_0 \quad (5)$$

である. ここで $R = f a_0$ であることを用いた.

以上より, H をボーア半径 a_0 を用いて表わすことができる. 式 (3) に式 (4) と式 (5) を代入すると,

$$H = \xi \gamma \frac{R_y}{AM} \frac{R_E^2}{G N_E M} \quad (6)$$

$$\sim \xi \gamma \frac{R_y}{AM} \frac{1}{G N_E M} \left(\frac{N_E}{A}\right)^{2/3} f^2 a_0^2 \quad (7)$$

$$= \xi \gamma f^2 \frac{1}{N_E^{1/3}} \frac{1}{A^{5/3}} \frac{1}{GM^2} \frac{me^4}{2h^2} \frac{h^2}{me^2} a_0 \quad (8)$$

$$\sim \xi \gamma f^2 \frac{e^2}{GM^2} \frac{1}{N_E^{1/3}} \frac{1}{A^{5/3}} a_0 \quad (9)$$

$$\therefore \frac{H}{a_0} \sim \xi \gamma f^2 \frac{e^2}{GM^2} \frac{1}{N_E^{1/3}} \frac{1}{A^{5/3}} \quad (10)$$

この式で $\xi = 0.05, \gamma = 0.2, f = 3$ とすると式 (3) と同じ結果が得られ, そのとき $H/a_0 \sim 4.7 \times 10^{14}$ である. $e^2/GM^2 = 1.24 \times 10^{36}$ であり, これは二つの陽子間のクーロン力と重

力の比である．この比が H の中に現れるのは，山の最大の高さは岩石の剛性と重力の関係によって決まり，岩石の剛性とは電子と原子核の間のクーロン力によるものだからである．こうして，山の高さという大きなスケールの物理量の上限が，原子のような小さなスケールで登場する相互作用や値によって説明できることが示された．

第4章 恒星の質量

4.1 恒星内の陽子数 N^*

この章では、シュレディンガー圧力と重力を考えることにより、恒星の質量の上限と下限が見積もられることを示す。簡単のために、恒星は水素ガスから成る半径 R の球であり、温度 T は十分高く、水素原子はイオン化されていると仮定する。つまり、自由粒子として運動している電子と陽子がそれぞれ N^* 個存在し、それらが重力によって球状に留められている。後に示すように、恒星の総陽子数 N^* は基本的な定数の組み合わせにより得られる無次元量 N_0 と数因子 s を用いて以下のようにスケールできる (N_0 の導出は付録 B.4)。

$$N^* = sN_0, N_0 = \left(\frac{hc}{GM^2} \right)^{3/2} = 2.21 \times 10^{57} \quad (1)$$

4.2 ビリアル定理と恒星の比熱

温度と重力の効果を結び付けるために、ビリアル定理を用いる。今回の場合ポテンシャルは重力によるものであるから、ビリアル定理は下の形になり、運動エネルギー (E_K) とポテンシャルエネルギー (E_P) を結び付ける。

$$E_K = 1/2|E_P| \quad (\text{ビリアル定理}) \quad (2)$$

電子と陽子の運動エネルギーは熱運動によるものであり、粒子一つにつき $(3/2)kT$ である (k はボルツマン定数)。よって全運動エネルギーは $3N^*kT$ である。また、距離 r だけ離れた質量 M の二つの物体の重力によるポテンシャルエネルギーは $-GM^2/r$ である。重力のポテンシャルエネルギーは常に負であり、質量をもつ物体が密集するとポテンシャルエネルギーは減少する。いま、恒星内部のある陽子に注目すると、他の陽子との距離は様々であるが、平均すると恒星の半径 R のオーダーである。したがって、ポテンシャルエネルギーのオーダーは $-GM^2N^{*2}/R$ であり、ビリアル定理は

$$3N^*kT \sim 1/2 \frac{GM^2N^{*2}}{R} \quad (3)$$

となる。ここで、質量が陽子に比べて非常に小さいために、電子のポテンシャルエネルギーは無視した。

この式から何がわかるだろうか. 式 (2) によると, 恒星の全エネルギー E は運動エネルギーの符号を逆にしたものに等しい.

$$\begin{aligned}
 E &= E_K + E_P \\
 &= E_K - 2E_K \\
 &= -E_K \\
 &= -3N^*kT \sim -1/2 \frac{GM^2N^{*2}}{R}
 \end{aligned} \tag{4}$$

二行目への変形でビリアル定理を用いた. 恒星が高温になると, 宇宙空間への放射によってエネルギーを失うので, 全エネルギーは小さくなるはずである. 式 (4) によれば, エネルギーが減少すると温度は上昇し, 恒星の半径は減少, つまり圧縮される. したがって星の比熱は負である (エネルギーを温度で微分したものが比熱).

半径 R を, 恒星内部での隣接した陽子 (電子) 間の平均距離 d を用いて表わすことにより, 式 (3) をより扱いやすい形に変形する. 恒星内部においてそれぞれの陽子 (あるいは電子) が占める体積はのオーダーは, $V \sim R^3/N^*$ であるから,

$$d = V^{1/3} \sim R/(N^*)^{1/3} \tag{5}$$

である. そして, 式 (4) を N^* で割ると

$$3kT \sim 1/2 \frac{GM^2(N^*)^{2/3}}{d}$$

であるが, 右辺は式 (1) の N_0 を用いることで簡単にすることができる.

$$\begin{aligned}
 1/2 \frac{GM^2(N^*)^{2/3}}{d} &= 1/2 \frac{GM^2}{hc} (N^*)^{2/3} \frac{hc}{d} \\
 &= 1/2 \left(\frac{N^*}{N_0} \right)^{2/3} \frac{hc}{d}
 \end{aligned} \tag{6}$$

したがって,

$$kT = f \left(\frac{N^*}{N_0} \right)^{2/3} \frac{hc}{d} \tag{7}$$

となる. ただし, f は大雑把な近似で 1 のオーダーの定数であり, 以後省略する.

4.3 最高到達温度と N^* の下限

先に述べたように, 恒星は放射によってエネルギーを失う. これにより温度 T は上昇し, 半径 R は減少, したがって距離 d も減少する. しかし, 温度の上昇には限界がある. 恒星がある温度に達すると, 核反応が起き水素がヘリウムに変化する. このときの温度を T_{ig}

とする。核反応は放射によって失われたエネルギーを補うので、全エネルギーはそれ以上減少しない。恒星の比熱は負であるから、核反応が起こると温度は上昇しなくなる。核反応によるエネルギー生成が大きくなりすぎると恒星は膨張し、温度が減少して核反応の勢いが弱まる。そしてまた放射によってエネルギーが失われ、恒星は圧縮されて温度が高くなり再び核反応が起こる。

恒星の質量の下限を決めるには恒星内の電子のシュレディンガー圧力も関係する。電子間距離 d が小さくなると、シュレディンガー圧力は大きくなり、やがて恒星を圧縮しようとする重力的な引力と等しくなる。そして圧縮が止まり、温度の上昇も止まる。ここで、シュレディンガー圧力は粒子の質量に反比例するために、陽子のシュレディンガー圧力は電子のそれに比べて非常に小さく無視できる。

電子間距離 d の減少に伴って増加する電子の運動エネルギーは、恒星が収縮するときに得られる重力エネルギーによって供給される。このとき、電子の運動エネルギーの最小値は $1/d^2$ の関数として増加するが、収縮によって得られる重力エネルギーは $1/d$ の関数として増加する。したがってある瞬間から、収縮による重力エネルギーの減少よりも電子の運動エネルギーの最小値の増加の方が大きくなる。ゆえに、たとえ核反応が起こらなくとも、陽子一個当たりの重力エネルギーが電子の運動エネルギーの最小値と同じオーダーとなったときに、収縮と温度上昇は止まる。恒星内部の電子と陽子それぞれ一つ当たりの運動エネルギーは共に等しく kT で表わすことができ、ビリアル定理よりこれは陽子一個当たりの重力エネルギーにほぼ等しい。したがって、収縮が止まる電子間距離を d_{stop} とすると、その条件は

$$\left(\frac{N^*}{N_0}\right)^{2/3} \frac{hc}{d_{\text{stop}}} \sim \frac{h^2}{2m(d_{\text{stop}})^2} \quad (8)$$

あるいは

$$\frac{1}{d_{\text{stop}}} \sim \left(\frac{N^*}{N_0}\right)^{2/3} \frac{mc}{h} \quad (9)$$

である。この式では因子 2 を省略した。

電子のシュレディンガー圧力によって収縮が止まった時に恒星が達し得る温度の最大値 T_{max} は式 (7) によって与えられ、 d と T が関連付けられる。

$$kT_{\text{max}} \sim \left(\frac{N^*}{N_0}\right)^{2/3} \frac{hc}{d_{\text{stop}}} \sim \left(\frac{N^*}{N_0}\right)^{4/3} mc^2 \quad (10)$$

恒星内の陽子数 N^* の最小値を決める。恒星が安定して存在するためには、内部での核反応によって放射によるエネルギーの減少を補わなければならない。したがって N^* の最小値は、最高到達温度が T_{ig} (核反応が起こる温度) よりも高くなるものでなければならない。 T_{ig} は、陽子の運動エネルギー ϵ が十分大きく、二つの陽子が衝突する際の静電的な反発を越えて合体することのできる温度である。その運動エネルギー ϵ は

$$\epsilon \sim \frac{\pi^2}{2} \frac{Me^4}{h^2} = 123,000 \text{ ev} \quad (11)$$

である。これに到達するために必要な温度 T_{ig} は

$$kT_{\text{ig}} = \eta\epsilon \quad (12)$$

を満たす。ここで η は数因子であり、1 より小さい。これは、マクスウェル分布が kT よりも大きなエネルギーの粒子を含むこと、量子力学的なトンネル効果が存在することにより、運動エネルギーが ϵ に達していなくとも核反応が起こる場合が存在することに由来する。 T_{max} は T_{ig} よりも大きくなければならず、式 (10) より

$$\frac{N^*}{N_0} > \left(\frac{\eta\epsilon}{mc^2}\right)^{3/4} = \left(\frac{\pi^2 M e^4}{2 m h^2 c^2 \eta}\right)^{3/4} \quad (13)$$

となる。恒星内の陽子数は N_0 の $0.58\eta^{3/4}$ 倍よりは大きくなければならない。より詳しい恒星モデルによれば実際の下限は $0.1N_0$ である。

