

# 卒業論文

## 惑星大気大循環モデル DCPAM による 地球実験結果と再解析データの比較

北海道大学 理学部 地球惑星科学科  
惑星宇宙グループ  
地球流体力学研究室  
学籍番号: 02120329

梅内 紫芳

平成28年2月29日

## 要旨

近年太陽以外の恒星の周りを回る惑星が太陽系外で数多く発見されている。それに伴い、系外惑星のハビタビリティ(生命存在可能性)について考察する研究が盛んに行われるようになった。ハビタビリティを考察する上で重要だと考えられているものの一つとして、惑星の全球的な気候を調べることがあげられる。系外惑星の気候については、その多様性と観測データの少なさから、数値モデリングを用いて調べる方法が有用だと考えられる。こうした背景を鑑み、私は数値モデリングにより多様な惑星大気を表現し、惑星のハビタビリティについて議論することを目指す。その第一歩として、本研究では大気大循環モデルの性能や理論的背景を学ぶとともに、最も身近なハビタブルな惑星である地球の大気における運動や放射について大局的に理解することを主な目的としている。

本研究では、大気大循環モデルの一つである DCPAM を用いて、地球大気を想定した条件のもとで数値実験を行った。DCPAM は地球流体電脳倶楽部によって開発されている、3次元球殻のプリミティブ方程式系に従う大気大循環モデルである。DCPAM による実験結果がどれほど実際の地球大気を表現できているかを検証するために ERA40 と NCEP の再解析データとの比較も行った。比較の際には、ERA40 については約 40 年分、NCEP については約 30 年分の再解析データを用いた。再解析データとの比較の主な目的は、DCPAM が大気大循環モデルとしてどの程度の性能を持つかを知ることである。比較と検証には大気における熱収支や水収支、水蒸気輸送に着目して、それらに関する物理量について年平均や季節平均での緯度分布を調べた。

DCPAM を用いた数値実験では、地表面データを与え、5年積分の計算を行った。実験の結果、全球平均・年平均した正味の大气加熱は  $1.7 \text{ [W/m}^2\text{]}$ 、水蒸気増加は  $0.2 \text{ [W/m}^2\text{]}$  となり、概ね収支がつりあうような計算結果が得られた。また大気の熱収支・水収支に関わる物理量の緯度分布については、2種類の再解析データが示す地球大気の特徴を大まかに捉えている結果が得られた。用いているモデルの違いによると思われる再解析データとの相違点も部分的に見られたものの、DCPAM を用いた数値実験では、実際の地球大気の特徴を概ねよく表現できている結果が得られた。

# 目次

|          |                                    |           |
|----------|------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>はじめに</b>                        | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>惑星大気大循環モデル DCPAM の説明</b>        | <b>2</b>  |
| 2.1      | 座標系の取り方 . . . . .                  | 2         |
| 2.2      | 力学過程の支配方程式系 . . . . .              | 2         |
| 2.3      | 物理過程 . . . . .                     | 6         |
| 2.4      | 離散化の方法 . . . . .                   | 6         |
| <b>3</b> | <b>DCPAM5 による地球大気を想定した数値実験</b>     | <b>7</b>  |
| 3.1      | 実験の概要 . . . . .                    | 7         |
| 3.2      | 計算設定 . . . . .                     | 7         |
| <b>4</b> | <b>再解析データの説明</b>                   | <b>9</b>  |
| 4.1      | 最解析データの種類と詳細 . . . . .             | 9         |
| 4.2      | 再解析データの取得方法 . . . . .              | 9         |
| 4.3      | 再解析データの描画方法 . . . . .              | 11        |
| <b>5</b> | <b>結果および考察</b>                     | <b>12</b> |
| 5.1      | DCPAM5 による実験結果と再解析データの比較 . . . . . | 12        |
| 5.1.1    | 熱収支 . . . . .                      | 12        |
| 5.1.2    | 水収支 . . . . .                      | 19        |
| 5.1.3    | 循環場の物理量と水蒸気輸送 . . . . .            | 24        |
| 5.2      | 再解析データと ERBE データの比較 . . . . .      | 28        |

|          |                            |           |
|----------|----------------------------|-----------|
| <b>6</b> | <b>まとめと展望</b>              | <b>35</b> |
|          | 謝辞                         | 36        |
|          | 参考文献                       | 37        |
|          | 付録 A: DCPAM5 力学過程支配方程式系の導出 | 39        |
|          | 付録 B: 計算設定の異なる実験結果の比較      | 63        |
|          | 付録 C: 再解析データの描画スクリプト       | 75        |

# 1 はじめに

近年多種多様な惑星が太陽系外で次々に発見されている中で、そのような惑星のハビタビリティ(生命存在可能性)を考察する研究が行われるようになった。ハビタビリティを考察する上で重要視されるものの一つとして、その惑星の全球的な気候があげられる。惑星の全球的な気候を議論するための要素としてあげられるのは、大気での熱収支や熱輸送、水収支や水蒸気輸送などである。これらには惑星の全球的規模で起こる大気の循環運動、すなわち大気大循環が大きく関与している。大気大循環を表現するにはGCMを用いた数値実験を行うのが有用な手法である。系外惑星における大気の運動を評価するには、その多様性や観測データの少なさを考慮すると、GCMを用いた手法が特に有用だといえる。

GCMとは、General Circulation Modelの略記で大気大循環モデルのことである。GCMは、運動方程式で表される風の変化から気温・水蒸気・オゾンといった物質や物理量の輸送、放射・対流・潜熱放出・地面とのエネルギー交換、大気の内エネルギーの変化、空気塊上昇や風速の変化へと変換される大気加熱などを計算する数値モデルである。

本研究ではGCMの一つであるDCPAMを用いて地球の大気を想定した条件の下で数値実験を行い、熱収支、水収支、水蒸気輸送について評価・議論した。また、DCPAMによる計算結果がどれほど実際の地球大気を表現できているのかを確かめるために、ERA40とNCEPの再解析データとの比較を行った。本論文ではDCPAMの概要についても説明しており、力学過程の支配方程式系については付録で導出過程も説明した。

## 2 惑星大気大循環モデル DCPAM の説明

本研究では、地球を想定した大気の大循環を計算するため、地球流体電脳倶楽部 [19] によって開発されている惑星大気大循環モデル DCPAM を用いた。ここでは DCPAM の概要を述べる。詳細は DCPAM のドキュメント [5] と本論文の付録 A を参照されたい。

DCPAM とは、Dennou-Club Planetary Atmospheric Model の略記で、3次元球面上のプリミティブ方程式系に従う大気の大循環を計算する数値モデルである。本研究では DCPAM5(20150217 版) を用いた<sup>1)</sup>。DCPAM5 での計算は力学過程と物理過程に大きく分かれている。力学過程では流体力学の基礎方程式を用いて物質の移流などを扱っており、物理過程では放射過程などを扱っている。本節では、DCPAM5 での座標系の取り方や離散化の方法、力学過程の支配方程式系を紹介する。

### 2.1 座標系の取り方

DCPAM5 で用いられている座標系は、水平方向には緯度  $\varphi$ 、経度  $\lambda$  を、鉛直方向には気圧  $p(\varphi, \lambda, z)$  を惑星表面気圧  $p_s(\varphi, \lambda)$  で規格化した  $\sigma = \frac{p}{p_s}$  をとる。

### 2.2 力学過程の支配方程式系

大気の大規模な循環は、静力学平衡を仮定したプリミティブ方程式系を用いて記述される。DCPAM5 の力学過程は、流体力学の基礎方程式系に、回転系への変換、球座標への変換、静力学平衡近似および薄い球殻近似、 $z$  座標から  $\sigma$  座標への変換を施すことにより得られる、以下の支配方程式系に従う。詳しい導出については本論文の付録 A を参照されたい。

---

<sup>1)</sup>現在は 20150804 版が出ている。

連続の式

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_{\sigma} \pi = -D - \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma}. \quad (2.1)$$

静水圧の式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \frac{RT_v}{\sigma}. \quad (2.2)$$

運動方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{a} \left( \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial V_A}{\partial \lambda} - \frac{\partial U_A}{\partial \mu} \right) + \mathcal{D}(\zeta), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a} \left( \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial U_A}{\partial \lambda} + \frac{\partial V_A}{\partial \mu} \right) - \nabla_{\sigma}^2 (\Phi + R\bar{T}\pi + KE) + \mathcal{D}(D). \quad (2.4)$$

熱力学の式

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = & -\frac{1}{a} \left( \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial UT'}{\partial \lambda} + \frac{\partial VT'}{\partial \mu} \right) + T'D \\ & - \dot{\sigma} \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \kappa T_v \left( \frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_{\sigma} \pi + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right) + \frac{Q}{C_p} + \mathcal{D}(T) + \mathcal{D}'(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

水蒸気の式

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{1}{a} \left( \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial U_q}{\partial \lambda} + \frac{\partial V_q}{\partial \mu} \right) + qD - \dot{\sigma} \frac{\partial q}{\partial \sigma} + S_q + \mathcal{D}(q). \quad (2.6)$$

なお、鉛直流に関する境界条件は、

$$\dot{\sigma} = 0 \quad \text{at} \quad \sigma = 0, 1 \quad (2.7)$$

である。

以上の式で用いられている独立変数や予報変数, 診断変数は以下の通りである [20].

- 独立変数

$\varphi$ : 緯度 [deg.]

( $\mu \equiv \sin \varphi$ )

$\lambda$ : 経度 [deg.]

$\sigma \equiv p/p_s$

$t$ : 時間 [s]

(2.8)

- モデルで時間発展を計算する予報変数

$\pi(\varphi, \lambda) \equiv \ln p_s$

$T(\varphi, \lambda, \sigma)$ : 気温 [K]

$q(\varphi, \lambda, \sigma)$ : 比湿 [ $\text{kg kg}^{-1}$ ]

$\zeta(\varphi, \lambda, \sigma) \equiv \frac{1}{a} \left( \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial V}{\partial \lambda} - \frac{\partial U}{\partial \mu} \right)$ : 渦度 [ $\text{s}^{-1}$ ]

$D(\varphi, \lambda, \sigma) \equiv \frac{1}{a} \left( \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{\partial V}{\partial \mu} \right)$ : 発散 [ $\text{s}^{-1}$ ]

ここで,

$U(\varphi, \lambda, \sigma) \equiv u(\varphi, \lambda, \sigma) \cos \varphi$

$V(\varphi, \lambda, \sigma) \equiv v(\varphi, \lambda, \sigma) \cos \varphi$

$u$ : 東西風速 [ $\text{m s}^{-1}$ ]

$v$ : 南北風速 [ $\text{m s}^{-1}$ ]

である.



- 各時間ステップで診断的に求められる変数

$$\Phi \equiv gz: \text{ジオポテンシャル高度 [m}^2\text{s}^{-2}\text{]}$$

$$\dot{\sigma} \equiv \frac{d\sigma}{dt} \equiv \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{u}{a \cos\varphi} \frac{\partial\sigma}{\partial\lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma}{\partial\sigma}$$

$$\bar{T}(\sigma): \text{基準温度 [K]}$$

$$T'(\varphi, \lambda, \sigma) \equiv T - \bar{T}$$

$$T_v(\varphi, \lambda, \sigma) \equiv T(1 + (\epsilon_v^{-1} - 1)q)$$

$$T'_v(\varphi, \lambda, \sigma) \equiv T_v - \bar{T}$$

$$U_A(\varphi, \lambda, \sigma) \equiv (\zeta + f)V - \dot{\sigma} \frac{\partial U}{\partial\sigma} - \frac{RT'_v}{a} \frac{\partial\pi}{\partial\lambda} + \mathcal{F}_\lambda \cos\varphi$$

$$V_A(\varphi, \lambda, \sigma) \equiv -(\zeta + f)U - \dot{\sigma} \frac{\partial V}{\partial\sigma} - \frac{RT'_v}{a} (1 - \mu^2) \frac{\partial\pi}{\partial\mu} + \mathcal{F}_\varphi \cos\varphi$$

$$\mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi \equiv \frac{U}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial\pi}{\partial\lambda} + \frac{V}{a} \frac{\partial\pi}{\partial\mu}$$

$$\nabla_\sigma^2 \equiv \frac{1}{a^2(1 - \mu^2)} \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial\mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial\mu} \right]$$

$$KE(\varphi, \lambda, \sigma) \equiv \frac{U^2 + V^2}{2(1 - \mu^2)}$$

$\mathcal{D}(\zeta)$ : 渦度の水平拡散とスポンジ層における散逸

$\mathcal{D}(D)$ : 発散の水平拡散とスポンジ層における散逸

$\mathcal{D}(T)$ : 熱の水平拡散とスポンジ層における散逸

$\mathcal{D}(q)$ : 水蒸気の水平拡散とスポンジ層における散逸

$\mathcal{F}_\lambda(\varphi, \lambda, \sigma)$ : 小規模運動過程 (経度方向)

$\mathcal{F}_\varphi(\varphi, \lambda, \sigma)$ : 小規模運動過程 (緯度方向)

$Q(\varphi, \lambda, \sigma)$ : 放射, 凝結, 小規模運動過程等による加熱・温度変化

$S_q(\varphi, \lambda, \sigma)$ : 凝結, 小規模運動過程等による水蒸気ソース

$\mathcal{D}'_v(\varphi, \lambda, \sigma)$ : 摩擦熱

- 定数

$a$ : 惑星半径 [m]

$R$ : 乾燥大気の気体定数 [ $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ]

$C_p$ : 乾燥大気の定圧比熱 [ $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ]

( $\kappa \equiv R/C_p$ )

$f$ : コリオリパラメータ [ $\text{s}^{-1}$ ]

$\epsilon_v$ : 水蒸気分子量比

## 2.3 物理過程

力学過程の支配方程式系における  $D$  や  $Q$  等で示されるような粘性項や非断熱加熱項は、様々な物理過程を考慮して計算されている。ここではその概要を述べる。放射過程は地球大気用放射モデルを用いている。長波放射では Chou et al. (2001) [4] のスキームに従い、 $H_2O$ ,  $CO_2$ ,  $O_3$ , 雲による吸収が考慮され、短波放射では Chou and Lee (1996) [2] や Chou et al. (1998) [3] のスキームに従い、 $H_2O$ ,  $O_3$ , 雲による吸収・散乱、レイリー散乱が考慮されている。鉛直拡散の評価には、Mellor and Yamada (1982)[11] の level 2.5 が用いられている。地表面フラックスの評価には Louis et al. (1982)[7] のバルク法が用いられている。積雲パラメタリゼーションには、Moorthi and Suarez (1992)[12] の Relaxed Arakawa-Schubert スキームが用いられている。降水過程では大規模凝結の評価は Manabe et al. (1965)[8] に従って考慮されている。雲モデルでは雲水の移流と雲氷は無視している。また、雲の生成は水蒸気の凝結によって生じ、設定した雲の消滅時間が経過することで降水となり、降水は最下層温度に応じて雪となると仮定している。雨から雪になる際の潜熱は無視している。なお、雲量は 1 と仮定している。土壌水分量の決定には Manabe et al. (1965)[8] のバケツモデルが用いられている。

## 2.4 離散化の方法

離散化には、水平方向にはスペクトル変換法を、鉛直方向には Arakawa and Suarez (1983) [1] の差分法を、時間方向にはセミインプリシット法(力学過程)と陽解法・陰解法(物理過程)を用いている。

## 3 DCPAM5 による地球大気を想定した数値実験

本章では, 本研究で行った DCPAM5 による数値実験の概要とその計算設定について述べる.

### 3.1 実験の概要

地球を想定した条件の下で数値実験を行い, 大気における熱収支, 水収支, 水蒸気輸送の様子を調べることを試みた. 本研究では, 空間解像度や雲の消滅時間が異なる 3 種類の地球設定の計算を行った. 次節では, 3 種類の計算のうち, 第 5 章において再解析データとの比較を行った 1 種類の計算について, その計算設定を説明する. 残りの 2 種類の計算設定および計算結果については付録 B を参照されたい.