4.4 放射のエネルギーと N^* の上限

次に、 N^* の上限を求める。仮に N^* が際限なく増加できるとすると、恒星は非常に重く熱くなり、それに伴う放射の圧力によって不安定になってしまう。 N^* の上限を決めるために、下限を決めた際の考え方を二つの点で拡張する。

第一に、恒星内部の陽子と電子の運動エネルギーに加えて、熱放射のエネルギーを式に加える。後に、このエネルギーは N^*/N_0 が 1 よりも小さいか同程度であれば重大な寄与をもたらさないことがわかる。ゆえに下限を考えるときにはこれを無視した。

第二に、式 (2) の形のビリアル定理は、粒子が相対論的、すなわち光速に近い速さで運動するときには次のように拡張されなければならない。

$$E_K = \Lambda|E_P| \quad (14)$$

ここで Λ は 1/2 と 1 の間にある。恒星がその形を保つためには、全エネルギーが負でなければならない。ポテンシャルエネルギーは負であるから、恒星の安定条件は次のようになる。

$$E_r + 3N^*kT \sim \Lambda \frac{GM^2(N^*)^2}{R} \quad (15)$$

E_r は放射のエネルギーであり、これが運動エネルギーに比べて大きすぎると恒星は安定に存在できない。

E_r はステファン・ボルツマンの法則から決定できる。この法則によると、ある温度 T における放射のエネルギー密度 u は

$$u = \sigma(kT)^4, \quad \sigma = f \frac{1}{h^3 c^3} \quad (16)$$

で与えられる．この関係式はプランクの輻射式を振動数で積分することで得られる．放射のエネルギー E_r はエネルギー密度に恒星の体積を掛けたものであり，

$$E_r = f \frac{(kT)^4}{h^3 c^3} \frac{4\pi}{3} R^3 \quad (17)$$

である．これが陽子と電子の運動エネルギー $3N^*kT$ に比べて大きくなりすぎてはいけないので，

$$\frac{E_r}{3N^*kT} \sim \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \frac{R^3}{N^*} = \left(\frac{kT}{hc/d}\right)^3 = \text{“1 に比べて大きすぎない定数”} \quad (18)$$

ただし，定数は省いた．

式(15)に式(17)を代入し， N^* で割って N_0, d を用いて表わすと

$$(kT)^4 \left(\frac{d}{hc}\right)^3 + kT \sim \left(\frac{N^*}{N_0}\right)^{2/3} \frac{hc}{d} \quad (19)$$

となる．ここで，数因子は1と等しいとおいた．

$$x = \frac{kT}{hc/d} \quad (20)$$

とすると式(19)は

$$x^4 + x \sim \left(\frac{N^*}{N_0}\right)^{2/3} \quad (21)$$

と等価である．式(15)によると， x^3 は1に比べて大きくなりすぎてはいけない．このことから， $x^4 + x$ も1を大きく超えないはずであり，式(21)から $(N^*/N_0)^{2/3}$ も同様である．これが N^* の条件であり，恒星は N^* が N_0 よりも大きすぎない限りは安定に存在できると結論される．詳しい恒星のモデルから求められている上限は $60N_0$ である．

以上のように，恒星内の陽子数 N^* は，恒星が放射によって吹き飛ばすことのない程度には小さくなくてはならず，核反応が起こる程度には大きくなければならない．この上限と下限が，基本的な定数の組み合わせである N_0 とおおよそ同じオーダーであることが示された．より詳しいモデルによるとその制限は

$$0.1N_0 < N^* < 60N_0 \quad (22)$$

である．陽子の質量を $M = 1.67 \times 10^{-27}$ として計算すると，恒星の質量 M_S の制限は

$$3.69 \times 10^{29} \text{kg} < M_S < 2.22 \times 10^{31} \text{kg} \quad (23)$$

となる．太陽の質量は約 $1.99 \times 10^{30} \text{kg}$ であるから，この範囲に収まっている．

第5章 まとめ

量子論の基本原理はド・ブロイの関係で結びつけられる粒子と波の二重性である。電子が有限の領域に束縛されているとき、その束縛領域に応じて波長の上限が定まる。波長と運動エネルギーの関係から、束縛された電子は完全に静止することはできず、束縛領域を広げようとするシュレディンガー圧力を及ぼす。電子が複数存在するときには、パウリの原理により電子が一つの場合よりもシュレディンガー圧力は大きくなる。シュレディンガー圧力と電子・陽子間のクーロン力の釣り合いを考えることにより、最も低いエネルギー状態の水素原子の半径とエネルギーを決定することができる。これらはそれぞれボーア半径、リュードベリ単位と呼ばれ、様々な物理量を表わす際の単位として用いることができる。

山が達し得る最大の高さは、重力による位置エネルギーと塑性流動に必要なエネルギーの関係から求めることができる。重力加速度を地球の核子数で表わし、地球半径を鉄の原子半径で表わすことにより、山の高さの上限をミクロスケールの物理量であるボーア半径を用いて表わすことができる。またこのときの式の形を見ると、山の高さの上限にはクーロン力と重力の比が関係していることが理解できる。

恒星内部の陽子数には制限があり、それによって質量の下限と上限が決まる。ビリアル定理を用いることで、恒星の重要な特徴である負の比熱が示される。陽子数の下限を決める際には、恒星を膨張させようとするシュレディンガー圧力と圧縮しようとする重力の関係が重要である。収縮によって達する最高温度が、核反応を起こすために必要な温度を上回るという条件を課すことにより、下限が決まる。上限を決める際には、高温ゆえに無視できない熱放射のエネルギーと、粒子が光速に近づくために拡張されたビリアル定理を考えることが重要である。恒星がその形を保つためには全エネルギーが負でなければならないので、放射のエネルギーと運動エネルギーの比に対しての条件が決まる。それによって陽子数の上限を定めることができる。

以上が前章までの内容に関するまとめである。電子が及ぼす圧力というミクロのスケールから出発するこの考え方は、山の高さや恒星の質量に限らず様々な物理を考える際に有用なものであろう。しかし注意しなければならないのは、論理展開の途中でしばしば大胆な近似が用いられていることである。それらの近似は、式変形を簡単にし定性的な理解を大きく助けるものである。ただし、問題によって厳密な定量的計算が重要なことを忘れてはならない。

謝辞

本卒業論文を執筆するにあたり，指導教官である倉本圭教授に大変お世話になりました．私がすぐに理解できない物理の内容に関しても粘り強くヒントを下さり，論理的に考える訓練を積むことができました．また，研究が思うように進められずに焦っているときには目指すべき方向性を示していただきました．この場を借りて厚く御礼申し上げます．

グループや研究室の先輩，同期の方々には励ましや労いの言葉を頂き，日常生活でも色々とお世話になりました．合わせて御礼申し上げます．

参考文献

- [1] Victor F. Weisskopf, 1975, Of Atoms, Mountains, and Stars: A Study in Qualitative Physics, *Science*, **187**, 605-612
- [2] 久保亮五編, 1986, 大学演習熱学・統計力学 (第 29 版), 裳華房
- [3] 前野昌弘, 2011, よくわかる量子力学, 東京図書
- [4] ランダウ・リフシッツ, 1970, 流体力学 1, 竹内均訳, 東京図書

付録A Weisskopf (1975) 全訳

今世紀の物理学の重要な成果のひとつは、地球表面で見られる形態での物質の振る舞いや特性について根本的な理解を得たことである。地球の状況の下で起こる物質現象のほとんどすべては、電子と核の間の電気的な引力、大質量物体間の重力的な引力に対する量子力学的な応答として理解できる。したがって、物質の性質を特徴づけるあらゆる物理量は、六つの物理量すなわち M, m, e, c, G , そして h で表現できるはずである。ここで M は陽子の質量、 m と e は電子の質量と電荷、 c は光速、 G はニュートンの万有引力定数であり、 h が作用量子 (1) で、最も重要である。加えて、元素の特性を調べるために原子番号 Z と質量数 A を用いることにする。なぜなら、核の電荷が Ze 、質量が AM で決まるからである。

原子物理の本ではそのような問題が詳細に扱われている。量子力学を用いることで、原子と分子の大きさ、形、エネルギーや、異なる温度における固体、液体、気体の様々な特性、物質による光の放射、吸収、散乱の計算が可能になる。この論文ではこの種の問題をいくつか選んで議論する。そこでは結果のオーダー（概算値）のみを得る準定量的な方法を用いることにする。これによって考察に不可欠な概念を明瞭にし、またこれらの洞察の効力と根本的な単純性を実際に示したい。それは量子がどれだけ深く我々の日常経験に関わっているかを示すだろう。ただし、そのような定性的な議論は決して実際の定量的計算に取って代わることはできないことを認識しておくことは大切である。定性的な議論は定量的な計算を補い、理解を深めるのに役立つ。自然を理解するためには両方のアプローチが必要である。定量的な取り扱いは、関連する全ての要素が考慮されていることを保証するために必要であり、一方で定性的なアプローチはプロセスを支配する不可欠な要因を把握し、自然法則の働きについて直接的な洞察を得るために必要である。

我々の理解の基礎は量子力学である。その基本原理を簡単な方法で定式化することから始めよう。有名な物理学者であるポール・エーレンフェストはかつて自然法則は“単純だが巧妙である”と言った。量子力学は電子、光子、または原子核のような我々の身の回りの基本的な構成要素の波と粒子の二重性に基づく。それは粒子の運動量 p とエネルギー E を波長 λ および振動数 ω と結び付けるド・ブロイの関係に基づく (2)。

$$p = \frac{h}{\lambda}, E = h\omega \quad (1)$$

以下では量子力学の次の三つの基本を用いる。

- 1) 波の運動が空間の有限領域に束縛されている場合、束縛の性質に依存した形と振動数

を持つ定常波のパターンが現れる。例えば、原子核のクーロン場によって束縛されている電子は図 1 に示される一連の波のパターンを見せる。どのような束縛場でもそれが球対称であれば似たような美しいパターンが現れる。単純なパターンほど低い振動数を持ち、ド・ブロイの第二の関係より、低いエネルギーを持つ。これらのパターンが自然の構造の一部として発見されたとき、新たな一面が物理学に加わった。それは我々の自然の基本的構造の説明における特徴的な形状や形態の登場である。物理学は“形態に関する”特質を獲得した。粒子の古典物理学では特定の形状が生ずる理由はないが、量子力学にはこの形態に関する特質が導入され、それは明確に定まった性質を持つ離散的な量子状態と結び付いている。こういうわけで、自然がいたるところで我々に教えてくれること、つまり、我々の世界は結晶から花々に至るまで別個の特徴的な形態と形状で満ちていることを説明するためには量子力学が必要である。