### 3.2 計算設定

以下に DCPAM5 を用いて行った数値実験の計算設定と使用データをまとめる.

- 空間解像度: T42L26(緯度方向に 64 個, 経度方向に 128 個の格子点. 鉛直層数は 26.)
- 時間解像度: 3 分
- 積分時間: 5 年
- 雲の消滅時間: 1500 秒
- 表面アルベド: 海上 0.1, 陸上 0.3
- 地形: ETOPO1[15] による地形データの平均
- 土地利用: Matthews, E.(1983, 1984)[9][10] の補間データ
- 海氷面温度分布: AMIP II[16] 境界値の気候値の平均
- 海氷面密度分布: AMIP II[16] 境界値の気候値の平均
- オゾン分布: CMIP5[17] 設定値の気候値の東西平均

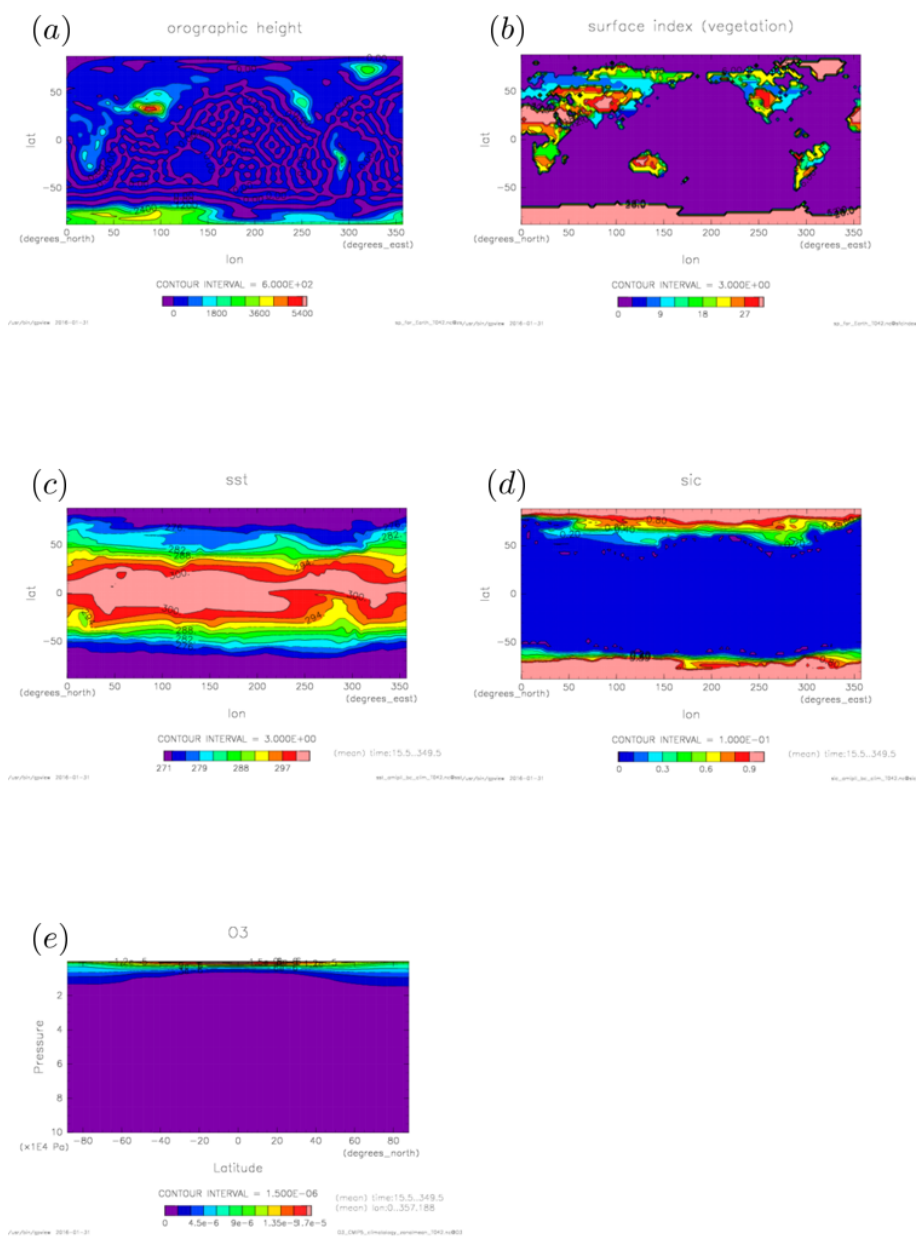


図 3.1: DCPAM5 を用いて行った数値実験における使用データ. (a) 地形, 等値線間隔は  $6.0 \times 10^2$  [m] (b) 土地利用, 等値線間隔は 3.0 (c) 海水面温度分布, 等値線間隔は 3.0 (d) 海水面密度分布, 等値線間隔は  $1.0 \times 10^{-1}$  (e) オゾン分布, 等値線間隔は  $1.5 \times 10^{-6}$  である.

## 4 再解析データの説明

本研究では, DCPAM による計算結果がどれくらい実際の地球の気候を表現できているのかを検討するために, 計算結果を再解析データと比較することを試みた. 以下では本研究で用いた再解析データの詳細と取得方法について述べる.

### 4.1 最解析データの種類と詳細

再解析データとは, 地球に関する過去数十年の地上観測や衛星観測などによる気象観測データを入力しながら GCM を用いて計算された格子点気象データのことである. 本研究では, ヨーロッパ中期気象予報センター (ECMWF) が提供している ERA40 と, 米国国立環境予報センター (NCEP) が提供している NCEP-DOE Reanalysis-2 (以下 NCEP2) の再解析データを用いた. それぞれのデータに関する詳細は表 4.1 の通りである.

|                   | ERA40                            | NCEP2   |
|-------------------|----------------------------------|---|
| 空間解像度 (lon × lat) | 144 × 73                         | Pressure level data: 144×73<br>Gaussian Grid data: 192×94 |
| 積分期間              | 1957/09/01 - 2002/08/31          | 1979/01/01 - 2015/07/31                                   |
| 時間の単位             | hours since 1900/01/01 00:00:0.0 | hours since 1800/01/01 00:00:00                           |
| 各物理量              | 6 時間積分値の 1ヶ月平均値                  | 6 時間平均値の 1ヶ月平均値   |

表 4.1: 本研究で用いた ERA40 と NCEP2 のデータの詳細.

### 4.2 再解析データの取得方法

ERA40 のデータは ECMWF の Web ページ [6] で取得できる. なお, ERA40 のデータ取得の際にはアカウント登録が必要なので注意されたい. また, ERA40 では取得するデータの積分期間を指定でき, データの種類を MARS, GRIB, NetCDF の 3 種類から選ぶことができる. 本研究では NetCDF に指定した. NCEP2 のデータは NOAA の Web ページ [14] で取得できる. また, データの期間を指定したり, NetCDF 以外のデータは選ぶことはできない. なお, NCEP2 では比湿のデータを出力していない. 相対湿度のデータを用いて計算する必要があるが, NCEP2 で用いられているモデルにおいて, どの飽和水蒸気圧の式を用いているのかわからず, NOAA/ESRL/PSD に問い合わせ中のため, 今のところ計算はできていない. 地球大気のエネルギー収支や水収支, 循環場に関する各物理量に対応するそれぞれのデータのファイル名は表 4.2 にまとめた.

|                     | ERA40  | NCEP2                            |
|---------------------|--|----------------------------------|
| Surface / NTAT      |  |                                  |
| 正味大気上端外向き長波放射 (OLR) | Top net thermal radiation                            | ulwrf(NTAT)                      |
| 正味大気上端外向き短波放射 (OSR) | Top net solar radiation                              | uswrf(NTAT) - dswrf(NTAT)        |
| 正味大気下端外向き長波放射 (SLR) | Surface net thermal radiation                        | ulwrf(Surface) - dlwrf(Surface)  |
| 正味大気下端外向き短波放射 (SSR) | Surface net solar radiation                          | uswrf(Surface) - dswrf(Surface)  |
| 顕熱フラックス             | Surface sensible heat flux                           | Sensible heat net flux (Surface) |
| 蒸発散フラックス            | Evaporation  | Latent heat net hlux (Surface)   |
| 降水量                 | Convective precipitation + Large-scale precipitation | Precipitation rate (Surface)     |
| Pressure levels     |  |                                  |
| 比湿                  | Specific humidity                                    | -                                |
| 東西風                 | U component of wind                                  | u-wind                           |
| 南北風                 | V component of wind                                  | v-wind                           |
| 鉛直速度                | Vertical velocity                                    | Omega                            |

表 4.2: 熱収支や循環場に関する各物理量の月平均データのファイル名. なお, ERA40 の全球での降水量を求めるには, Convective precipitation の値と Large-scale precipitation の値を足し算する必要がある. また, NCEP2 での OSR, SLR, SSR について正味の値を求めるには, それぞれ表中のように引き算をする必要がある.

### 4.3 再解析データの描画方法

本論文第4章で説明した再解析データを, 年平均や各季節ごと(春:3-5月, 夏:6-8月, 秋:9-11月, 冬:12-2月)の3ヶ月平均を計算し描画する方法の一例を紹介する. 本研究で作成した描画スクリプトが本論文の付録Cにあるので参照されたい.

まず ERA40 のデータに関して注意すべき点は, 4.1 節で説明したように各物理量は6時間積分値の1ヶ月平均値になっているので, 単位を  $W/m^2$  にするには6時間の秒数すなわち 21600 秒で割らなくてはならない点である. それに加えて, 凝結加熱率を計算する際には, 降水量のデータに水の潜熱と水の密度をかけて単位を  $W/m^2$  にする必要があることに注意されたい. 一方 NCEP2 のデータは, 4.1 節で説明したように各物理量は6時間平均値の1ヶ月平均値であるため, ERA40 のデータのように単位変換をする必要はない. また, 降水量から凝結加熱率に変換する際に, NCEP2 の場合は水の潜熱のみをかければよい.

季節変化の図は, ERA40 と NCEP2 とではほぼ同じ方法で描くことができる. 詳しくは付録Cのスクリプトを参照されたいが, 大まかな手順としては, Ruby の Time.new というクラスを用いて, 指定する年の3ヶ月ごとの日数と, その3ヶ月間の最初の日と最後の日が積分開始時間から何時間目であるかを計算する. なおこのクラスを用いるとうるう年も考慮される. そして, 季節平均を計算したい各物理量に対して, 上記の方法で求めた3ヶ月間の最初の日から最後の日までの時間平均を計算し, 最後に経度平均を取る. 以上のような方法で各季節平均の東西平均の図を描画することができる.

## 5 結果および考察

本章では、第3章で説明した DCPAM5 を用いた地球設定の実験結果と、第4章で説明した ERA40 および NCEP-DOE Reanalysis-2 (以下 NCEP2) の再解析データを比較する。比較の際には、大気における正味の熱収支および水収支、循環場の物理量に着目する。また、2種類の再解析データについて、どちらがより実際の地球の大気を表現できているのかを確かめるために、NASA Earth Radiation Budget Experiment (以下 ERBE) の観測データと比較する。

### 5.1 DCPAM5 による実験結果と再解析データの比較

ここでは、DCPAM5 を用いた地球実験結果がどれほど実際の地球の大気を表現できているのかを確かめることを目的として、ERA40 と NCEP2 の再解析データとの比較を行う。計算設定や再解析データの詳細に関しては、第3, 4章を参照されたい。

#### 5.1.1 熱収支

DCPAM5 による実験で得られたデータと ERA40 および NCEP2 の再解析データを、年平均および季節平均での大気における正味の熱収支について比較する。大気における正味の熱収支に関するエネルギーフラックスは、正味大気上端外向き長波放射 (OLR), 正味大気上端外向き短波放射 (OSR), 正味大気下端外向き長波放射 (SLR), 正味大気下端外向き短波放射 (SSR), 地表面顕熱フラックス, 凝結加熱率の6種類である。正味の大気加熱はこれらのエネルギーフラックスを大気に対する入出で区別して評価した。具体的には、OLR と SSR は大気から出ていくエネルギー、それ以外は全て大気に入るエネルギーとした。具体的には次式のように計算した。

$$\text{熱収支} = -|\text{OLR}| + |\text{OSR}| + |\text{SLR}| - |\text{SSR}| + |\text{顕熱}| + |\text{凝結熱}|.$$

なお、単位はすべて  $\text{W}/\text{m}^2$  である。

図 5.1-4 は、年平均および季節平均での上記のエネルギーフラックスの東西平均である。年平均は、DCPAM5 では5年積分計算における4年目の12月から5年目の11月の1年平均、ERA40 では4.1節の表 4.1 に示す積分期間全ての平均(約40年平均)、NCEP2 では同じく表 4.1 に示す積分期間全ての平均(約30年平均)である。季節平均は、春(3-5月)、夏(6-8月)、秋(9-11月)、冬(12-2月)の3ヶ月ごとの平均である。再解析データにおける年平均・季節平均の東西平均した緯度分布の計算・描画方法は本論文の付録 C を参照されたい。



まず図 5.1 に示す年平均でのエネルギーフラックスの緯度分布について比較する。OLR, OSR, SSR に関しては大まかに、赤道付近で極小値、緯度 30 度付近で極大値を持ち、極向きに放射が小さくなっていくという特徴をもつ。顕熱フラックスや SLR は、おおまかに赤道付近と緯度 50-60 度域に極小値、緯度 20-40 度域や緯度 60-80 度域で極大値をもつような緯度分布となっている。凝結加熱率の緯度分布は、赤道付近に 2 つのピーク、緯度 40-60 度域で広いピークを持つという特徴をもつ。これらの大まかな特徴は、DCPAM5 による実験の結果得られたデータと再解析データとで共通している。ここで図 5.2 を見ると、熱収支に関しては計算結果と再解析データとの差はほとんど無いのに対し、DCPAM5 の OLR や SLR が再解析データと比べ放射が弱くなっている。しかし、大気に対して SLR として入るエネルギーが少ない分、OLR として出ていくエネルギーが少ないと考えると、収支で見た時に差が出ないことは納得できる。

次に図 5.3-4 に示す季節変化について比較する。DCPAM5 の計算結果と再解析データの共通点は、3-5 月および 6-8 月の 3ヶ月平均では、どちらにおいても北半球の方が南半球に比べ放射が大きく、熱収支で見ても北半球の方が正味の大気加熱が大きいことである。また北半球の夏に当たる 6-8 月の方がその度合いも大きい。反対に 9-11 月および 12-2 月では南半球の方が放射も正味の大気加熱も大きい。また同様に南半球の夏に当たる 12-2 月の方がその度合いも大きい。一方で相違点は、どの季節においても DCPAM5 の凝結加熱率は、再解析データと比べてピークが鋭く、特に緯度 40-60 度域での値の差が大きい。この特徴は年平均での熱収支を見てもわかる。これはおそらく計算で設定する雲の消滅時間などの違いや、使用しているモデルの違いによるものと思われる。

また、DCPAM5 の実験結果について、熱収支に関する物理量のデータを格子面積で重み付けして求めた年平均での全球平均値を表 5.1 にまとめた。表中の値の正負は大気へのエネルギーの入出を区別しており、熱収支とは大気に対する正味の加熱を表している。

| (W/m <sup>2</sup> ) | DCPAM5 |
|---------------------|--------|
| OLR                 | -230.4 |
| OSR                 | 223.7  |
| SLR                 | 37.6   |
| SSR                 | -154.6 |
| 地表面顕熱フラックス          | 17.0   |
| 凝結加熱率               | 108.4  |
| 熱収支                 | 1.7    |

表 5.1: 熱収支に関する各物理量のデータを格子面積で重み付けして求めた年平均での全球平均値.

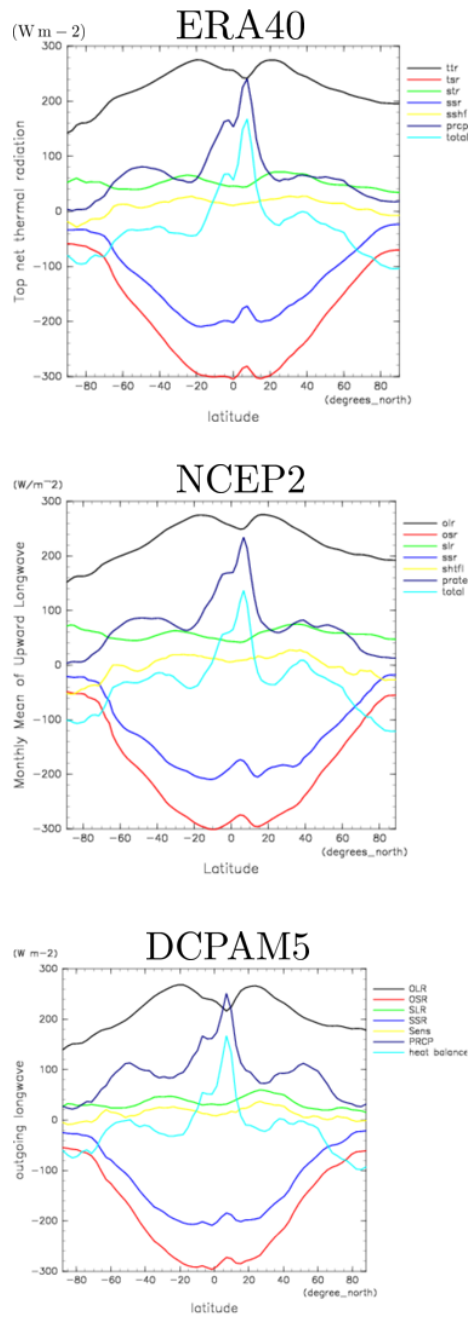


図 5.1: 大気の内味加熱に関するエネルギーフラックスの東西平均 (年平均). 上図は ERA40, 中図は NCEP2, 下図は DCPAM5 である. 横軸は緯度 [degree north], 縦軸はエネルギーフラックス [ $W/m^2$ ] である. グラフはそれぞれ, 黒色線が OLR, 赤色線が OSR, 緑色線が SLR, 青色線が SSR, 黄色線が地表面顕熱フラックス, 紺色線が凝結加熱率, 水色線が大気に対する内味の加熱を示す.

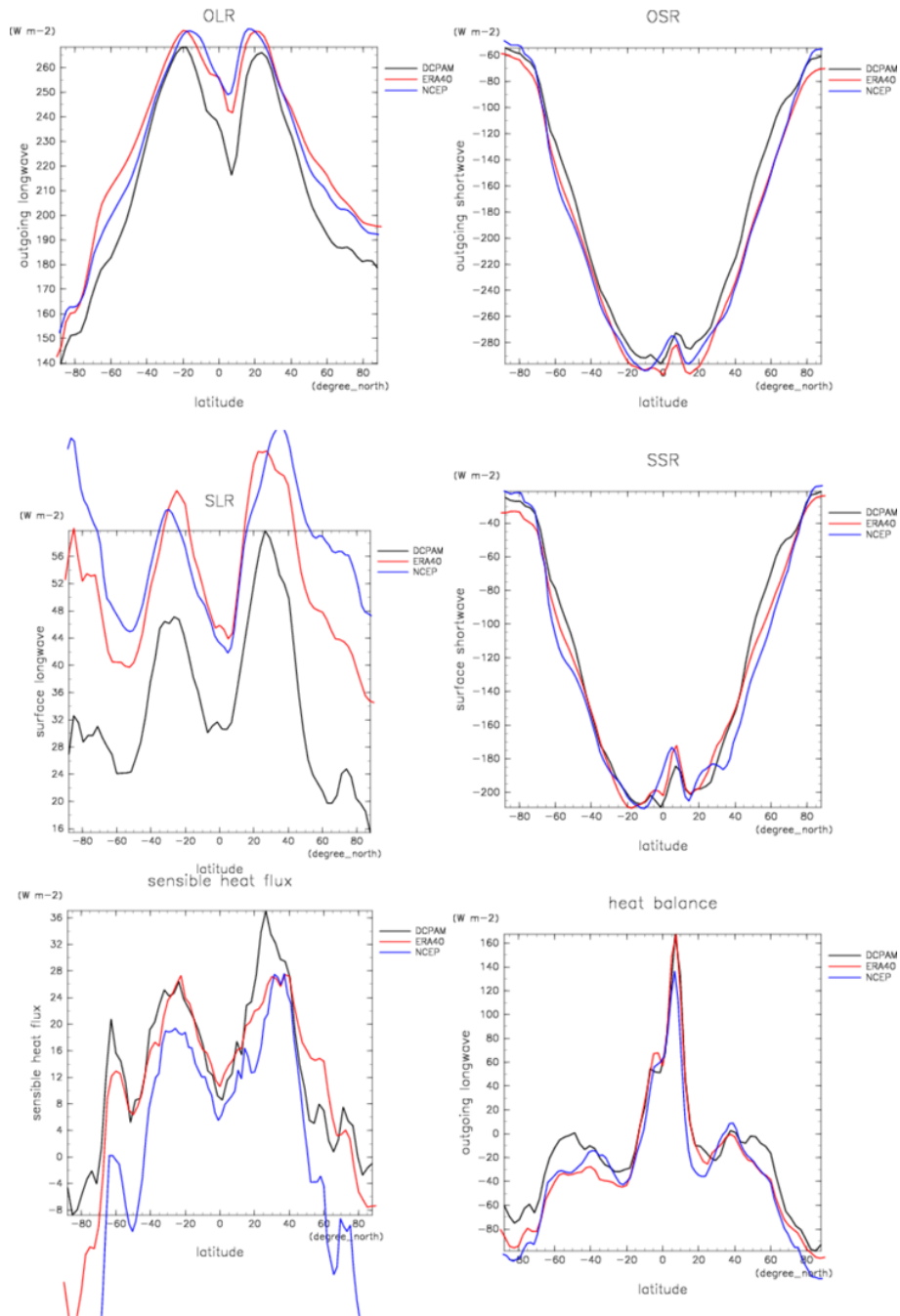


図 5.2: 東西平均エネルギーフラックスの緯度分布. 左上は OLR, 右上は OSR, 左中は SLR, 右中は SSR, 左下は地表面顕熱フラックス, 右下は正味の大気加熱 (年平均). 横軸は緯度 [degree north], 縦軸はエネルギーフラックス [ $\text{W}/\text{m}^2$ ] である. 図 5.1 に示した結果を物理量ごとに重ね書きしたものである. 赤色線は ERA40, 青色線は NCEP2, 黒色線は DCPAM5 のグラフ.

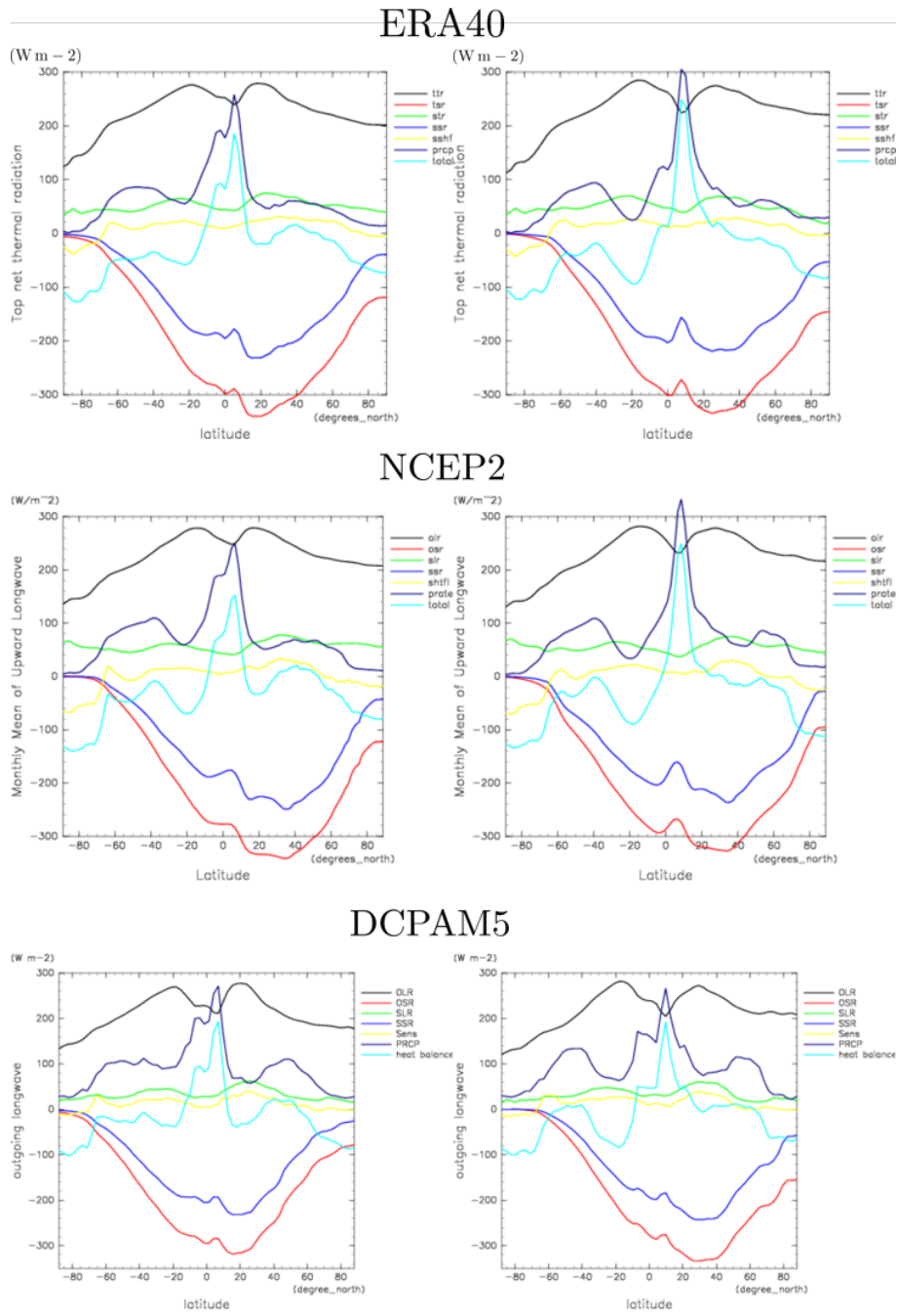


図 5.3: 図 5.1 と同じ. 左列は春平均, 右列は夏平均.

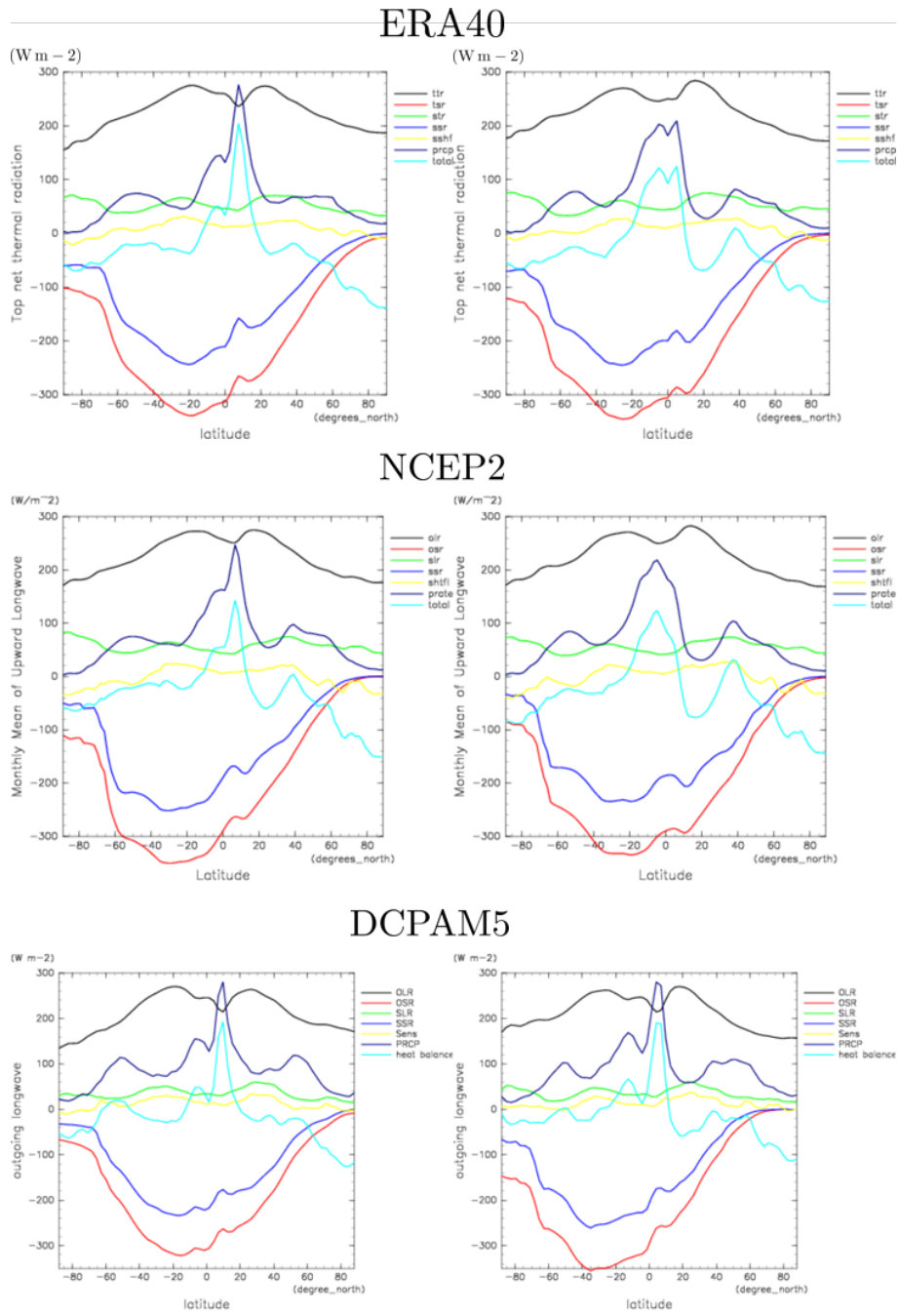


図 5.4: 図 5.1 と同じ. 左列は秋平均, 右列は冬平均.