2) もうひとつの性質は粒子の束縛と結び付いている。束縛された波は束縛領域の長さの次元と同等か、より小さい波長を持たなければならない。

最大の波長が最小の運動量と対応するので、束縛された物体（例えば電子）は最低でも最大の波長に対応するものと同程度の大きさの運動エネルギーを持たなければならない。ド・ブロイの第一の関係から、最小の運動エネルギー $p^2/2m$ について次の表現が導かれる。

$$K_0 \sim \frac{h^2}{2mR^2} \quad (2)$$

ここで R は束縛領域の長さのスケールであり、 m は粒子の質量である。このように、束縛された電子は完全に静止することはできない。この効果は、粒子が束縛領域に及ぼす最小の圧力という点からも説明することができる。それは束縛領域を広げようとする圧力である。なぜなら、そのような拡大は運動エネルギーの減少を導くからである。それは力によって束縛された粒子波を記述する有名なシュレディンガー方程式から導かれるので、これを“シュレディンガー圧力” P_S と呼ぶことにする。粒子は、取り得る最も低いエネルギーにあったとしても、束縛されたときに圧力を及ぼすだろう。圧力は、エネルギーの体積に関する導関数の符号を逆にしたものである。ゆえに、係数を省略して

$$P_S \sim \frac{h^2}{mR^5} \quad (3)$$

を得る。

3) 第三の基礎事項はパウリの原理である。我々はそれを従来と異なる次の方法で表現する。もし二個以上 (N 個) の同種の粒子が体積 V の内に束縛されているとすると、それぞれの粒子の最低の運動エネルギーは (2) 式で表わされる一電子のそれではなく、もっと大きい。実際にそれは

$$K_0 \sim \frac{h^2}{2md^2}, d = \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \quad (4)$$

である。長さ d は束縛領域の体積を $1/N$ 倍した体積の長さのスケールである。これが意味するのは、もし複数の同種の粒子が存在すると、それぞれの粒子に対する特徴的な束縛体積は全体の体積ではなく、全体の体積を粒子の数で割ったものであるということである。

それぞれの粒子はそれ自身の“個人的な”体積を持ちそれに束縛されることで最小のエネルギーが決まる。ゆえに、与えられた体積 V に N 個の同種の粒子が束縛されるとき、シュレディンガー圧力は一粒子の場合の N 倍ではなく、 $N^{5/3}$ 倍となる。すなわち、

$$P_S \sim \frac{h^2}{m} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3} \quad (5)$$

電子や陽子のようにスピンを与えられた粒子を扱うとき、“同種の”粒子は同じ向きのスピンを持たねばならない。全て“上向き”あるいは全て“下向き”のスピンを持つ粒子のみが同種として数えられる。ゆえに、反対向きのスピンを持つ一組の粒子は同じ束縛体積に存在することが許される。体積 V に束縛され、それらの最低エネルギー状態にある n 個の自由電子 1 が及ぼすシュレディンガー圧力の正確な表式を書いておくことは役に立つだろう。($n/2$ 個のスピンがアップで、もう $n/2$ 個のスピンがダウン)

$$P_S = 1/5(3\pi^2)^{2/3} \frac{h^2}{m} \left(\frac{n}{V} \right)^{5/3}$$

パウリの偉大な発見を定式化する従来の方法では、以下のような異なる表わし方をする：同種、同スピンの粒子は、一個だけが特定の量子状態を占めることを許されるある。我々の記述が同等であることを示すのは簡単である。もしパウリの原理が効力を持たなかったとすると、全ての電子が最も低い量子状態をとることを許されるだろう。それは全ての原子の基底状態が似ることを意味する。つまり、原子中の電子が全て最も低く単純な量子状態に集まってしまふ。それは全ての原子が本質的に等しい性質を示す、これ以上なくつまらない世界だろう。自然の多様性は排他原理のおかげであるところが大きい。

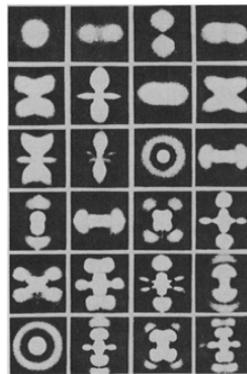


図 1: 球対称場における電子の描像のパターン。これらはモデルの写真である。

原子，分子，そして核の関係

我々の考察を最も単純な原子である水素原子に応用する．いま，一つの電子が陽子の静電引力によって束縛されている．電子波は図 1 の様々なパターンの中のひとつを持つと想定できる．何が最も低いパターンの空間的な広がり（とエネルギー値）を決定するのを見てみよう．静電引力と膨張を起こそうとするシュレディンガー圧力という，相反する二つの効果の間でつり合いが成立している．エネルギーの観点からは，このつり合いは次のように表現される．最も低い状態の全エネルギーは引力のポテンシャルエネルギー $(-e^2/R)$ と運動エネルギー K_0 の和

$$E = -\frac{e^2}{r} + \frac{h^2}{2mr^2} \quad (6)$$

である．このエネルギーが最小であれば，相反する効果がつり合う．運動エネルギーがポテンシャルエネルギーの絶対値 e^2/R の半分のときにエネルギーの最小が達成されることは簡単にわかる．これはよく知られたビリアル定理の一つの例である．この運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの間の比は，引力が $1/R$ に依存し，相対論的効果が無視できるときはいつでも有効である．後で恒星内の重力を扱う際にこの定理を用いるだろう．

このように，(6) 式が最小となるときに電氣的引力とシュレディンガー圧力がつり合っていて，それが起こるのは

$$r = \frac{h^2}{me^2} \equiv a_0, \quad E = -\frac{me^4}{2h^2} \equiv Ry \quad (7)$$

のときである．こうして，我々は原子物理の二つの基本的な量であるボーア半径 a_0 とリュードベリ単位 Ry を決定した．ボーア半径は原子の大きさを与え，リュードベリ単位は電子が陽子に縛られていることによるエネルギーを決定する．水素原子は全ての原子のなかで最も単純なものである．それでもその大きさと束縛エネルギーは全ての原子に特徴的である．これら二つの数値が全ての原子の大きさと束縛エネルギーの値のオーダーを決める．

二つの原子がそれらの大きさと同程度の距離まで接近するとき，続いて起こる電子軌道の変形のために，全エネルギーは距離の関数として変化する．エネルギーがある距離で最小値を取れば結合が形成され，エネルギーが上昇すれば結合は形成されない．前者は特に，外側の電子のスピンの向きが逆向きで，電子の組が共有性の軌道を形成できる場合によく起こる．そのとき電子は両方ともそれぞれの核によって引き付けられ，結果として結合が生じる．

共有性の軌道を形成すること（等極結合）は原子が互いに近づくときにより低い全エネルギーを導く唯一のメカニズムではない．もう一つの単純なメカニズム（イオン結合）は原子の一つが弱く束縛された電子を持ち，他の一つが外来の電子に対して強い親和力を持つときに起こる．この場合原子は近づいたときに電子を交換し，逆符号の電荷を持つイオンが互いに引き合い，結合を形成する．しかし二つの電子雲が同じ体積を占めようとすると，シュレディンガー圧力が増すために，イオンは互いの内部には入り込まない．

原子間の結合を導くメカニズムは他にも多数存在する．全てのケースが，組み合わせされた

電子と核がそれらの電氣的引力や斥力の下で、全ての原子がばらばらに存在した場合の全エネルギーよりも低いエネルギーをもつ共通の量子状態を形成することとして説明できる。

したがってたいていの原子は他の原子と結合し、分子を形成すると期待される。ことに、低温下においては分子や原子は集まって固体や液体になると予想される。これら全てのケースで、隣接する原子間の距離は原子の大きさ a_0 程度になり、結合エネルギーは原子のエネルギー程度になるだろう。しかし、結合エネルギーはリュードベリ単位よりもいくらか小さいと予想される。なぜなら、分子の結合や液体及び固体中の結合は他の原子が隣り合うような新たな状況に対する電子波の調整の現れに過ぎないからである。

我々の原子と分子に関する知識を、原子のイオン化エネルギー I (電子を一個取り去るのに必要なエネルギー)、原子あるいは単純な分子の半径 R 、分子の解離エネルギー D 、そして固体や液体の中の原子あるいは分子の結合エネルギー B に関する四つの準定量的な関係式で表わすことにしよう。これらの関係式はある“補正係数” α, f, β, γ を含み、その値は1のオーダーであり、10を超えることはない。ここではその上限を示す。また、これらの式は非常に単純な原子や分子、または固体にのみ適用できる。有機物中の複雑な化合物にはほとんど適用できない。

$$\begin{aligned}
 I &= \alpha Ry & 1 > \alpha > 1/4 \\
 R &= fa_0 & 6 > f > 1 \\
 D &= \beta Ry & 0.5 > \beta > 0.2 \\
 B &= \gamma Ry & 0.3 > \gamma > 0.1 \text{ (固体)} \\
 & & 0.1 > \gamma > 0.05 \text{ (液体)} & (8)
 \end{aligned}$$