### 5.1.2 水収支

DCPAM5 の地球実験結果と ERA40 および NCEP2 の再解析データにおいて、年平均および季節平均での大気における正味の水収支について比較する。大気の水蒸気増加は、凝結加熱率と蒸発散フラックスで評価した。なお、単位はすべて  $W/m^2$  である。

図 5.5-7 は、年平均および季節平均での上記のエネルギーフラックスの東西平均である。年平均と季節平均の取り方は前節の熱収支の場合と同じである。

まず、図 5.5 に示す年平均での水収支に関するエネルギーフラックスの緯度分布について比較する。DCPAM5 による実験の結果得られたデータと再解析データの共通点は、凝結加熱率は赤道付近に 2 つの鋭いピーク、緯度 40-60 度域で広いピークを持ち、蒸発散フラックスは赤道付近で極小値、緯度 30 度付近で極大値を持ち、極方向に放射が小さくなっていくという特徴がある点である。また、蒸発散フラックスと凝結加熱率の差の緯度分布を見ると、低緯度域では凝結加熱が蒸発散を大きく上回り、中緯度域では反対に蒸発散の方が多い。そのため、正味の大気での水蒸気増加は、中緯度域で大きく低緯度域で小さいことがわかる。ここから、中緯度域の大気中に存在する大量の水蒸気は低緯度域と高緯度域に運ばれて降水となるという全球規模の水蒸気輸送が考えられるが、それについては次節で循環場の物理量の緯度分布と交えて考察する。一方、DCPAM5 と再解析データとの相違点は、DCPAM5 の凝結加熱率と蒸発散フラックスが再解析データと比べて全球的に値が大きい点である。特に凝結加熱率については緯度 40-60 度域でのピークがかなり大きい点が目立つ。しかし、水収支の図を見てみると DCPAM5 の計算結果と再解析データとはそこまで目立った差はない。したがって、DCPAM5 の計算結果における水収支は結果的につり合いがとれていることが確認できる。上で述べたような違いはおそらく使用しているモデルの違いや、雲の消滅時間の設定によるものだと思われる。

次に図 5.6-7 に示す季節変化について比較する。DCPAM5 による実験の結果得られたデータと再解析データの共通点は、低緯度域では季節変化に関わらず 1 年を通して凝結加熱が蒸発散を上回っており、中緯度域では 6-8 月の北半球と 12-2 月の南半球、つまり夏季に蒸発散が凝結加熱を上回ることである。また、3-5 月と 9-11 月の 3ヶ月平均では 6-8 月と 12-2 月の 3ヶ月平均と比べ全体的に値が小さく、南北での差も小さい。一方相違点は、DCPAM5 の計算結果では再解析データと比べて、3-5 月および 6-8 月では値が全体的に大きく、9-11 月および 12-2 月では反対に値が全体的に小さい。この違いが何によるものなのかはよくわからないが、おそらくモデルにおける計算の過程で生じる違いなのだろう。

また、水収支に関する物理量のデータを格子面積で重み付けして求めた年平均での全球平均値を表 5.2 にまとめた。水収支とは大気に対する正味の水蒸気増加を表し

ている。

| (W/m <sup>2</sup> ) | DCPAM5 |
|---------------------|--------|
| 蒸発散フラックス            | 108.6  |
| 凝結加熱率               | 108.4  |
| 水収支                 | 0.2    |

表 5.2: 水収支に関する各物理量のデータを格子面積で重み付けして求めた年平均での全球平均値.



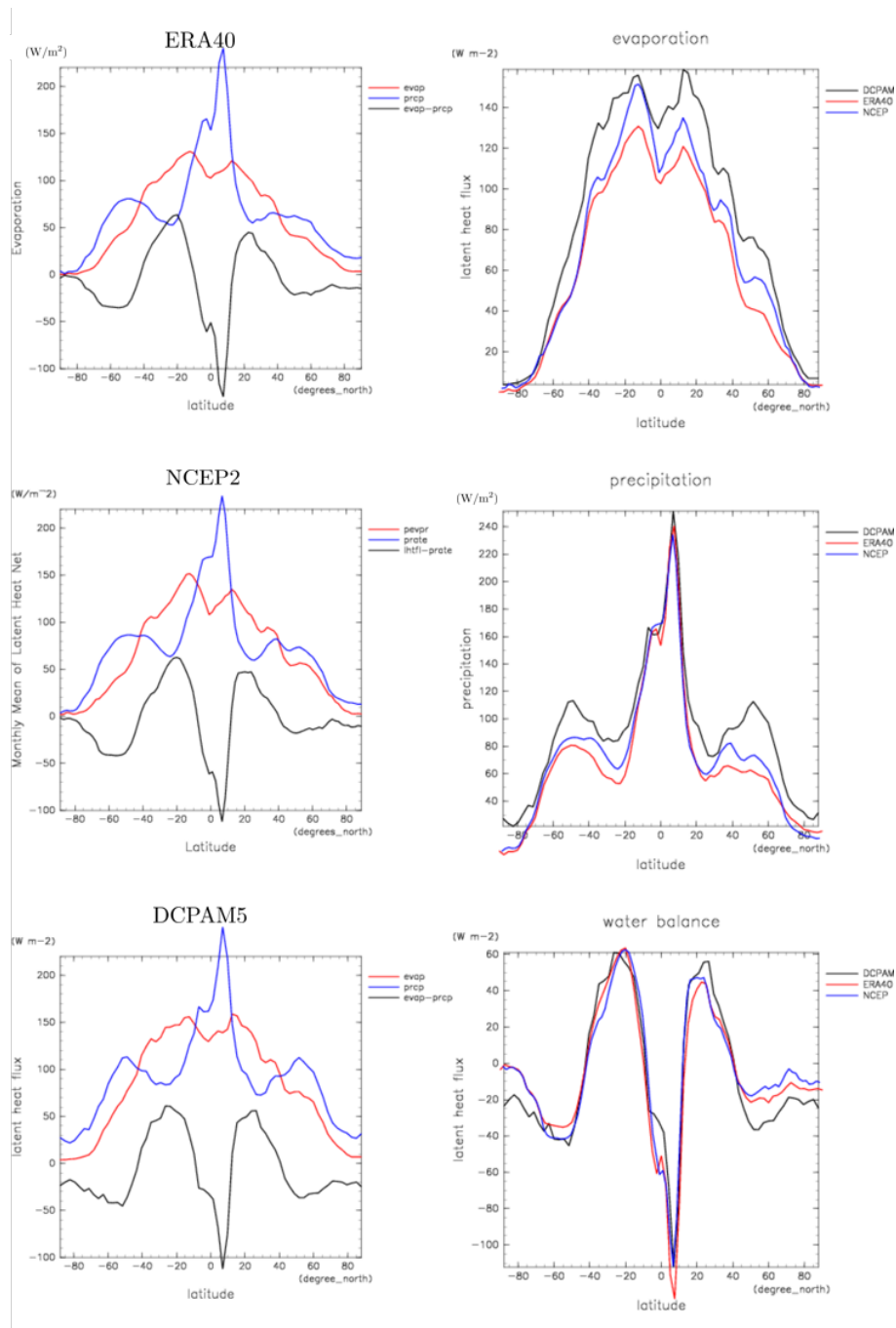


図 5.5: 水収支に関するエネルギーフラックスの東西平均 (年平均). 横軸は緯度 [degree north], 縦軸はエネルギーフラックス [W/m<sup>2</sup>] である. 左半分の3つの図は ERA40, NCEP2, DCPAM5 それぞれについて, 凝結加熱率 (青色線) と蒸発散フラックス (赤色線) とその差 (黒色線) を示したもので, 黒色線は大気に対する正味の水蒸気増加を表す. また右半分の3つの図は上記の3種類の物理量について, ERA40(赤色線), NCEP2(青色線), DCPAM5(黒色線) のグラフを重ね書きしたものである.

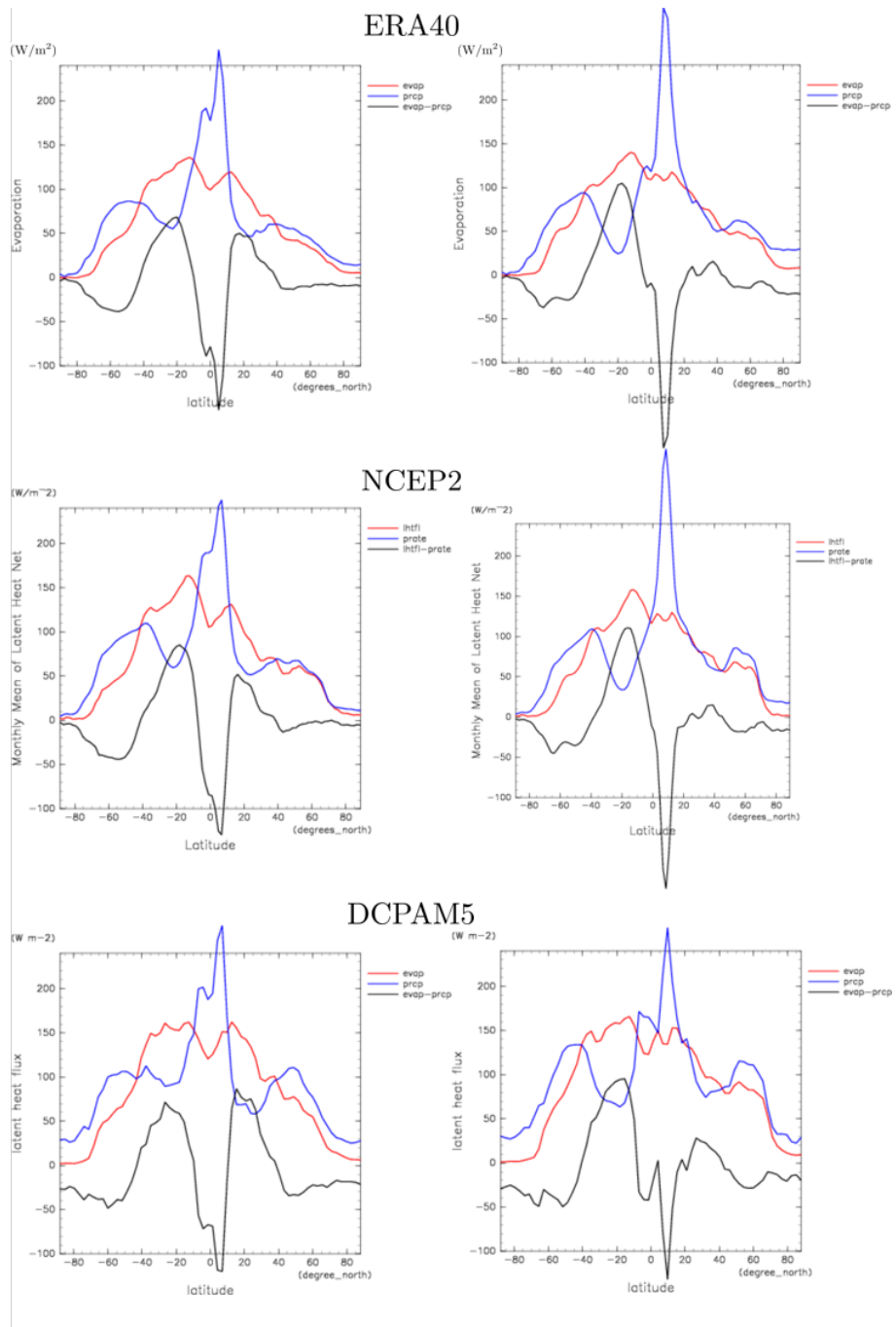


図 5.6: 図 5.5 と同じ. 左列は春平均, 右列は夏平均.

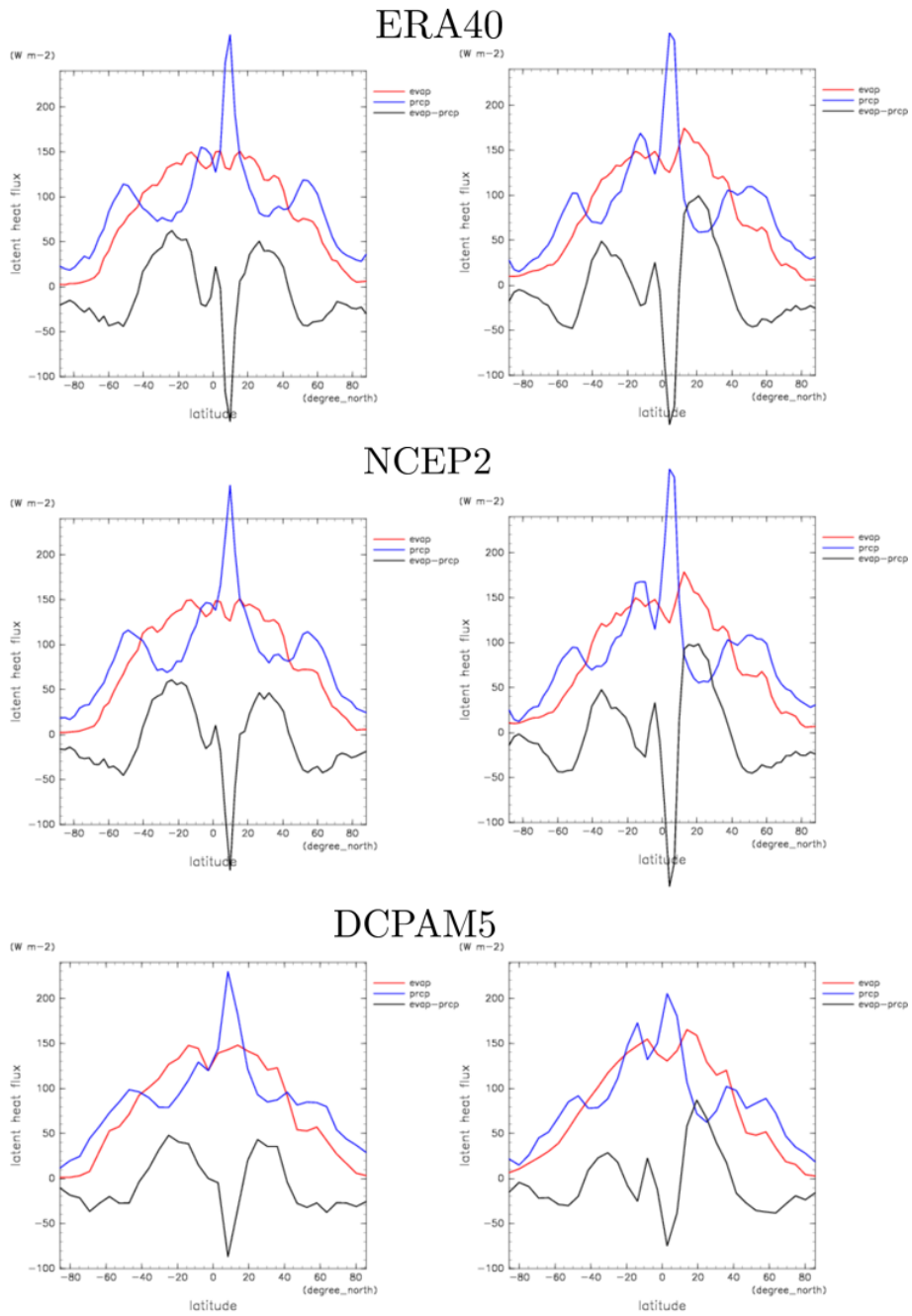


図 5.7: 図 5.5 と同じ. 左列は秋平均, 右列は冬平均.