これが、このさき原子、分子、そして固体の物理について理解するために必要なものの全てである。

これらの準定量的考察の威力を示すために、原子ではなく原子核の大きさとエネルギーを見積もる。原子核内では、構成要素の陽子と中性子がクーロン力ではなく核力で結び付いている。図2に距離の関数としての核力ポテンシャルのおおまかな形を示す。ここではスピンと対称性への依存性は無視した。また、図には核力ポテンシャルの引力の部分に最もよく合う静電ポテンシャルも破線で描いた。二つの核子が、少なくともその引力が重要となる主な領域において、まるでそれらが互いに異なる符号の単位電荷の3～3.3倍の電荷 g を持っているかのように引き付け合うことがわかる(電荷の二乗 g^2 が意味を持ち、これは e^2 よりもおよそ10倍大きい)。核が束縛された状態の大きさとエネルギーはこの系に対応するボーア半径とリュードベリ単位におよそ一致するべきである。 e^2 を $g^2 (10e^2)$ で、電子の質量 m を陽子の質量 M で置き換えることにより、核のボーア半径 a_N と核のリュードベリ定数 Ry_N を得る。

$$a_N = \frac{h^2}{Mg^2} = a_0/20,000$$

$$Ry_N = \frac{Mg^4}{h^2} = 200,000Ry$$

実際にこれらは原子核の大きさとエネルギーである．原子核物理についてはこのくらいにする．

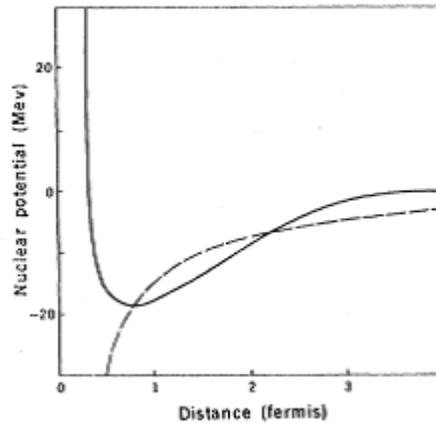


図 2: 二個の核子間の力のポテンシャル．実線はこのポテンシャルのおおまかな形である．正確な値は相対的なスピンの方向と量子状態の対称性に依存する．破線は互いに異なる符号の電子の 3.3 倍の電荷を持つ二粒子間の静電ポテンシャルを示している．

物質の密度と硬度

この知識を用いて，自然について誰もが抱く，なぜそんなに大きいのか，という種類の多くの疑問に答えることができる．山へのハイキングに行くところの種の素朴な疑問が湧いてくる．それらのうちこの論文で答えるものは以下である (3)．

- 1) なぜ岩のかけらはあれほど重いのか．
- 2) なぜ岩やその他の固体はあれほど硬いのか．
- 3) なぜ山はあれほど高いのか．
- 4) なぜ大気を通して固体や液体がはっきりと区別して見えるのか．
- 5) なぜ太陽はあれほど大きいのか．

いま，最初の疑問に目を向ける．金属や岩石のような密な物質の密度とは何だろうか．それは単位体積当たりの質量であり，あるいは原子や分子の質量をそれが占める体積で割ったものである．密な物質内では原子や分子は隣接している．ゆえに，密度 ρ がおおまかに

$$\rho = \frac{AM}{f^3 \frac{4\pi}{3} a_0^3} \quad (9)$$

で与えられる．ここで， A は原子量あるいは分子量， M は陽子の質量であり， a_0 はボーア半径， f は式 (8) 中で定義された因子である．この因子は多少 A に依存し， A が大きくなると原子や分子の半径も大きくなる． $f = 1.5A^{1/5}$ の仮定は良い近似の一つとして用いられる．ただし，この値の周りで大きなゆらぎがあり，そのゆらぎは式に三乗の形で現れる．こうして数値的な結果

$$\rho \sim 0.8A^{2/5} \text{ g/cm}^3$$

を，密な物質の密度の指標として得る．これはおおよそ $1 \sim 10 \text{ g/cm}^3$ の間で変動する．

次は二つ目の疑問である固体の硬さを扱う．無限に硬いものは存在せず，全ての固体は十分な圧力が加われば圧縮される．圧縮に対する抵抗力は“体積弾性率” C と呼ばれ，これは圧力 P と体積の相対的变化 $\Delta V/V$ の比であり， $C = PV/\Delta V$ である．これは圧力の次元を持ち，実際に体積を n パーセント減らすのに C の n パーセントの圧力が必要である．通常の固体の多くは $10^{11} \sim 10^{12} \text{ erg/cm}^3$ の体積弾性率を持ち，これは金属や岩石のかけらの体積をはっきりとわかるくらい減らすためには $10^5 \sim 10^6$ 気圧が必要であることを意味する．この事実についての根本的な何かがあるに違いない．また，基本的な定数を用いてこの数を表現できるべきである．

固体の例として金属を見てみよう．金属は陽イオンの格子から成り，それはボーア半径の数倍の格子距離 d を持つ．この格子内で負の電荷を持つ電子は“電子ガス”としてほとんど自由に動いている．ナトリウムや銅，銀のような単純な金属内ではイオン一つにつき電子一つがガス中にあり，イオンは一つの正電荷を帯びている．いま，電子ガスにシュレディンガー圧力の考え方を適用し，さらに，式 (5a) によると圧力は与えられた体積 V 中の電子の数 n によって決められることを思い出す．原子一つにつき一つの自由電子を持つので，比 n/V は原子の体積の逆数，つまり，一片の金属の全体積を原子の数で割ったものの逆数に等しい．明らかに，原子の体積の三乗根 $d = fa_0$ は原子の大きさのオーダーになるに違いない．銅，銀，ナトリウムについての f の値は 4.29, 4.86, 6.45 である．これらの金属における電子ガスのシュレディンガー圧力は式 (5a) から計算できて， 10^{11} erg/cm^3 の単位で $P_S = 3.8, 2.1, 0.50$ を得る．これらは 10^5 気圧のオーダーである．実際にはこれらの数字は（ナトリウムの場合を除いて）過小評価である．なぜなら，自由電子ガスからの逸脱が，より小さい自由体積を持つことと類似した効果を持つからである．

この巨大な圧力は金属をばらばらにしない．なぜなら，イオンと電子の間の電氣的引力によって相殺されるからである．二つの効果は通常の状態下にある金属ではつり合っている．金属を圧縮するという事は，シュレディンガー圧力に抗する作用を加えるということである．したがって，圧縮に対する抵抗はその圧力のオーダーであると予想される．ゆえに，体積弾性率は上で計算されたシュレディンガー圧力と同じオーダーに違いない (4)．実際，先の三つの金属に対して観測されるバルク係数は 10^{11} erg/cm^3 の単位で 14, 11, 0.65 である．銅や銀の場合，これらの値はシュレディンガー圧力の計算値よりも大きい．これらの元素ではイオンが空間の大部分を占めており，圧縮に抵抗する．さらに，電子ガスの有効体積は原子の体積よりもかなり小さい．これら二つの事情が圧縮に対する抵抗力を強める．ナトリウムにおいては，自由電子ガスは良い近似である．

どのようにして岩塩のような無機物の体積弾性率を決定するのかを見てみよう。岩塩は塩素イオンとナトリウムイオンの格子から成る。最も近いイオン同士の距離は $d = fa_0$ であり、 $f = 5.32$ である。異符号の電荷を持つイオンは、イオンの電子ガスが重なり始めるときに生じるシュレディンガー圧力によって引き離されている。比較的小さな重なりでも、電子雲が高密度なためにより大きな圧力が生じる。通常の状況下ではこの圧力 P_S はイオンの電氣的引力と平衡した状態に保たれている。これを用いて体積弾性率を計算することができる。一イオンあたりの電気エネルギーは $-\mu e^2/v^{1/3}$ と知られている。ここで、 $v = d^3 = f^3 a_0^3$ は原子の体積であり、 $\mu = 0.88$ はいわゆるマードルング定数である。このエネルギーが逆向きの圧力 P_e を生じさせる。これはエネルギーの体積に関する導関数の符号を逆にしたものであり、 $-P_e = 1/3 \mu e^2 / f^4 a_0^4$ である。これがシュレディンガー圧力とつり合っているので、 $P_S = -P_e$ を得る。上述の f の値を用いると、 $P_S = 1.07 \times 10^{11}$ erg/cm³ を得る。ここでも、圧縮の際にはやはりシュレディンガー圧力に逆らわなければならない。岩塩の場合、シュレディンガー圧力は格子距離 d の減少と共に著しく増大する。なぜなら、電子雲同士の重なりは d の急勾配の関数だからである。ゆえに、体積弾性率は P_S のオーダーであるが、それよりもいくらか大きい (4)。実際に、岩塩における現実の値は 2.4×10^{11} erg/cm³ である。

これであらゆる単純な固体の体積弾性率を基本的な定数を用いて表現できる。それは

$$C \sim F \frac{Ry}{a_0^3} = F \frac{e^{10} m^4}{h^8}$$

のオーダーである。ここで F は定数であり、因子 f のかなり大きな負の冪を含む。大雑把に言うと、バルク係数の値は原子の体積あたりのエネルギー、すなわち数オングストロームの三乗あたり数電子ボルト、に相当する。

山の高さ、水面波の波長

三番目の疑問である、なぜ山はあれほど高いのかを考えよう。山を、同じ材料で構成された水平面の上で静止している酸化ケイ素の塊として単純化する (図3を見よ)。塊の重量が大きくて土台の物質が流動し始めると、山は土台によって支えられるには高すぎることになる。つまり、塑性変形が始まると山は沈む。

H を塊が沈み始める高さとしよう。このとき H は山が達し得る最大の高さである。地球のように地殻運動や火山活動が活発な惑星では、山は H と同じオーダーの高さとなるが、いくらか小さい (5)。

この問題は、物質の圧縮性を扱った先のものとは異なるということを指摘しておく。山の重量は実際に土を圧縮するが、この圧縮は目に見えるほど山の高さを減らさない。塑性流動に圧縮は関係せず、大した密度変化を伴わずに起こる。塑性流動に関係するエネルギーは圧縮におけるものよりも小さい。

H がどのくらいの高さのときに山は底に沈み込み始めるだろうか. 沈み込みは, 山が沈むことによって得られるエネルギーと塑性流動を発生させるためのエネルギーが等しくなる高さにおいて起こる. このエネルギーは岩石を溶かすために必要なエネルギーに匹敵し, おそらくそれよりもいくらか小さい. 計算を進めるために, これらのエネルギーを等しいとおく. “融解した”物質の量は, 山の物質が地面に沈み込む量とおおよそ同じである. ゆえに大雑把に言うと, 高さ H から物質を下ろすことによって得られる重力エネルギーの量は, 同量の物質の融解エネルギーと等しくなければならない. 計算は各分子に対して別々に実行できる. 分子の質量は陽子質量の A 倍であり, ここでは約 50 である. これは酸化ケイ素の分子量である.