### 5.1.3 循環場の物理量と水蒸気輸送

DCPAM5 による計算結果と ERA40 および NCEP2 の再解析データにおける、循環場の物理量の緯度分布についての比較をする。また比湿や凝結加熱率の緯度分布と交えて水蒸気輸送の説明を試みる。

まず図 5.8 に示す年平均した比湿の緯度分布を見ると、大気中の水蒸気は低緯度域で最も多く、高緯度、高高度になるほど少なくなっていく分布になっていることがわかる。なお、第 4 章でも述べたように、NCEP2 では比湿のデータを出力していないのでここで比較することはできなかった。凝結加熱率の特徴については前節で詳しく述べたのでここでは省略する。次に図 5.9 に示す東西風の図を見ると、DCPAM5 による実験の結果得られたデータと再解析データの共通点は、赤道付近と極付近では東風が分布しており、中・高緯度域では広く西風が分布している点である。これらは貿易風・極東風と偏西風に当たるものだろう。また、中緯度域の圧力高度 200 ミリバル付近では特に強い西風が分布している点も共通している。これは対流圏上層でのジェット気流に当たるものだろう。同じく図 5.9 に示す南北風の図を見ると、DCPAM5 によるデータと再解析データの共通点は、緯度 40 度付近を境に赤道向きの風と極向きの風が分布している点である。次に図 5.10 に示す年平均・東西平均した鉛直速度の図を見ると、DCPAM5 によるデータと再解析データの共通点は、赤道付近で上昇流、中緯度域で下降流が分布している点である。これらはハドレー循環の上昇流と下降流に当たるものだろう。

以上の特徴から、全球規模での水蒸気輸送の様子を説明することができる。赤道付近で比湿の分布が多く鉛直速度が負になっていることから、赤道付近で生じた大気中の水蒸気はハドレー循環の上昇流に運ばれて降水となることが考えられる。そして緯度 40 度付近を境に赤道向きの風と極向きの風が分布していることから、ハドレー循環の下降流域に当たる中緯度域の大気中の水蒸気は南北風により赤道側と極側両方へ輸送されることが考えられる。これらをまとめると、大気中の水蒸気輸送は、大きく分けて緯度 40 度付近を境に赤道向きと極向きの輸送が存在していることがわかる。これにより赤道付近と緯度 40-60 度域で降水量の極大が分布していることも説明ができる。

また、上で述べた物理量に関する緯度分布の特徴について、全体的に DCPAM5 による実験結果の値は再解析データのものと比べ大きくなっていることがわかった。具体的には、再解析データと比べて鉛直方向での比湿の勾配が大きいことや東西風や南北風が強いこと、ハドレー循環が強くなっていることがわかる。DCPAM5 の計算結果では高緯度域の傾圧不安定度が大きくなっているといえるだろう。これらは、前節で説明したような、再解析データと比べて高緯度域での正味の大気加熱が大きくなっていることや、正味の大気の水蒸気増加が小さいことの説明にもなる。

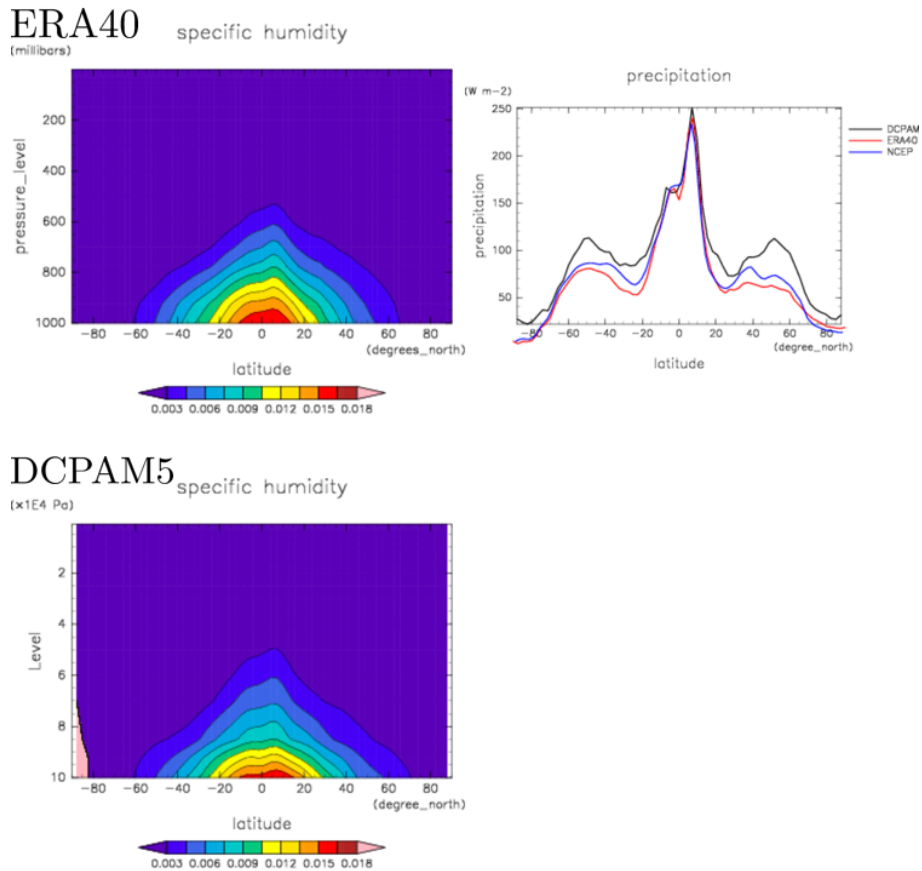


図 5.8: (左) 年平均・東西平均した比湿. 横軸は緯度 [degree north], 縦軸は圧力座標. 等値線間隔は  $1.5 \times 10^{-3}$  [kg/kg]. (右) 年平均・東西平均した凝結加熱率 (降水量に水の潜熱をかけたもの)(図 5.5 から再掲). 横軸は緯度 [degree north], 縦軸はエネルギーフラックス [ $\text{W}/\text{m}^2$ ] である. グラフはそれぞれ, 黒色線が DCPAM5, 赤色線が ERA40, 青色線が NCEP2 のデータである.

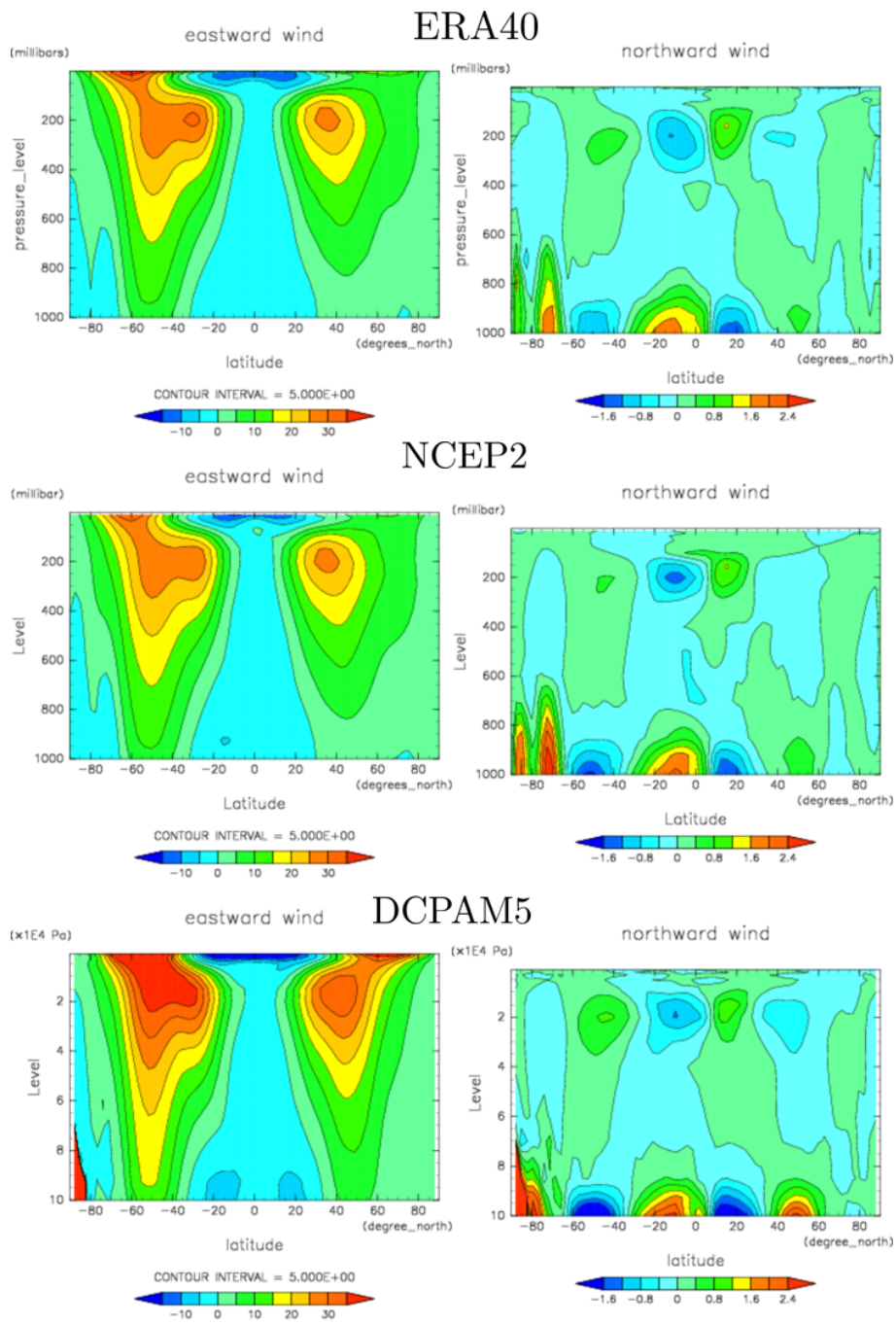


図 5.9: (左) 東西平均した東西風 (右) 東西平均した南北風. 横軸は緯度 [degree north], 縦軸は圧力座標, 等値線間隔は, 東西風は 5 [m/s], 南北風は 0.4 [m/s] である.

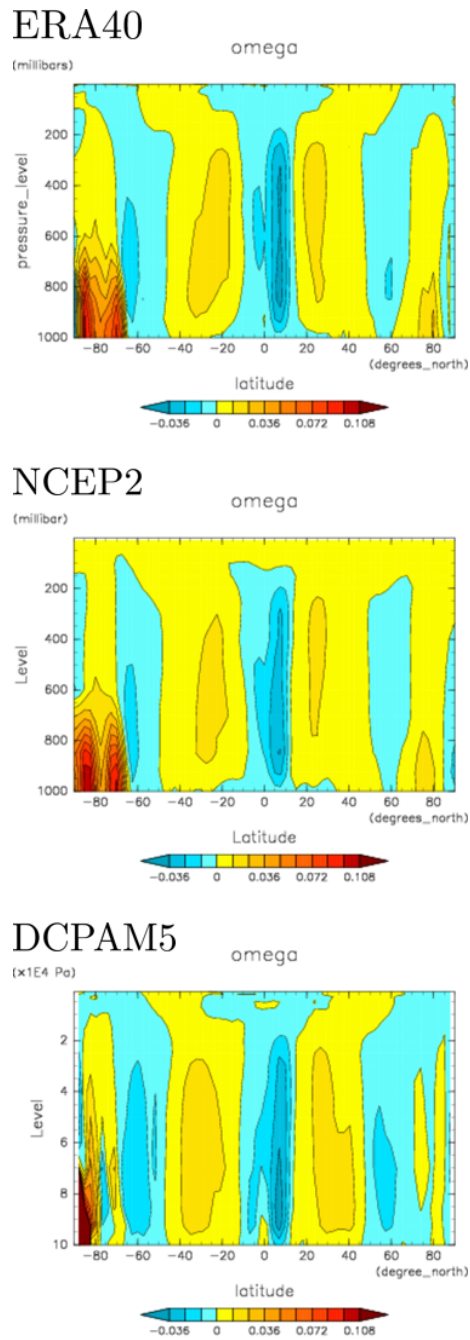


図 5.10: 東西平均した鉛直速度. 横軸は緯度 [degree north], 縦軸は圧力座標. 等値線間隔は 0.012 [Pa/s] である.

## 5.2 再解析データとERBEデータの比較

図 5.2 で示す DCPAM5 によるデータと再解析データの OLR の年平均した緯度分布を見ると、DCPAM5 によるデータは 2 つの再解析データと比べ全球的に値がかなり小さくなっていった。そこで、そもそも 2 種類の再解析データがどれほど実際の地球の大気を表現できているのかを確かめるために、OLR に着目して、NASA Earth Radiation Budget Experiment[13] (以下 ERBE) の観測データと比較する。ERBE とは、ERBS, NOAA 9 号, NOAA10 号の 3 つの衛星による地球放射の衛星観測データである。このデータには、緯度経度 2.5 度格子の空間解像度で、時間は月ごとで集計した値が含まれている。データがある期間は衛星ごとにそれぞれ異なるようだが、主に 1984 年から約 15 年間ほどのデータが含まれていると思われる。比較に用いる ERBE の OLR の図はすべて CIMSS の Web ページ [18] 内にあったものを引用した。なお、図 5.11-16 において、図のトーンレベルがそれぞれ異なるので注意されたい。

まず ERBE, ERA40, NCEP2 に共通する 1 年を通しての大まかな OLR の放射の特徴は、赤道付近で極小値、緯度 30 度付近で極大値を持ち、極向きに小さくなっていく点である。このような前節でも述べた緯度方向の特徴に加えて、図 5.11-16 のような水平分布図から、赤道域において東西方向に特徴的な分布が存在していることがわかる。具体的には、特に南アメリカ大陸、アフリカ大陸、東南アジアの赤道域では、低緯度域における周辺地域に比べて数十  $W/m^2$  ほど放射が小さくなっているのがわかる。これは赤道付近で放射が極小となる要因であると考えられる。また、一般に物質はその温度に対応するエネルギーを放射していることを考えると、上記のような放射が周りよりも小さい地域では大気上端での雲の温度が下端での温度よりも低く、対流活動が活発であることが考えられる。これは、赤道域で降水が多いこととも辻褃が合う。

次に ERBE と再解析データとの違いについてだが、OLR の水平分布の特徴に関して特に目立った差は見られなかったため、再解析データは地球の大気をよく表現していることがわかった。しかし 2 つの再解析データにおいてどちらがよりよく地球大気を表現できているのかまでは判断することができなかった。結論として、OLR の緯度分布における DCPAM5 によるデータと再解析データとの差は用いるモデルなどの違いによる有意な差であるといえる。



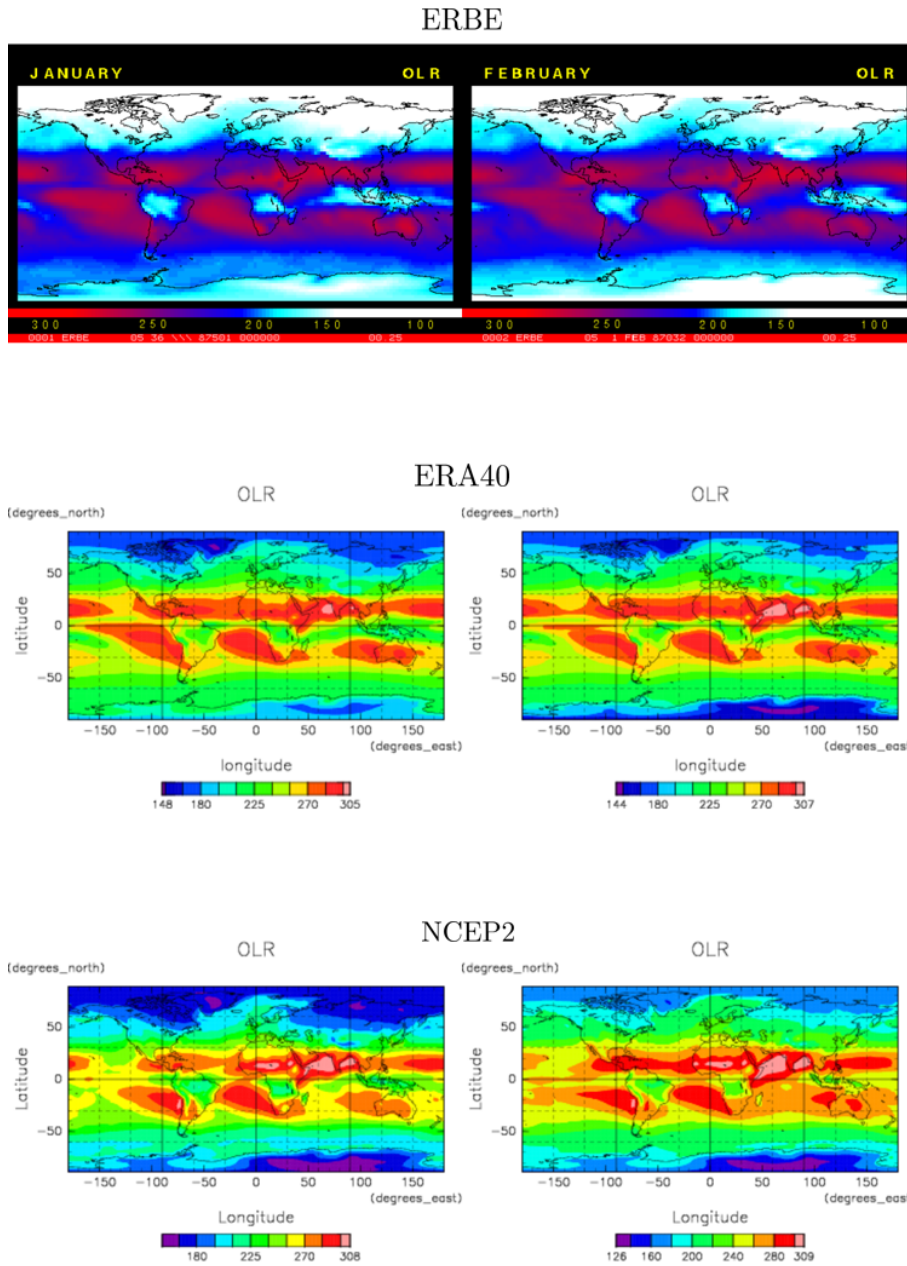


図 5.11: 月平均の OLR の水平分布. 左列は 1 月, 右列は 2 月. 上段は ERBE, 中段は ERA40, 下段 NCEP2. 中段, 下段の等値線間隔は揃っていないので注意されたい.

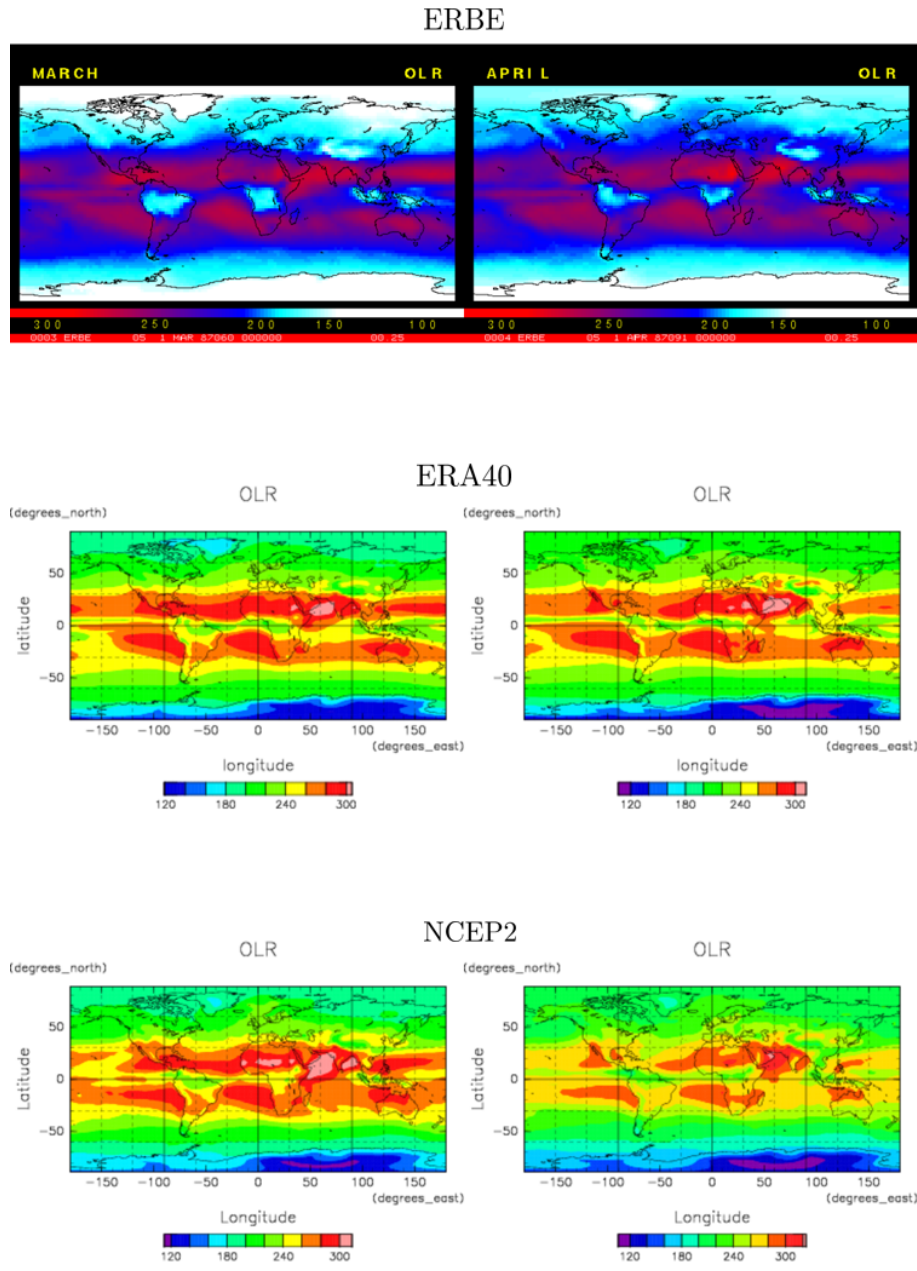


図 5.12: 月平均の OLR の水平分布. 左列は 3 月, 右列は 4 月. 上段は ERBE, 中段は ERA40, 下段 NCEP2.

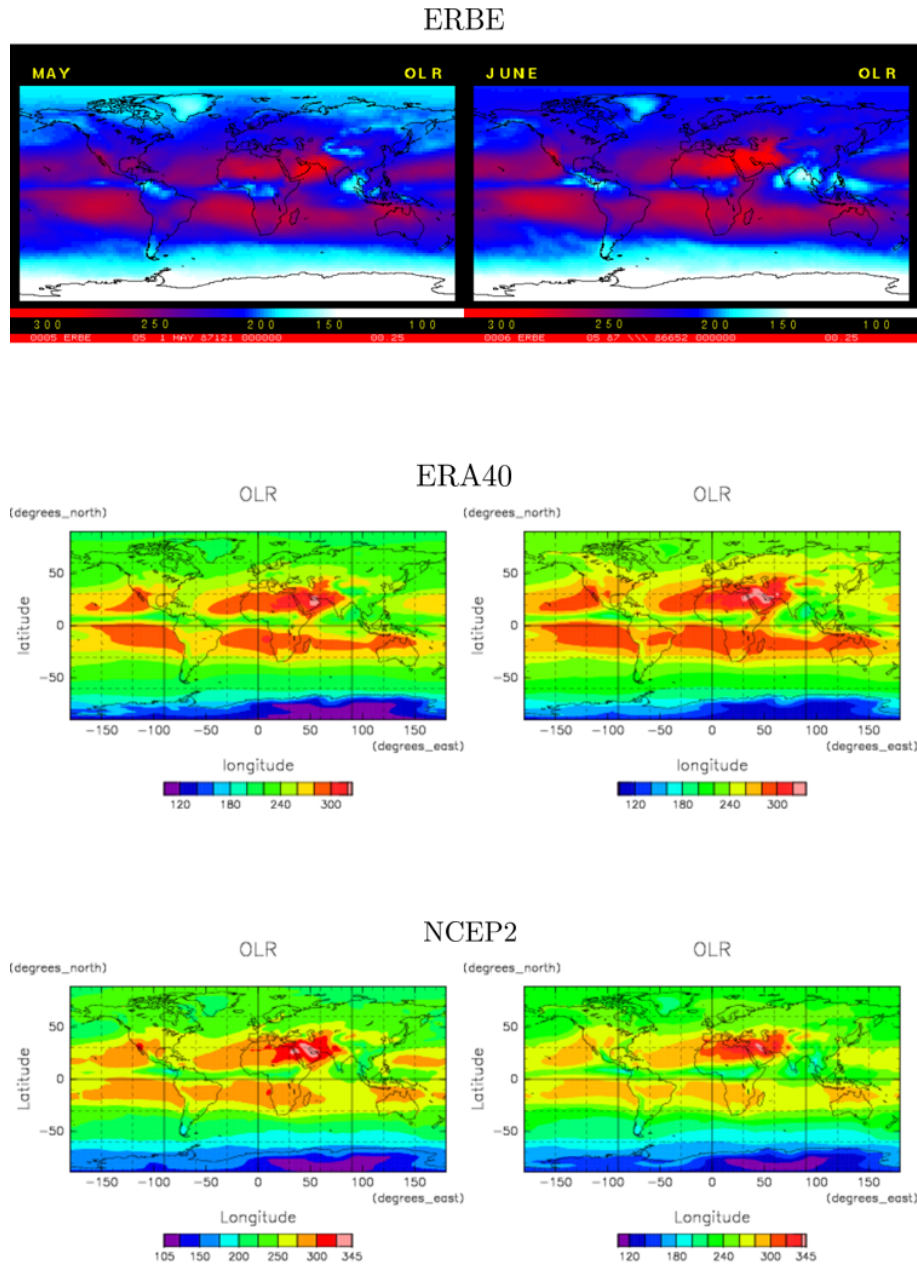


図 5.13: 月平均の OLR の水平分布. 左列は 5 月, 右列は 6 月. 上段は ERBE, 中段は ERA40, 下段 NCEP2.

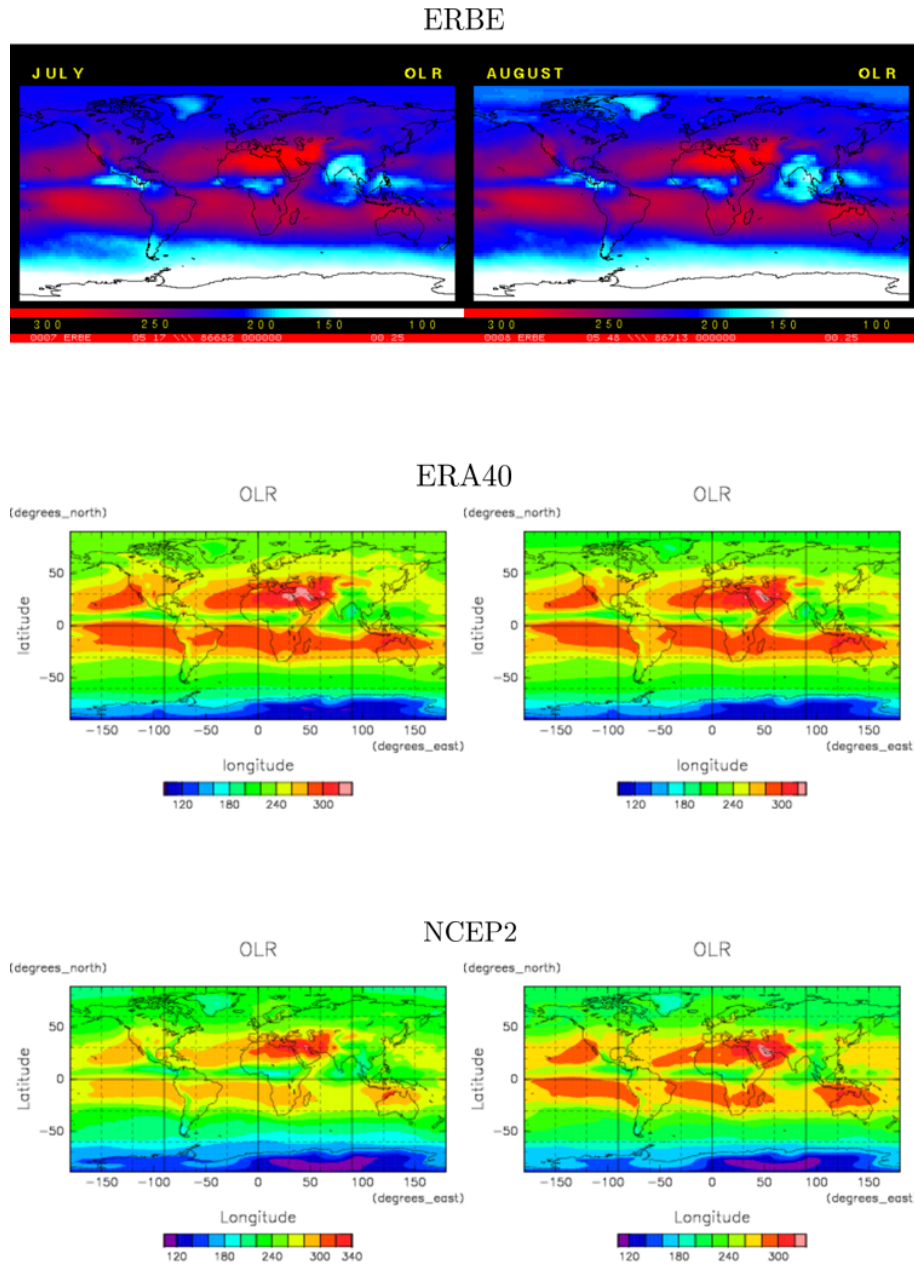


図 5.14: 月平均の OLR の水平分布. 左列は 7 月, 右列は 8 月. 上段は ERBE, 中段は ERA40, 下段 NCEP2.

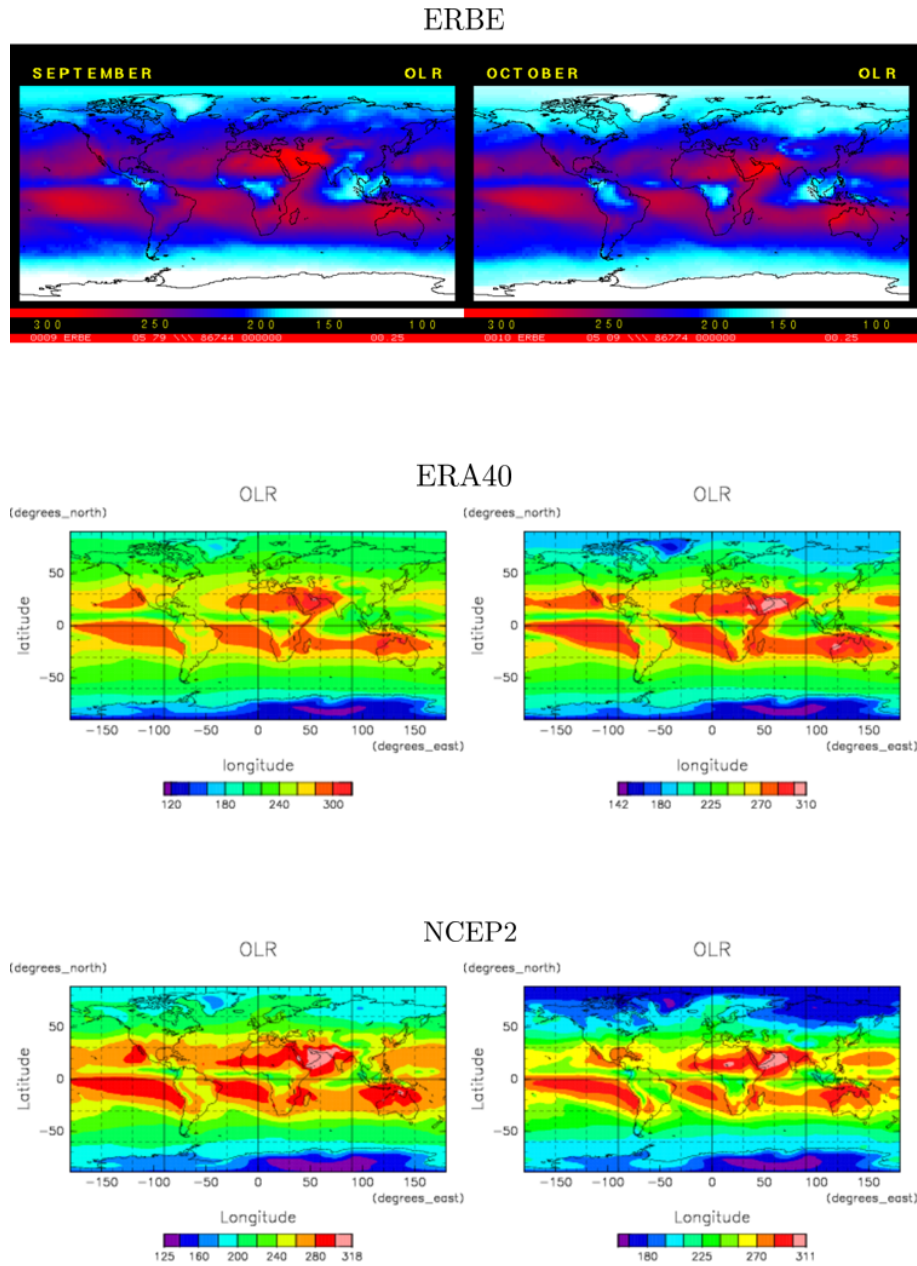


図 5.15: 月平均の OLR の水平分布. 左列は 9 月, 右列は 10 月. 上段は ERBE, 中段は ERA40, 下段 NCEP2.