そういうわけで

$$AMHg = E_1$$

と書くことができる. ここで g は地球上での重力加速度であり, E_1 は一分子あたりの融解エネルギーである. 後者のエネルギーは物質の結合エネルギー B のほんの一部である: $E_1 = \xi B$. 結局, 融解の過程において結合は破壊されず, 物質の配置を保つ剛性のみが取り除かれる. ξ はどれくらいの大きさだろうか. 1 g の氷を溶かすのに 80 カロリー費やすことを思い出す. 氷を蒸発させるために必要なエネルギーはそれに加えて 540 カロリーに達する. したがって因子 ξ は氷の場合おおよそ 0.1 である. 金属や無機物ではこの因子は 0.05 のオーダーである. これにより $E_1 = \xi B = \xi \gamma Ry$ とおいて, $\xi = 0.05, \gamma = 0.2$ とすることで山の最大の高さ

$$H = \xi \gamma \frac{Ry}{AMg} \sim 26 \text{ km} \quad (10)$$

を得る. 実際の値は 10 km のオーダーである. この結果は, 塑性流動を生むのに必要なエネルギーが融解エネルギーよりもいくらか小さいという事実を考慮すると合理的である.

H の式はまだあるべき姿になっていない. 定数 g は本当に基本的な数ではなく, それはニュートンの定数 G と地球の核子 (陽子と中性子) の総数 N_E を用いて表わされ,

$$g = \frac{GN_E M}{R_E^2}$$

となる. ここで R_E は地球の半径である. 地球は“密な”物質 (分子が互いに触れ合う) から成るので, R_E は SiO_2 分子または鉄原子の半径 R を用いて表わすことができる. この二つの物質は地球の成分に典型的なものである. SiO_2 の分子量は幸いに鉄の原子量 ($A \approx 50$) に近い. (8) 式を用いて,

$$R_E \sim \left(\frac{N_E}{A} \right)^{1/3} R = \left(\frac{N_E}{A} \right)^{1/3} f a_0$$

とおく.

最後の結果を, センチメートルを用いてではなく, 原子の世界における長さの基本的な単位であるボーア半径のみを用いて表わしたい. これまで導いた式をまとめて, 山の最大の

高さ

$$\frac{H}{a_0} \sim \xi \gamma f^2 \frac{\alpha}{\alpha_G} \frac{1}{N_E^{1/3}} \frac{1}{A^{5/3}} \quad (11)$$

を得る．ここで α は微細構造定数であり， α_G は重力微細構造定数と呼べる定数である．

$$\alpha = \frac{e^2}{hc} = 137^{-1}$$

$$\alpha_G = G \frac{M^2}{hc} = 5.88 \times 10^{-39}$$

ここで M は陽子の質量である． $\xi = 0.05, \gamma = 0.2, f = 3$ という値を用いると，この表現は前と同じ結果を与え， $H/a_0 \approx 4.7 \times 10^{14}$ である．比 $\alpha/\alpha_G = 1.24 \times 10^{36}$ は二つの陽子間の電気力と重力の比である．この比が上の表式に登場するのは，山の最大の高さは岩石の剛性と重力の間の競争により生じるからである．前者は電子と原子核の間の電気力の効果である．もちろん，非常に大きい α/α_G の値は大きい数値 $N_E^{1/3}$ によって埋め合わせられている．

(11) 式から，おおよそ次のように言える．すなわち，他の惑星における山の高さは $N_P^{1/3}$ に反比例するということである．ここで N_P はその惑星での核子の総数である．もし岩石の組成と地質活動が地球と同じだとすると，山は月においては約 4 倍高く，火星においては 2 倍くらいの高さになる．火星の山は実際に 2 倍くらいの高さである．しかし，月の山は地球のものよりもわずかに高いのみであり，それらの達し得る最大の高さまで達していない．これは，月では地殻運動がほとんど無いからである．山の高さが半径と同程度になり得るような惑星の大きさについて推測することもできる．そのような天体は，重力に関わらずその剛性により非球状の形を維持できるだろう．この物体の最大半径は，地球における山の最大の高さと同地球半径の幾何（相乗）平均であることが容易にわかる．つまり，おおよそ 300 km である．実際に，火星の月であり，明らかに球状でないデイモスの長径はこれよりも小さい．それは 20 km のオーダーである．

少しの間，一見大きく異なる自然現象を見てみよう．それは湖の水面における波である．軽風が静かな水面を通り過ぎ始めるとき，初期波の波長 λ はセンチメートルのオーダーである（ここで λ は実際の波長を 2π で割ったものである）．波の発生の物理に立ち入ることはここでは避けておく．風はそのエネルギーをまずこれらの波のうち伝播速度が最も小さい波に渡すと言うだけにとどめておく．実際に伝播速度が最小となるような波長 λ_m があり，これが風によって最初に励起されるおおよその波長である．最小が生じるのは，大きい波に対しては重力の効果が増大するが，小さい波に対しては表面張力の効果が増大するからである．それらは共に波の振動の復元力として働く．ゆえに，波の最小速度は表面張力と重力のつり合いを表わす (6)．

水の波の速度 v の表現は

$$v = \left(g\lambda + \frac{\sigma}{\lambda\rho} \right)^{1/2}$$

で与えられる．ここで λ は波長， σ は表面張力で， ρ は水の密度である．最小速度は

$$\lambda = \left(\frac{\sigma}{g\rho} \right)^{1/2}$$

のときに達成される．表面張力 σ は単位面積当たりのエネルギーである．それを表面エネルギー E_S を用いて表わそう．これは，表面分子を一つだけ含む表面積が持つエネルギーである．この面積はおおよそ分子半径 fa_0 の二乗の π 倍であり，したがって $\sigma \sim E_S/\pi f^2 a_0^2$ である．表面エネルギー E_S は，表面の分子は物質内部の分子よりもいくらか弱く結合している，という事実に由来する．表面エネルギー E_S は，内部での結合エネルギー B と表面での結合エネルギー B_S の差である．よって $E_S = B - B_S$ である． $E_S = \xi' B$ とおこう．単純な液体中では， E_S は B の約 $1/6$ である．この関係は，分子間の結合を，それぞれの分子で起こる六つの互いに直行する結合と考えれば妥当である．表面ではそれらの一つは効力がない．よって， $\sigma = E_S/\pi f^2 a_0^2 = \xi' \gamma R_y/\pi f^2 a_0^2$ ，また， $\rho = 3AM/4\pi f^3 a_0^3$ と書くことができ，

$$\lambda^2 = \frac{4}{3} \gamma f \xi' \frac{R_y a_0}{AMg}$$

を得る．この式を (10) 式と比較すると，驚くべき結果が示される．つまり， ξ' と ξ ($1/6$ と $1/20$) の差と $\frac{4}{3}f$ の因子を除いて， $(\lambda/a_0)^2 \sim H/a_0$ である．また， γ と M の値も水と酸化ケイ素の内部ではいくらか異なる．湖での小波の大きさは，ボーア半径の単位で表わせば，山の高さの平方根のオーダーである！この面白い結果は，適当な単位で表わされた表面張力が，結合エネルギーのわずかな部分であり，融解エネルギーと同じオーダーである，という事実に由来する．長さ λ もまた，原子の電気力と重力の間の競争の結果である．

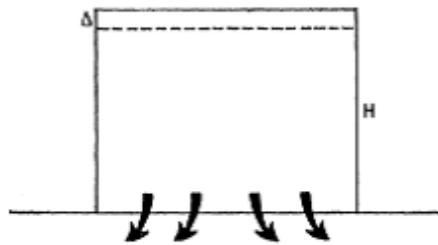


Fig. 3. The sinking of the mountain by the amount Δ corresponds to the displacement of a layer of thickness Δ from the top into the ground, and to a plastic flow of a comparable volume in the ground.

図 3: 山の Δ だけの沈み込み．これは厚さ Δ の層の頂上から地面へ向かう変位に対応し，地中での相当する体積の塑性流動に対応する．

密な物質の可視性

四つ目の疑問，なぜ密な物質がはっきり見えるのか，は光と物質の相互作用に関係している．光は電磁波であり，その電場成分が，原子に及ぼす影響を決めている．一般に，可視光の振動数は単純な原子や分子の共鳴振動数より低い．これらの共鳴はたいてい紫外線の領域にある．これらの状況下で，原子に対する光の振動する電場による効果が，静電場による効果から推定できる．静電場 \mathcal{E} は，原子の中で双極子モーメント D を誘導する．

$$D = p\mathcal{E} \quad (12)$$

ここで，比例定数 p ，すなわち分極率は体積の次元を持つ．

p の大きさのオーダーを，次の単純な考察によって見積もる．原子核としての陽子と半径 R の電子雲を持つ，水素原子を仮定する．電子雲を原子核に対して相対的にずらし，原子核が電子雲のふちにくるまで動かすのにどれほど強い場が必要かを見積もろう．このとき，双極子モーメントは $\bar{D} = eR$ となるであろう．原子核を中心へと追い返す力は e^2/R^2 である．ゆえに，原子核がふちにあるという普通ではない状態に原子を保つためには，電場 $\bar{\mathcal{E}} = e/R^2$ が必要である．(12) 式がここでも正しいと仮定すると（これは近似的にのみ真である），

$$p \sim \frac{\bar{D}}{\bar{\mathcal{E}}} = R^3 \quad (13)$$

この式から，分極率 p が原子の体積のオーダーであることがわかる．これは多くの複雑な原子に関しても近似的に成り立つ．

次は，隣接した原子との平均距離が d であるような配置の原子の列に入射された光の効果がどのようなものであるかを学ぼう． d の値は $2R$ と同じくらいかそれよりも大きいだろう．それぞれの原子は双極子モーメント $D = p\mathcal{E}_0$ を得る．ここで \mathcal{E}_0 は光の電場の強度である．双極子は電場を作り出す．物質内の，これらの二次的な場の平均強度 \mathcal{E}_S はいくらであろうか．良く知られた関係によると，一様な双極子密度 P によって作られる場 \mathcal{E}_S は $\mathcal{E}_S = 4\pi P$ である．今の場合，双極子密度は $P = D/d^3$ で与えられているので，

$$\mathcal{E}_S = 4\pi(p/d^3)\mathcal{E}_0$$

を得る．

二次的な場は，入射波により振動が励起された原子から放射される，二次的な光に対応する．二次的な光波は入射波と干渉し，一定の変化を引き起こす．入射光は $\mathcal{E}_S \sim \mathcal{E}_0$ の場合，つまり， $4\pi p/d^3 \sim 1$ あるいは $d \sim 2R$ の場合にのみ，二次的な場によって強く変化を受ける．したがって，原子間距離がそれらの直径のオーダーである密な物質のみが，入射光を強く変化させる．この場合，屈折率（その実部あるいは虚部）は1と明らかに異なる．これらの変化は，光が物質に入るとき最初の数波長以内の屈折や吸収に現れる．それらは密な物質をはっきりと目に見えるようにする．これは，屈折が極わずかで，多数の波長の