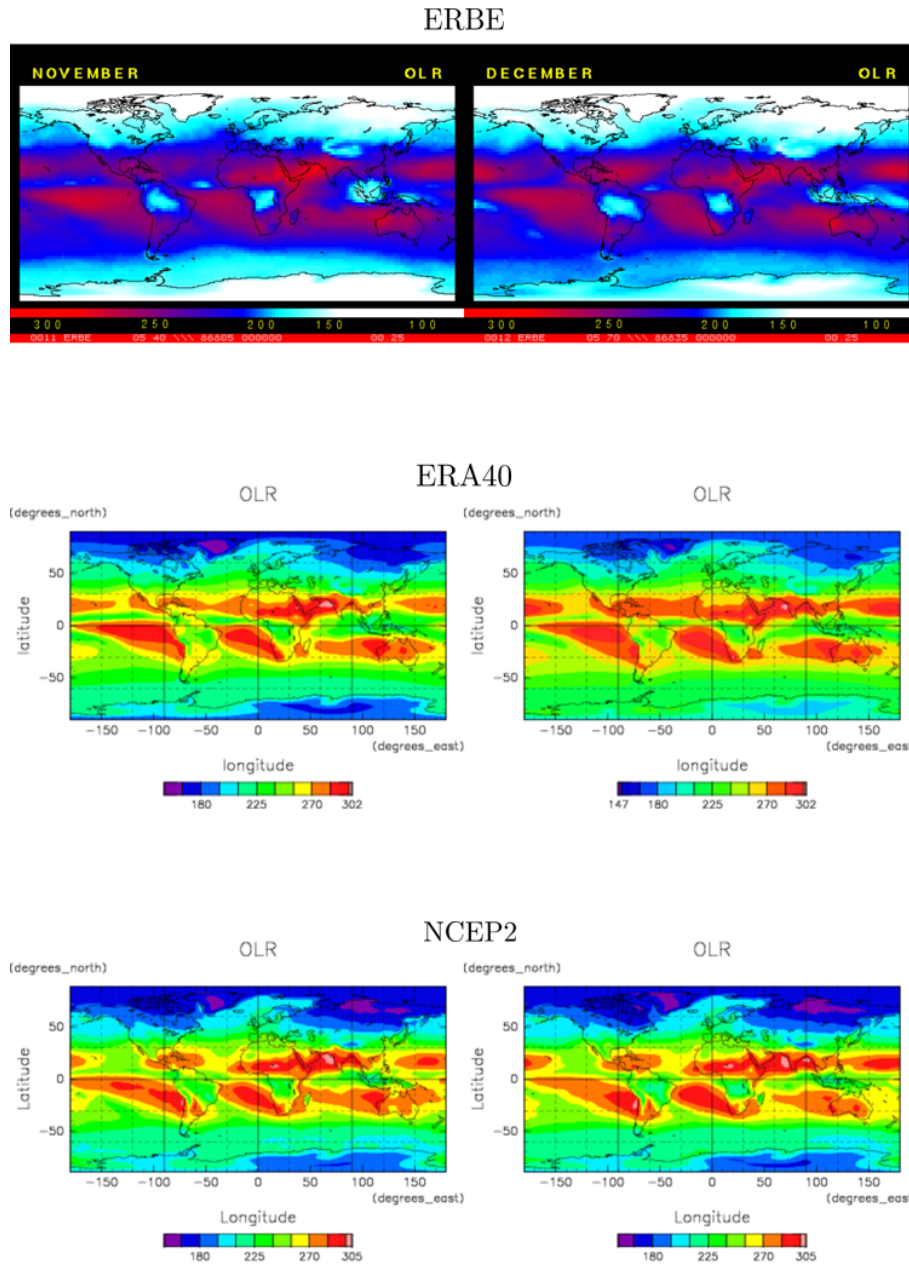


図 5.16: 月平均の OLR の水平分布. 左列は 11 月, 右列は 12 月. 上段は ERBE, 中段は ERA40, 下段 NCEP2.

## 6 まとめと展望

DCPAM5 を用いて地球大気を想定した条件の下で数値実験を行い、大気における熱収支、水収支、循環場の物理量について ERA40 と NCEP2 の再解析データと比較した。熱収支や水収支に関しては、放射の緯度分布の特徴や季節変化に伴う分布の変化など、DCPAM5 による計算結果は再解析データの特徴と概ね一致する結果が得られた。また年平均・全球平均での大気加熱が  $1.7 \text{ W/m}^2$ 、水蒸気増加が  $0.2 \text{ W/m}^2$  という概ね収支のつり合う計算結果が得られた。また、循環場の物理量についても同様に DCPAM5 の計算結果と再解析データの緯度分布は同じような特徴をもつことが確かめられ、それらの図から全球規模での大気中の水蒸気輸送の様子についてもおおまかに説明することができた。一方で、実験結果における中・高緯度域での凝結加熱率の値が十数  $\text{W/m}^2$  程度再解析データの値よりも大きいという違いが見られた。DCPAM5 の実験結果では水蒸気の輸送や風の強さが再解析データと比べて強くなっていることがわかった。これらは用いるモデルの計算の過程による重要な違いだと考えられるが、水収支のつり合いを見るとそこまで大きな影響は及ぼしていない。以上のように、今回行った DCPAM5 による数値実験では、モデルの違いによる差が部分的に見られたものの、実際の地球の大気の特徴を概ねよく表現できている結果が得られたといえる。同時に熱収支や水収支に関する放射の特徴や分布、大気中の水蒸気の分布や風の分布など、地球の大気大循環に関する様々な物理量についてその大まかな特徴を知ることができた。

地球というハビタブルな惑星の大気に関する本研究で得られた知識を活かし、系外惑星を想定とするような様々な条件下の多様な惑星大気に関して数値実験を行い、全球規模の大気大循環を表現することで、惑星のハビタビリティについて議論することを目指したい。同時に、離散化の方法や放射・対流の数値表現など、DCPAM5 についてさらに深く学び、数値モデリングに対するさらなる理解を目指したい。

## 謝辞

本研究を行うにあたり, 多くの方々にお世話になりました. 指導教員である石渡正樹准教授には研究テーマの決定や進め方, 論文指導に至るまで様々な指導や多くの助言をいただきました. 小高正嗣助教には研究内容や発表資料について多くの貴重なコメントをしていただきました. 地球流体力学研究室の先輩方には数値モデルの扱いからスクリプトの作成などに関する様々な疑問に対して, どんなときも快く丁寧に応えていただき, 大変お世話になりました. なお, 本研究の計算と作図には地球流体電脳倶楽部の DCPAM5, Ruby-DCL, GPhys を利用させていただきました. この場をお借りして皆様に心から感謝申し上げます.



---

## 参考文献

- [1] Arakawa, A., Suarez, M. J., 1983: Vertical differencing of the primitive equations in sigma coordinates. *Mon. Wea. Rev.*, 111, 34-35.
- [2] Chou, M.-D., and K.-T. Lee, 1996: Parameterizations for the absorption of solar radiation by water vapor and ozone, *J. Atmos. Sci.*, 53, 1203-1208.
- [3] Chou, M.-D., M. J. Suarez, C.-H. Ho, M. M.-H. Yan, and K.-T. Lee, 1998: Parameterizations for cloud overlapping and shortwave single-scattering properties for use in general circulation and cloud ensemble models, *J. Climate*, 11, 202-214.
- [4] Chou, M.-D., M. J. Suarez, X.-Z. Liang, and M. M.-H. Yan, 2001: A thermal infrared radiation parameterization for atmospheric studies, NASA Technical Report Series on Global Modeling and Data Assimilation, 19, NASA/TM-2001-104606.
- [5] DCPAM5 ドキュメント, [http://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/dcpam5/dcpam5\\_latest/doc/](http://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/dcpam5/dcpam5_latest/doc/)
- [6] ECMWF, ERA-40 Monthly Means of Daily Means, <http://apps.ecmwf.int/datasets/data/era40-moda/levtype=sfc/>
- [7] Louis, J-F., Tiedtke, M., and Geleyn, J-F., 1982: A short history of the PBL parameterization at ECMWF, Workshop on Planetary Boundary Layer Parameterization, 59-80, ECMWF, Reading, U.K..
- [8] Manabe, S., Smagorinsky, J., and Strickler, R.F., 1965: Simulated climatology of a general circulation model with a hydrologic cycle, *Mon. Weather Rev.*, 93, 769-798.
- [9] Matthews, E., 1983: Global vegetation and land cover: New high-resolution data bases for climate studies. *J. Clim. Appl. Meteor.* 22, 474-487.
- [10] Matthews, E., 1984: Prescription of Land-surface Boundary Conditions in GISS GCM II: A Simple Method Based on High-resolution Vegetation Data Sets. NASA TM-86096. National Aeronautics and Space Administration. Washington, D.C..
- [11] Mellor, G. L., and T. Yamada, 1974: A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers, *J. Atmos. Sci.*, 31, 1791-1806.
- [12] Moorthi, S., and M. J. Suarez, 1992: Relaxed Arakawa-Schubert: A parameterization of moist convection for general circulation models, *Mon. Wea. Rev.*, 120, 978-1002.

- 
- [13] NASA, The Earth Radiation Budget Experiment (ERBE), <http://www.nasa.gov/centers/langley/news/factsheets/ERBE.html>
- [14] NOAA, ESRL: PSD: NCEP-DOE AMIP-II Reanalysis (AKA Reanalysis 2), <http://www.esrl.noaa.gov/psd/data/gridded/data.ncep.reanalysis2.html>
- [15] NOAA, ETOPO1 Global Relief Model, <http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/relief/>
- [16] PCMDI, AMIP Sea Surface Temperature and Sea Ice Concentration Boundary Conditions, <http://www-pcmdi.llnl.gov/projects/amip/AMIP2EXPDSN/BCS/>
- [17] PCMDI, CMIP5 Overview, <http://cmip-pcmdi.llnl.gov/cmip5/>
- [18] Steve Ackerman, The Earth's Radiation Energy Balance, <http://cimss.ssec.wisc.edu/wxwise/homerbe.html>
- [19] 地球流体電脳倶楽部, <http://www.gfd-dennou.org/>
- [20] 地球流体電脳倶楽部, DCPAM5 支配方程式とその離散化, [http://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/dcpam5/dcpam5\\_latest/doc/basic\\_equations/pub/basic\\_equations.pdf](http://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/dcpam5/dcpam5_latest/doc/basic_equations/pub/basic_equations.pdf)
- [21] 地球流体電脳倶楽部, DCPAM5 支配方程式系の導出に関する参考資料, [http://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/dcpam5/dcpam5\\_latest/doc/derivation/pub/derivation.pdf](http://www.gfd-dennou.org/library/dcpam/dcpam5/dcpam5_latest/doc/derivation/pub/derivation.pdf)

## 付録 A: DCPAM5 力学過程の支配方程式系の導出

ここでは、本論文 2.1.2 節で紹介した DCPAM5 の力学過程の支配方程式系について、その導出を行う。導出方法は地球流体電脳倶楽部が提供しているドキュメント [21] を参考にした。

### A.1 座標系の取り方

DCPAM5 で用いられている座標系は、水平方向には緯度  $\varphi$ 、経度  $\lambda$  を、鉛直方向には気圧  $p(\varphi, \lambda, z)$  を惑星表面気圧  $p_s(\varphi, \lambda)$  で規格化した  $\sigma = \frac{p}{p_s}$  をとる。

### A.2 基礎方程式系の導出

方程式系は予報方程式と診断方程式からなる。予報方程式は全質量の連続の式、水蒸気量の式、3 成分の運動方程式、熱力学の式の 6 本の式からなる。それぞれ、全質量保存則、水蒸気量の保存則、全質量に関する運動量保存則、全質量に関する全エネルギー保存則から導出される。診断方程式には、理想気体の状態方程式を用いる。なお、乾燥空気と水蒸気は同じ速度と温度をもつと仮定しているため、水蒸気に関する運動量保存則および全エネルギー保存則、状態方程式を考慮する必要はない。

#### A.2.1 状態方程式

乾燥空気、水蒸気の状態方程式はそれぞれ

$$p^d = \rho^d R^d T, \quad (\text{A.1})$$

$$p^v = \rho^v R^v T \quad (\text{A.2})$$

である。ここで、 $p$  は圧力、 $\rho$  は密度、 $R$  は気体定数、 $T$  は温度である。上付添字の  $d$  と  $v$  はそれぞれ乾燥空気および水蒸気に関する量であることを示す。従って、全圧は

$$\begin{aligned} p &= p^d + p^v \\ &= \rho R^d (1 + \epsilon_v q) T \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

となる。ここで、 $q = \rho_v / \rho$  は比湿、 $\epsilon_v \equiv 1/\epsilon - 1$ 、 $\epsilon \equiv R^d / R^v$  である。したがって、全大気の状態方程式は

$$p = \rho RT. \quad (\text{A.4})$$

ただし,  $R \equiv R^d(1 + \epsilon_v q)$  である. あるいは仮温度  $T_v \equiv T(1 + \epsilon_v q)$  を用いれば以下のように表される.

$$p = \rho R^d T_v. \quad (\text{A.5})$$

### A.2.2 連続の式

全大気の質量保存則は, 水蒸気の生成消滅を無視すれば,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0. \quad (\text{A.6})$$

ここで,  $v$  は風速である. ラグランジュ形式で記述すれば,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (\text{A.7})$$

(ただし, 次で示すように水蒸気の式では生成消滅を含めているため, 全大気の質量保存則は, 水蒸気の生成消滅が起きても全質量が保存されるように, 乾燥大気量が変化することになる.)

### A.2.3 水蒸気の式

水蒸気密度  $\rho^v$  に対する質量保存則は,

$$\frac{\partial \rho^v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho^v v_j) = S. \quad (\text{A.8})$$

ここで,  $S$  は単位時間単位体積あたりの生成消滅量である. 比湿  $q = \rho^v / \rho$  に関する式は, 式 (A.6) と式 (A.7) から得ることができるが, 式 (A.6) で水蒸気の生成消滅を無視したので正しくは得られない. そこで, 比湿の生成消滅に関する項を改めて  $S_q$  と定義すると以下のようなになる.

$$\frac{dq}{dt} = S_q. \quad (\text{A.9})$$

### A.2.4 運動方程式

運動量保存則は, 水蒸気の生成消滅に伴う運動量変化を無視すると次のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_i} = \mathcal{F}'_i. \quad (\text{A.10})$$

ここで,  $\sigma_{ij}$  は粘性応力テンソル,  $\Phi^*$  は惑星の引力によるポテンシャル (遠心力を考慮せず惑星の質量のみに起因する),  $\mathcal{F}'_i$  はその他の外力項である. 式 (A.10) を連続の式を用いてラグランジュ形式で記述すると次のようになる.