距離を超えてのみ吸収が起こる，普通の空気や色の着いた蒸気のような希薄な物質と対照的である。

密な物質のはっきりとした可視性は，光の場合と，原子をまとめておく力が共に同じ本質，すなわち電気であるという事実にかかのぼることができる。原子の結合が，異なる，より強い力によって引き起こされるとしたら何が起こるかを見てみよう。例として，結合を引き起こす荷 e' が $e' > e$ を満たすと仮定する。ただし，「電荷」は e のままであるとする。すると原子の分極率は小さくなり（原子はより硬い）， $p \sim (e/e')^2 R^3$ を得る。二次的な場 \mathcal{E}_S は $\mathcal{E}_S \sim 4\pi(e/e')^2(R/d)^3 \mathcal{E}_0$ となり，密な物質中でさえ \mathcal{E}_S は \mathcal{E}_0 よりも小さくなる。密な物質は光に対してかなり透明になる。自然界に存在するそのような状況の例は，核物質である。先に見たように，核の引力は二つの電荷の間に働く電気力の約 10 倍強い。実際，光は原子核を通過するときにはあまり散乱されない。光ははっきりと散乱あるいは吸収されるには，多数の波長分の距離だけ核物質の中を通らなければならない。

恒星の大きさ

これから我々の最後の疑問である，なぜ太陽はあれほど大きいのか，を考えよう。現代天文学の最も驚くべき結果の一つは，それほど特異でない性質を持つ恒星の質量は大小の比が数百倍以内のかなり狭い範囲になければならない，という事実である。恒星内部の核子の数 N^* は基本的な定数の非常に単純な組み合わせで与えられる。

$$N^* = sN_0, N_0 = \left(\frac{hc}{GM^2} \right)^{3/2} = 2.21 \times 10^{57} \quad (14)$$

ここで s は数因子であり， $0.1 \sim 60$ の間にある。実際，太陽質量 M_0 は $N_0 M$ との比が 2 以内で， $M_0 = 0.54 N_0 M$ である。

いま，この驚くべき関係を導く。よい正当性をもって，恒星はほとんど水素ガス，つまり N^* 個の陽子と電子から成ると仮定する。我々の大きく単純化された議論では，恒星を半径 R の球であると考え，密度と温度は一樣であるとする。温度 T は十分高く，水素原子はイオン化されていると仮定する。つまり，電子と陽子は自由粒子として運動していると考ええる。それらは重力によって球状に留められている。温度と重力の効果を結び付けるために，先に言及したビリアル定理を用いる。ビリアル定理によれば，運動エネルギー (E_K) の時間平均は，時間平均したポテンシャルエネルギー (E_P) の絶対値の半分に等しくなければならない。重力のポテンシャルエネルギーは常に負の量であり，質量が集まるとポテンシャルエネルギーは下降する。ビリアル定理はポテンシャルエネルギーの絶対値を含んでいて，これは正の量である。

$$E_K = 1/2|E_P| \quad (\text{ビリアル定理}) \quad (15)$$

電子と陽子の運動エネルギーはほとんどが熱運動によるものである。等分配則によれば，運動エネルギーは分子一つにつき $(3/2)kT$ であり， k はボルツマン定数である。よって全運

動エネルギーは $3N^*kT$ となるだろう。距離 r だけ離れた質量 M の二つの物体の、重力によるポテンシャルエネルギーは $-GM^2/r$ である。平均すると、恒星内部の陽子間の距離は R のオーダーであり、 N^{*2} 組の陽子が存在する（質量が小さいために、電子のポテンシャルエネルギーは無視できる）。ゆえに、ポテンシャルエネルギーのオーダーは $-GM^2N^{*2}/R$ である。このときビリアル定理は

$$3N^*kT \sim 1/2 \frac{GM^2N^{*2}}{R} \quad (16)$$

となる。

(16) 式から、いくつかの興味深い結論を引き出すことができる。(15) 式によると、恒星の全エネルギー E （運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和）は運動エネルギーの符号を逆にしたものに等しい。

$$E = -E_K = -3N^*kT \sim -1/2 \frac{GM^2N^{*2}}{R} \quad (17)$$

恒星が高温になると、宇宙空間への放射によってエネルギーを失うので、そのエネルギーはどんどん小さくなるに違いない。(17) 式によると、より小さなエネルギーはより高い温度を意味し、また、より小さい半径やより強い圧縮を意味する。エネルギーの減少は星を温めるのである！つまり星の比熱は負である。

この一見矛盾しているように思える結果は、重力に関するもう一つのパラドックスと関係している。太陽の周りを運動するロケットに乗っている宇宙旅行者が、“ブレーキ”（エネルギーの減少）を引くことを想像しよう。それを行う一つの方法として、巨大なパラシュートを開くことを考えると、これは希薄な隕石の「ガス」や他の星間物質中で小さな摩擦力を及ぼす。このブレーキの作用の結果として、ロケットは遅くならず、より速く運動する！これは、よく考えれば当たり前だが、運動エネルギーの何らかの変化は、必ず反対方向へのポテンシャルエネルギーの二倍の変化を伴っているからである（ビリアル定理）。いかなればブレーキは、ロケットを太陽に向かって落下させることによって、ロケットを加速させるのである。これは、放射によるエネルギーの減少が恒星を温めることと完全に類似しており、これに伴う圧縮は中心への落下に対応する。

ビリアル定理 ((16) 式) をもっと便利な形に変形してみよう。半径 R を別の長さ d に置き換えると、もっと実用的になる。 d は恒星内部での隣接した陽子間の平均距離に等しい。これは、それぞれの陽子（または電子）が占める体積を表わす長さの次元である。

$$d = R/(N^*)^{1/3} \quad (18)$$

そして、(16) 式を N^* で割ったものは

$$3kT \sim 1/2 \frac{GM^2(N^*)^{2/3}}{d} = 1/2 \frac{GM^2}{hc} (N^*)^{2/3} \frac{hc}{d}$$

となる。ここで左辺は陽子一個当たりの運動エネルギーであり、右辺は陽子一個当たりのポテンシャルエネルギーの半分である。この式は以下のように簡単にすることができる。

$$kT = f \left(\frac{N^*}{N_0} \right)^{2/3} \frac{hc}{d} \quad (19)$$

ここで N_0 は (14) 式で定義された数である。 f は大雑把な近似で 1 のオーダーの定数であり、以後書かないことにする。

話を戻すと、恒星は放射によって常にエネルギーを失う。これにより温度 T は上昇し、大きさ d は減少する。しかし、温度の上昇には限界がある。温度が“核発火温度”と呼ばれるある値 T_{ig} に達すると核の燃焼が始まり、水素がヘリウムに変化する。ここでも似たようなパラドックスが生じる。核の燃焼は温度を上昇させず、恒星を低温に保つ。この理由は単純である。核反応は放射によって失われたエネルギーを補い、全エネルギーはそれ以上減少せずに一定となる。温度も同様である ((16) 式参照)。恒星の機構はサーモスタットのようなものである。核エネルギーの生成が大きくなりすぎると恒星は膨張し、自身を冷やして核の燃焼を減らす。

以上を踏まえると、恒星の質量の最小値を決めることができる。それは、放射によるエネルギー損失による温度上昇を制限する別の要因と関連する。それは恒星内の電子のシュレディンガー圧力である。電子間の距離 d が小さくなると、シュレディンガー圧力は大きくなり、重力的な引力と等しくなるだろう。そうして圧縮が止まり、温度の上昇も止まる。言い換えると、恒星の物質は、金属の塊や他の固体物質と本質的に同じ方法、つまり電子のシュレディンガー圧力の効果によって、圧縮に抵抗する。

恒星内でその効果は次のようにして現れる。電子間の距離 d の減少に伴って、電子の運動エネルギーの最小値 ((4) 式) は増加する。このエネルギーは恒星が収縮するとき得られる重力エネルギーによって供給されなければならない。したがってその供給はもはや温度上昇に使われない。実際に、収縮が完全に止まる瞬間が訪れる。なぜなら、パウリの原理によると電子の運動エネルギーの最小値は $1/d^2$ の関数として増加する ((4) 式参照) が、収縮によって得られる重力エネルギーは $1/d$ の関数としてしか増加しないからである (8)。したがって、たとえ核反応が起こらなくても、収縮と温度上昇を止めるための条件が得られる。それらは、電子一個あたりの重力エネルギーが運動エネルギーの最小値と同じオーダーになるときに止まる。電子一個あたりの重力エネルギーは陽子一個あたりのそれに等しく、そのオーダーは (19) 式の右辺により与えられる。したがって、収縮が止まる原子間距離 d_{stop} の条件として、

$$\left(\frac{N^*}{N_0}\right)^{2/3} \frac{hc}{d_{\text{stop}}} \sim \frac{h^2}{2m(d_{\text{stop}})^2}$$

あるいは 2 を省略して

$$\frac{1}{d_{\text{stop}}} \sim \left(\frac{N^*}{N_0}\right)^{2/3} \frac{mc}{h}$$

を得る。

原理的には、この d_{stop} の決定方法は、(6) 式からの水素原子のボーア半径 a_0 の決定方法と同様である。水素原子では、それは陽子と電子の間の電氣的な引力と、 a_0 を決めるシュレディンガー圧力の間のつり合いであった。ここでは、それは N^* 個の陽子の重力的な引力と、 d_{stop} を決めるシュレディンガー圧力の間のつり合いである。

電子のシュレディンガー圧力によって収縮が止められる前に恒星が達し得る温度の最大値 T_{\max} は、(19) 式によって与えられ、それは d を T と関連付ける。

$$kT_{\max} \sim \left(\frac{N^*}{N_0}\right)^{2/3} \frac{hc}{d_{\text{stop}}} \sim \left(\frac{N^*}{N_0}\right)^{4/3} mc^2 \quad (20)$$

ここで m は電子の質量である。恒星内の陽子数の最小値 N^* はいくらであろうか。我々は、放射によるエネルギーの減少を補い、その結果一定の安定状態に達するように内部で核反応を引き起こすひとまとまりの物質を、“恒星” という用語で理解する。 N^* の最小値は、最高到達温度が核反応の発火温度 T_{ig} よりも高くなるものでなければならない。発火温度は、陽子の運動エネルギー ϵ が十分高く、二つの陽子が衝突する際に、静電的な反発に関わらず合体することのできる温度である。量子力学によると、その運動エネルギー ϵ は

$$\epsilon \sim \frac{\pi^2}{2} \frac{Me^4}{h^2} = 123,000 \text{ ev}$$

である。これに到達するために必要な温度 T_{ig} は

$$kT_{\text{ig}} = \eta\epsilon$$

を満たす。ここで η は数因子であり、1 より小さい。なぜなら、マクスウェル分布は常に kT よりも大きなエネルギーの陽子を含むからである (9)。明らかに、 T_{\max} は T_{ig} よりも大きくなければならず、(20) 式から

$$\frac{N^*}{N_0} > \left(\frac{\eta\epsilon}{mc^2}\right)^{3/4} = \left(\frac{\pi^2}{2} \frac{M}{m} \frac{e^4}{h^2 c^2} \eta\right)^{3/4}$$

となる。恒星内の陽子数は少なくとも N_0 の $0.58\eta^{3/4}$ 倍でなければならない。より正確な計算によれば、下限は $0.1N_0$ である。したがって、 $N^* = 0.54N_0$ である我々の太陽は、最小値よりもそれほど大きくない。つまり太陽は比較的小さな星である。

N^* の上限は存在するだろうか。それは実際に存在して、重い恒星は非常に熱くなり、それに伴う放射の圧力が恒星を不安定にするという事実由来する。 N^* の上限を決定するために、先の考察を二つの点で拡充しなければならない。

第一に、恒星内部の運動エネルギーは陽子と電子の運動のエネルギーのみではない。光子もまた“運動”エネルギー (光子一個につき $h\omega$) を持ち、それは恒星内の熱放射のエネルギーとして現れる。この後すぐに、このエネルギーは N^*/N_0 が 1 よりも小さいか同程度であれば、重大な寄与をもたらさないことを見ていく。それゆえに、先の考察でこれを無視したのは正当なことであった。

第二に、(15) 式の形でのビリアル定理は非相対論的な粒子に対してのみ正しい。粒子のいづれかが、光子がそうであるように非常に相対論的であれば、(15) 式の代わりに

$$E_K = \Lambda|E_P| \quad (21)$$

と書かなければならない。ここで Λ は $1/2$ と 1 の間にある。多数の粒子が非常に相対論的であれば、因子 Λ は 1 となる。ポテンシャルエネルギーは負であるから、 $\Lambda = 1$ の状態は、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの絶対値が等しく、符号が逆であることを意味する。したがって全エネルギーはゼロとなる。これは、恒星が形を保たないことを意味する（束縛系は全エネルギーが負でなければならない）。別の言い方をすると、放射のエネルギーが陽子と電子の運動エネルギーよりも非常に大きければ、光の圧力は恒星を不安定にする。

次は、放射によるエネルギーが粒子の運動エネルギーよりも大きくなるのはいつなのかを理解しよう。後者は、粒子一個当たり kT のオーダーである。前者は、良く知られているステファン・ボルツマンの法則から決定できる。この法則によると、与えられた温度における放射のエネルギー密度 u は温度の四乗に比例し、

$$u = \sigma(kT)^4, \quad \sigma = f \frac{1}{h^3 c^3} \quad (22)$$

である。比例定数 σ は 1 に非常に近い定数 f を単純に $(hc)^{-3}$ 倍したものである。

この関係を理解する簡単な方法は、以下の事柄を認めることである。熱平衡状態では、光子の平均エネルギーは $\sim kT$ でなければならない、一辺がこれらの光子の波長 λ のオーダーである体積中に約一個の光子が存在する。したがってエネルギー密度は $u = kT/\lambda^3$ となり、 $hc/\lambda = kT$ より、(22) 式に一致する。

恒星内の放射のエネルギー E_r はエネルギー密度に体積を掛けたものであり、

$$E_r = f \frac{(kT)^4}{h^3 c^3} \frac{4\pi}{3} R^3$$

である。星を安定に保つために、放射のエネルギーは粒子の運動エネルギー $3N^*kT$ に比べて大きくなりすぎてはいけない。つまり、

$$\frac{E_r}{3N^*kT} \sim \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \frac{R^3}{N^*} = \left(\frac{kT}{hc/d} \right)^3 = \text{“1 に比べて大きすぎない定数”} \quad (23)$$

である。ここでは定数は省いた。

ビリアル定理 ((16) 式) を放射のエネルギーと因子 Λ を含む形に書きなおすと、

$$E_r + 3N^*kT \sim \Lambda \frac{GM^2(N^*)^2}{R}$$

となる。これを N^* で割り、(16) 式から (19) 式を導いた際にしたように、(14) 式と (18) 式の関係を用いると、

$$(kT)^4 \left(\frac{d}{hc} \right)^3 + kT \sim \left(\frac{N^*}{N_0} \right)^{2/3} \frac{hc}{d}$$

となる。ここで、 $\Lambda, 3, 4\pi/3$ のような数因子は 1 と等しいとおいた。

$$x = \frac{kT}{hc/d}$$

とすると, (19a) 式は

$$x^4 + x \sim \left(\frac{N^*}{N_0}\right)^{2/3} \quad (24)$$

と等価である. (23) 式の安定条件によると, x^3 は 1 に比べて大きくなりすぎてはいけな
いはずである. このことから, $x^4 + x$ は 1 よりも大きく超えないはずであり, (24) 式によ
ると $(N^*/N_0)^{2/3}$ も同様である. したがって, 恒星は N^* が N_0 よりも大き過ぎない限りは
安定であると結論される. 実際, より正確な計算によれば N^* は $60N_0$ よりも小さくなけ
ればならない.

このように, 恒星内の陽子数 N^* は, 恒星が放射によって吹き飛ばすことのないようにある
 N_0 の倍数よりも小さくしなければならず, 核発火温度に達するために N_0 のある割合よりは
大きくなければならない. N_0 は基本的な定数の簡単な組み合わせ ((14) 式) である. した
がって, 恒星内部の陽子数 N^* が大体 N_0 のオーダーであること, つまり

$$60N_0 > N^* > 0.1N_0$$

が示された. N_0 が 2×10^{57} くらいの大きさであることを考慮すると, これはかなり強い
制限である.

注釈

1. 我々は常に $h = h^*/2\pi$ を用いる. ここで h^* は従来のプランク定数の値であり, $h = 1.05 \times 10^{-27}$ erg/sec である.
2. 記号 $\lambda = \lambda^*/2\pi$ を用いる. また, ω は $1/2\pi$ 秒あたりの振動数を表わし, $\omega = 2\pi\nu$ であ
る. ここで λ^* は通常の波長であり, ν は通常の振動数である.
3. これらの考察において, S. Chandrasekhar, D. Hawkins, E. Purcell, E. S. Salpeter, V.
Telegdi, P. Wolff との議論が, また C. Kittel's の本 Introduction to Solid State Physics, E.
Salpeter's の論文 "Dimensionless ratios and stellar structure" と Perspectives in Modern
Physics を読んだことに大変助けられた. しかし, このうちの誰も, この論文なされた危
険な近似と一般化のために責められるべきではない.
4. これは次の方法で理解される: 通常の場合下では, シュレディンガー圧力と逆向きの
圧力 (引力のメカニズムにより引き起こされる) はつり合っている. 体積が n パーセント
減少するとき, シュレディンガー圧力は n_S パーセント増大し, 逆向きの圧力は n_C パー
セント増大する. 平衡状態は $n_S > n_C$ の場合にのみ存在する. 体積弾性率 C の定義から,
 $nC = (n_S - n_C)P_S$ ということになる. 一般に, 比 $(n_S - n_C)/n$ は 1 のオーダーかもっと大
きいが, 極端に大きくはない.

5. 山の高さに対する制限は他にもある。それは、山脈は普通地殻よりも軽い物質でできているという事実などである。いわば山は浮く。沈んだ部分が地殻の液体層に達したとき、高さは制限される。しかし、この制限は本文中で扱ったものと同じオーダーの量である。
6. 同じ長さ λ が、異なる文脈においても現れる。濡れた天井から垂れていて、落下するのに十分なくらい大きくなった水滴の半径は、最小速度を持つ水の波の波長 λ の $3^{1/2}$ 倍である。
7. ここで言及しているのは必ずしも可視光だけではなく、 γ 線と呼ばれる“核の”光でもある。これは核によって“見られる”(放射され吸収される)光である。
8. 巨大な恒星での場合のように、温度が非常に高くなると、電子の運動エネルギーはそれらの静止エネルギーよりも非常に大きくなる。よって $1/d$ にのみ比例して増加する非常に高い運動エネルギーのための相対論的表現を用いなければならない。このようにしてこれらの場合にはパウリの原理によって収縮を止めることはできず、恒星は崩壊して“ブラックホール”になる。これらの重い星についての議論はこの論文では扱わない。
9. ここで我々は状況を大きく単純化した。核反応は、たとえ kT が斥力に打ち勝つのに必要なエネルギーよりかなり低くとも起こり得る。なぜなら第一に、マクスウェル分布は陽子に kT よりもずっと大きなエネルギーを与えるからであり、第二に、量子力学的な障壁の通過があるからである。実際、太陽の中心温度は kT が数キロ eV となるものであり、これは η が 0.02 程度であることを意味する。単純化された手法は、論理的な理由付けを説明するのに役立つ。それと共に、他の単純化があれば N^* に対するおおよその結果が得られ、それはより正確な計算とそれほど違わない。

付録B 式の導出

B.1 シュレディンガー圧力

一辺の長さが L の立方体内部に束縛された電子が及ぼすシュレディンガー圧力を求める。電子のシュレディンガー方程式は、

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(x,y,z) = E\Psi(x,y,z)$$

である。ここで、 $\Psi(x,y,z)$ は電子の波動関数、 E はエネルギー固有値である。解の形を $\Psi(x,y,z) = \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z)$ と仮定すると、

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2}\psi_2(y)\psi_3(z) + \psi_1(x)\frac{d^2\psi_2(y)}{dy^2}\psi_3(z) + \psi_1(x)\psi_2(y)\frac{d^2\psi_3(z)}{dz^2}\right) = E\psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z)$$

となる。両辺を $\psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z)$ で割ると、

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\psi_1''(x)}{\psi_1(x)} + \frac{\psi_2''(y)}{\psi_2(y)} + \frac{\psi_3''(z)}{\psi_3(z)}\right) = E$$

右辺は定数であるから、左辺も定数である。すなわち、

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi_1''(x)}{\psi_1(x)} = E_x \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi_2''(y)}{\psi_2(y)} = E_y \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi_3''(z)}{\psi_3(z)} = E_z \end{cases}$$

ただし、 $E_x + E_y + E_z = E$ である。第一式について考える。

$$\psi_1''(x) = -\frac{2mE_x}{\hbar^2}\psi_1(x)$$

より、

$$\psi_1(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx) \quad \left(k \equiv \frac{\sqrt{2mE_x}}{\hbar}\right)$$

ここで、境界条件

$$\psi_1(0) = 0, \psi_1(L) = 0$$

を用いると、

$$B = 0, A \sin(kL) = 0$$

$$A \neq 0 \text{ より } \sin kL = 0 \quad \therefore kL = n_x \pi \quad (n_x = 1, 2, \dots)$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2mE_x}}{\hbar} &= \frac{n_x \pi}{L} \\ \therefore E_x &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n_x^2 \end{aligned}$$

他の二式についても同様にして、

$$E_y = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n_y^2, \quad E_z = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n_z^2$$

以上より、

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

となる．次に、エネルギーが E 以下の量子状態の数を考える．スピンの自由度が 2(up or down) であることを考慮すると、状態数 Ω_0 は

$$\Omega_0 = 2 \sum_{\substack{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \\ \leq \frac{2mL^2}{\pi^2 \hbar^2} E}} 1$$

である．ここで、和の記号を用いて表わされた部分は、 $n_x n_y n_z$ 空間の半径 $\frac{L}{\pi \hbar} \sqrt{2mE}$ の球の内部に含まれる格子点のうち、 $n_x, n_y, n_z > 0$ を満たすものの数である．格子点は、平均して単位体積当たり一個含まれる．球の半径が十分大きいとき、格子点の数は球の体積に等しいと近似できるので、

$$\begin{aligned} \Omega_0(E) &= 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{L}{\pi \hbar} \right)^3 (2mE)^{3/2} \\ &= \frac{V}{3} \pi \left(\frac{2mE}{\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} \end{aligned}$$

これが、一個の粒子のエネルギー E 以下の状態数である．状態密度を D とすると、

$$\begin{aligned} D(E) &= \frac{d\Omega_0(E)}{dE} \\ &= \frac{V}{2} \pi \left(\frac{2m}{\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2} \end{aligned}$$

となる。電子はフェルミ粒子であるから、その分布は

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1}$$

である。いま、 $T \rightarrow 0$ の極限を考えると、 $E > \mu$ の領域で $f(E) = 0$ となる。 $T = 0$ のときの μ を $\mu = \mu_0$ とすると、全粒子数が n のとき、

$$\begin{aligned} n &= \int_0^{\mu_0} D(E) dE \\ &= \frac{V}{2} \pi \left(\frac{2m}{\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\mu_0} E^{1/2} dE \\ &= \frac{V}{3} \pi \left(\frac{2m}{\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} \mu_0^{3/2} \\ \therefore \mu_0 &= (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n}{V} \right)^{2/3} \end{aligned}$$

となる。このときのエネルギーを E_{all} とすると、

$$\begin{aligned} E_{\text{all}} &= \int_0^{\mu_0} E D(E) dE \\ &= \frac{V}{2} \pi \left(\frac{2m}{\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \frac{2}{5} \mu_0^{5/2} \\ &= \frac{V}{2} \pi \left(\frac{2m}{\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \frac{2}{5} \frac{3}{\pi} \frac{n}{V} \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \left(\frac{n}{V} \right)^{2/3} \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \\ &= \frac{3}{5} (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} n \left(\frac{n}{V} \right)^{2/3} \end{aligned}$$

であり、シュレディンガー圧力 P_S は、

$$\begin{aligned} P_S &= -\frac{\partial E_{\text{all}}}{\partial V} \\ &= -\frac{3}{5} (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} n \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{n}{V} \right)^{-1/3} \left(-\frac{n}{V^2} \right) \\ &= \frac{1}{5} (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{n}{V} \right)^{5/3} \end{aligned}$$

となる。

B.2 ビリアル定理

粒子が動ける範囲が有限であるという条件のもとで、ビリアル G を以下のように定義する。

$$G \equiv \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{p}_i$$

\vec{r}_i, \vec{p}_i はそれぞれ粒子 i の位置, 運動量である. これを時間 t で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_i \cdot \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ &= \sum_i \frac{\vec{p}_i}{m_i} \cdot \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \\ &= 2K + \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \quad \text{ただし, } K = \sum_i \frac{|\vec{p}_i|^2}{2m_i} \end{aligned}$$

ここで, K は運動エネルギー, \vec{F}_i は粒子 i に働く力である. 時刻 0 から t までの $\frac{dG}{dt}$ の時間平均は,

$$\frac{1}{t} \int_0^t \frac{dG}{dt} dt = \frac{1}{t} [G(t) - G(0)]$$

である. $t \rightarrow \infty$ とすると, 条件より G は有限なので

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} [G(t) - G(0)] = 0$$

となる. これは $\frac{dG}{dt}$ の平均を取ることに相当するため,

$$\begin{aligned} 2 \langle K \rangle + \left\langle \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \right\rangle &= 0 \\ \therefore \langle K \rangle &= -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \right\rangle \end{aligned} \quad (1)$$

これをビリアル定理という.

特殊な場合

ポテンシャルが粒子間距離の $n+1$ 乗に比例する場合, つまり

$$V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{i < j} a |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{n+1}$$

と表わされるとき,

$$\vec{F}_i = -\nabla_{\vec{r}_i} V = -a(n+1) \sum_{j \neq i} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{n-1} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

である. ただし, \vec{F}_{ij} は粒子 j が粒子 i に及ぼす力である. これを式 (1) の右辺に代入すると

$$-\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \right\rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_{i \neq j} \vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ij} \right\rangle$$

となり,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j} \vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ij} &= \sum_{i > j} \vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ij} + \sum_{i < j} \vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ij} \\
&= \sum_{i > j} \vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ij} + \sum_{j < i} \vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ji} \\
&= \sum_{i > j} \vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ij} - \sum_{i > j} \vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ij} \\
&= \sum_{i > j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{F}_{ij} \\
&= -a(n+1) \sum_{i > j} |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{n+1} \\
&= -(n+1)V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)
\end{aligned}$$

であるから,

$$\langle K \rangle = \frac{n+1}{2} \langle V \rangle$$

と簡単な形になる. たとえばクーロン力の場合, ポテンシャルは $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{-1}$ に比例するので $n = -2$ となり, $\langle K \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle$ が成り立つ.

B.3 表面張力波の分散関係

表面張力を復元力とする水の波を考える. 三次元の直交座標系を考え, 鉛直上向きに z 軸をとる. 任意の時刻で渦が無い場合,

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = 0$$

であるから, 速度 \vec{v} はポテンシャル ϕ を用いて

$$\vec{v} = \nabla \phi \tag{2}$$

と表わされる. 水の密度 ρ は一定なので, 連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

より,

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{3}$$

である. 式(2)を(3)に代入すると

$$\Delta \phi = 0$$

となり，境界条件は，表面の両側の圧力差を表わすラプラスの式で与えられる．

$$p - p_0 = \alpha \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} \right)$$

ここで p は流体の表面近くの圧力であり， p_0 は外圧（一定）である．また， α は表面張力係数であり， R, R_0 は表面上のある点の主曲率半径である．表面の平面からのずれが微小であるとき

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} = - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)$$

と表わせる．ただし， ζ は表面の方程式が $z = \zeta(x, y)$ となるような微小量である．したがって

$$p - p_0 = -\alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)$$

である．非圧縮性流体（密度一定）の場合，

$$p = -\rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

より，表面では

$$p = -\rho g \zeta - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

これをラプラスの式に代入する．ポテンシャルを $\phi' = \phi - (p_0/\rho)t$ と定義しなおすことで定数 p_0 を除くことができ，

$$\rho g \zeta + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0$$

となる．これを t で微分して， $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ であることを用いると，表面での境界条件

$$\rho g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (z = 0)$$

を得る． $\phi = Ae^{kz} \cos(kx - \omega t)$ という解（ x 軸方向に伝播する平面波）を仮定すると，分散関係

$$\omega^2 = gk + \alpha \frac{k^3}{\rho}$$

を得る．したがって，波の速度は

$$\begin{aligned} v &= \frac{\omega}{k} \\ &= \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{k\alpha}{\rho}} \end{aligned}$$

である．

B.4 N_0

N_0 は基本的な定数の組み合わせであり,

$$N_0 = \left(\frac{hc}{GM^2} \right)^{3/2}$$

で与えられる. これは, シュレディンガー圧力と重力による圧力が等しくなる陽子数 N を考えることで得られる. 陽子 N 個が体積 r^3 の領域に束縛されているときのシュレディンガー圧力 P_S と重力による圧力 P_G はそれぞれ

$$P_S \sim \frac{h^2}{M} \left(\frac{N}{r^3} \right)^{5/3}$$

$$P_G \sim \frac{1}{r^2} \frac{G(MN)^2}{r^2}$$

である. 両者を等号で結ぶと

$$\frac{h^2}{M} \frac{N^{5/3}}{r} = G(MN)^2$$

ここで陽子間距離を d とすると, $d = r/N^{1/3}$ より $1/r = 1/dN^{1/3}$. よって

$$\frac{h^2}{Md} N^{4/3} = G(MN)^2$$

陽子の運動エネルギーの最小値は, 陽子が光速に近い速さで運動しているとき

$$\frac{h^2}{2Md^2} = \frac{hc}{d}$$

であるから

$$\frac{h}{Md} = 2c$$

したがって

$$2chN^{4/3} = G(MN)^2$$

$$N^{2/3} = \frac{2ch}{GM^2}$$

$$\therefore N = \left(\frac{2ch}{GM^2} \right)^{3/2}$$

これを $2^{3/2}$ で割って

$$N_0 = \left(\frac{hc}{GM^2} \right)^{3/2}$$

が得られる.