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_i} = \mathcal{F}'_i. \quad (\text{A.11})$$

ここで, 粘性項と外力項を  $\mathcal{F}_i$  とおき, ベクトル表示にすると次のようになる.

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p + \rho \nabla \Phi^* = \mathcal{F}. \quad (\text{A.12})$$

### A.2.5 熱力学の式

単位質量あたりの全エネルギーは, 運動エネルギー  $v^2/2$  と内部エネルギー  $\varepsilon$  およびポテンシャルエネルギー  $\Phi^*$  の和で表現される. この時間変化率の式は,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \varepsilon + \Phi^* \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \varepsilon + \Phi^* \right) v_j + p v_j - \sigma_{ij} v_i \right] = \rho Q + \mathcal{F}'_i v_i \quad (\text{A.13})$$

となる. ここで,  $Q$  は外部からの加熱率である. なお, ここでは水蒸気の生成消滅による影響は無視している. 次に運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和の保存式を導く. 運動量保存式 (A.10) の左辺に  $v_i$  をかけると, 次のように変形できる.

$$\begin{aligned} v_i \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + v_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j v_i) &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i^2) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j v_i^2) - \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} v_i^2 \right) - \rho v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} v_i^2 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i^2) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j v_i^2) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} v_i^2 \rho v_j \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} v_i^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} v_i^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v_i^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \rho v_j v_i^2 \right) + \frac{1}{2} v_i^2 \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v_i^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \rho v_j v_i^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

また, 式 (A.10) の左辺第 5 項は次のように変形できる.

$$\begin{aligned} v_i \rho \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_i} &= \Phi^* \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) \right] + \rho \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + v_i \rho \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Phi^*) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \Phi^* v_i). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

式 (A.10) の両辺に  $v_i$  をかけた式を, 式 (A.14) および式 (A.15) を用いて整理して, さらに連続の式を用いると, 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和の保存

式は,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v_i^2 + \rho \Phi^* \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \rho v_j v^2 + \rho \Phi^* v_j + p v_j - \sigma_{ij} v_i \right) = p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \mathcal{F}'_i v_i. \quad (\text{A.16})$$

となる. ここで, 変形の際には  $\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} = 0$  としている. 式 (A.13) と式 (A.16) の差をとると, 次のように内部エネルギーの式が得られる.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \varepsilon v_j) = -p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho Q. \quad (\text{A.17})$$

連続の式を用いてラグランジュ形式に書き直すと,

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{p}{\rho} \left( \frac{d\rho}{dt} \right) + \rho Q. \quad (\text{A.18})$$

内部エネルギーを温度を用いて表現すると  $\varepsilon = C_v T$  である.  $C_v$  は定圧比熱である. さらに状態方程式 (A.4) を用いて式 (A.18) を変形すると,

$$\frac{dC_p T}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + Q^*, \quad (\text{A.19})$$

となる. ここで,  $C_p = C_v + R$  であり,  $Q^*$  は外部からの加熱の項と粘性による加熱の項をまとめたものである.  $C_p$  を乾燥空気の定圧比熱  $C_p^d$  で近似すると, 次の熱力学の式を得る.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C_p^d \rho} \frac{dp}{dt} + \frac{Q^*}{C_p^d}. \quad (\text{A.20})$$

### A.3 回転系への変換

ここでは, 方程式系を一定の自転角速度  $\Omega$  で回転する回転系に変換する.

#### A.3.1 スカラーの変換公式

慣性系の時間微分と回転系の時間微分をそれぞれ添字  $a$  と  $r$  で表現すると, 任意のスカラー  $\psi$  に対して,

$$\left( \frac{d\psi}{dt} \right)_a = \left( \frac{d\psi}{dt} \right)_r \quad (\text{A.21})$$

が成り立つ.

### A.3.2 ベクトルの変換公式

任意のベクトル  $A$  に対する慣性系および回転系での微分の関係式を導く. 任意のベクトル  $A$  を, 慣性系では  $A = iA_x + jA_y + kA_z$ , 回転系では  $A = i'A'_x + j'A'_y + k'A'_z$  と表す. 時間微分をとると, 次のような関係式が得られる.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dA}{dt}\right)_a &= i \left(\frac{dA_x}{dt}\right)_a + j \left(\frac{dA_y}{dt}\right)_a + k \left(\frac{dA_z}{dt}\right)_a \\
 &= i' \left(\frac{dA'_x}{dt}\right)_a + j' \left(\frac{dA'_y}{dt}\right)_a + k' \left(\frac{dA'_z}{dt}\right)_a + \left(\frac{di'}{dt}\right)_a A'_x + \left(\frac{dj'}{dt}\right)_a A'_y + \left(\frac{dk'}{dt}\right)_a A'_z \\
 &= i' \left(\frac{dA'_x}{dt}\right)_r + j' \left(\frac{dA'_y}{dt}\right)_r + k' \left(\frac{dA'_z}{dt}\right)_r + \Omega \times i' A'_x + \Omega \times j' A'_y + \Omega \times k' A'_z \\
 &= \left(\frac{dA}{dt}\right)_r + \Omega \times A.
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

ここで,  $A = r$  ( $r$  は位置ベクトル) とおけば, 慣性系での速度  $v_a \equiv (dr/dt)_a$  (これまでの  $v$ ) は回転系での速度  $v \equiv (dr/dt)_r$  を用いて次のように表すことができる.

$$v_a = v + \Omega \times r. \tag{A.23}$$

さらに, 式 (A.22) で  $A = v_a$  とおけば, 速度の時間微分項は次のように変換できる.

$$\frac{dv_a}{dt} = \frac{dv}{dt} + 2\Omega \times v + \Omega \times (\Omega \times r). \tag{A.24}$$

### A.3.3 回転系への変換

変換の式 (A.24) を用いて運動方程式を回転系で記述すると,

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\Omega \times v - \Omega \times (\Omega \times r) - \nabla \Phi^* + \mathcal{F} \tag{A.25}$$

となる. ここで, 重力加速度  $g \equiv -\nabla \Phi^* - \Omega \times (\Omega \times r)$  を定義すれば, 運動方程式は次のようになる.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\Omega \times v + g + \mathcal{F}. \tag{A.26}$$

## A.4 球座標への変換

### A.4.1 直交曲線座標系における微分

一般の直交曲線座標  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  において、スカラー  $\bullet$  およびベクトル  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$  は次のように表現される。なお、 $h_i$  は各軸方向の規模因子であり、各軸方向の基底ベクトルは  $e_i$  とする。

$$\nabla \bullet = \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial \bullet}{\partial \xi_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial \bullet}{\partial \xi_2}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial \bullet}{\partial \xi_3} \right), \quad (\text{A.27})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (h_1 h_2 A_3) \right], \quad (\text{A.28})$$

$$\nabla^2 \bullet = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \bullet}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \bullet}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \bullet}{\partial \xi_3} \right) \right], \quad (\text{A.29})$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial (h_3 A_3)}{\partial \xi_2} - \frac{\partial (h_2 A_2)}{\partial \xi_3} \right], \frac{1}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial (h_1 A_1)}{\partial \xi_3} - \frac{\partial (h_3 A_3)}{\partial \xi_1} \right], \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial (h_2 A_2)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial (h_1 A_1)}{\partial \xi_2} \right] \right) \quad (\text{A.30})$$

$$\frac{d\bullet}{dt} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \frac{v_1}{h_1} \frac{\partial \bullet}{\partial \xi_1} + \frac{v_2}{h_2} \frac{\partial \bullet}{\partial \xi_2} + \frac{v_3}{h_3} \frac{\partial \bullet}{\partial \xi_3}, \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_{k=1}^3 e_k \left[ \frac{\partial v_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{v_k}{h_k} \frac{\partial v_k}{\partial \xi_j} + \left( -\frac{v_j}{h_j} \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_j}{\partial \xi_k} + \frac{v_k}{h_k} \frac{1}{h_j} \frac{\partial h_k}{\partial \xi_j} \right) v_j \right]. \quad (\text{A.32})$$

### A.4.2 球座標系における微分

方程式系を球座標  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\varphi, \lambda, r)$  に変換する。球座標と回転系に固定した直交直線座標  $(x_1, x_2, x_3)$  との関係は以下の通りである。

$$x_1 = r \cos \varphi \cos \lambda, \quad (\text{A.33})$$

$$x_2 = r \cos \varphi \sin \lambda, \quad (\text{A.34})$$

$$x_3 = r \sin \varphi. \quad (\text{A.35})$$

ここで、 $\lambda$  は経度、 $\varphi$  は緯度、 $r$  は鉛直座標である。なお、重力加速度  $g$  は惑星中心を向いているとみなしている。また、基底ベクトルを  $(e_\lambda, e_\varphi, e_r)$ 、速度ベクトルを  $(u, v, w)$  で表す。

各方向のスケール因子は

$$h_\lambda = r \cos \varphi, \quad h_\varphi = r, \quad h_r = 1. \quad (\text{A.36})$$



したがって、スカラー  $\bullet$  およびベクトル  $\mathbf{A} = (A_\lambda, A_\varphi, A_r)$  に関する微分表現は次のようになる。

$$\nabla \bullet = \mathbf{e}_\lambda \frac{1}{r \cos \varphi} + \frac{\partial \bullet}{\partial \lambda} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \bullet}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_r \frac{\partial \bullet}{\partial r}, \quad (\text{A.37})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \left[ r \frac{\partial A_\lambda}{\partial \lambda} + r \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi A_\varphi) + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) \right], \quad (\text{A.38})$$

$$\nabla^2 \bullet = \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial \bullet}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial \bullet}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cos \varphi \frac{\partial \bullet}{\partial r} \right) \right], \quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{e}_\lambda \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \cos \varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \cos \varphi A_\lambda) - \frac{\partial A_r}{\partial \lambda} \right] \\ &\quad + \mathbf{e}_r \frac{1}{r \cos \varphi} \left[ \frac{\partial A_\varphi}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi A_\lambda) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{d \bullet}{dt} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial \bullet}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial \bullet}{\partial \varphi} + w \frac{\partial \bullet}{\partial r}, \quad (\text{A.41})$$

$$\begin{aligned} \frac{d \mathbf{A}}{dt} &= \mathbf{e}_\lambda \left[ \frac{\partial A_\lambda}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial A_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial A_\lambda}{\partial \varphi} + w \frac{\partial A_\lambda}{\partial r} + \frac{u}{r} A_r - \frac{u \tan \varphi}{r} A_\varphi \right] \\ &\quad + \mathbf{e}_\varphi \left[ \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + w \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{v}{r} A_r + \frac{u \tan \varphi}{r} A_\lambda \right] \\ &\quad + \mathbf{e}_r \left[ \frac{\partial A_r}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial A_r}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + w \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{v}{r} A_\varphi - \frac{u}{r} A_\lambda \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

### A.4.3 球座標への変換

コリオリ項は次のように表される.

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} &= 2\Omega(\mathbf{e}_\varphi \cos \varphi + \mathbf{e}_r \sin \varphi) \times (u\mathbf{e}_\lambda + v\mathbf{e}_\varphi + w\mathbf{e}_r) \\ &= (2\Omega \cos \varphi w - 2\Omega \sin \varphi v)\mathbf{e}_\lambda + 2\Omega \sin \varphi u\mathbf{e}_\varphi - 2\Omega \cos \varphi u\mathbf{e}_r. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

したがって, 運動方程式は

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2\Omega v \sin \varphi - 2\Omega w \cos \varphi + \frac{uv}{r} \tan \varphi - \frac{uw}{r} + \mathcal{F}_\lambda, \quad (\text{A.44})$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - 2\Omega u \sin \varphi - \frac{u^2}{r} \tan \varphi - \frac{vw}{r} + \mathcal{F}_\varphi, \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + 2\Omega u \cos \varphi + \frac{u^2}{r} + \frac{v^2}{r} + \mathcal{F}_r. \quad (\text{A.46})$$

ここで, 運動方程式 (A.44) の右辺第 4, 5 項, 式 (A.45) の右辺第 3, 4 項, 式 (A.46) の右辺第 4, 5 項はメトリック項と呼ばれる. これは, 回転系を球座標にしたときに生じる, 水平方向, 極方向, 動径方向の単位ベクトルの時間変化を表す項である. 子午線に沿った回転と緯度円に沿った回転の重ねあわせにより, 球の中心を貫く任意の軸に沿った回転を考慮している.

連続の式は

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda}(u) + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\cos \varphi v) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 w) = 0. \quad (\text{A.47})$$

熱力学の式は

$$\frac{d}{dT} T = \frac{1}{C_p^d \rho} \frac{dp}{dt} + \frac{Q^*}{C_p^d}. \quad (\text{A.48})$$

状態方程式は

$$p = \rho R^d T_v. \quad (\text{A.49})$$

水蒸気の式は

$$\frac{dq}{dt} = S_q. \quad (\text{A.50})$$

ここで,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + w \frac{\partial}{\partial r} \quad (\text{A.51})$$

である.

## A.5 $z$ -座標プリミティブ方程式

### A.5.1 静力学平衡近似

鉛直方向の運動方程式に対し、以下のように静力学平衡近似を行う。

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \quad (\text{A.52})$$

このとき、運動エネルギーの保存則を考慮して、水平方向の運動方程式に対しても近似を施す。運動エネルギーの式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) &= u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} + w \frac{dw}{dt} \\ &= u \left[ -\frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2v\Omega \sin \varphi - 2w\Omega \cos \varphi + \frac{uv}{r} \tan \varphi - \frac{uw}{r} + \mathcal{F}_\lambda \right] \\ &\quad + v \left[ -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - 2u\Omega \sin \varphi - \frac{u^2}{r} \tan \varphi - \frac{vw}{r} + \mathcal{F}_\varphi \right] \\ &\quad + w \left[ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + 2u\Omega \cos \varphi + \frac{u^2}{r} + \frac{v^2}{r} + \mathcal{F}_r \right] \\ &= -\frac{1}{\rho} \mathbf{v} \nabla p - gw - \mathbf{v} \cdot \mathcal{F}. \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

コリオリ力の項とメトリック項は打ち消し合い、運動エネルギーの時間変化に寄与しないことがわかる。したがって、静力学平衡近似の際に鉛直成分の式から落とした項に対応する水平成分の式の項も取り除く必要がある。よって、運動方程式の水平成分は次のようになる。

$$\frac{du}{dt} = \frac{uv \tan \varphi}{r} + fv - \frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \mathcal{F}_\lambda, \quad (\text{A.54})$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{u^2 \tan \varphi}{r} - fu - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mathcal{F}_\varphi. \quad (\text{A.55})$$

ここで、 $f$  はコリオリパラメータ  $f \equiv 2\Omega \sin \varphi$  である。

### A.5.2 薄い球殻近似

大気の層が惑星半径に比べて薄いと仮定し,  $r$  を惑星半径  $a$  で置き換える. また,  $r$  による微分は全て海拔高度  $z$  による微分で置き換える. このとき, 基礎方程式は次のようになる.

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (\text{A.56})$$

$$\frac{dq}{dt} = S_q, \quad (\text{A.57})$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{uv \tan \varphi}{a} + fv - \frac{1}{\rho a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \mathcal{F}_\lambda, \quad (\text{A.58})$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{u^2 \tan \varphi}{a} - fu - \frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mathcal{F}_\varphi, \quad (\text{A.59})$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad (\text{A.60})$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C_p^d \rho} \frac{dp}{dt} + \frac{Q^*}{C_p^d}, \quad (\text{A.61})$$

$$p = \rho R^d T_v. \quad (\text{A.62})$$

ここで,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad (\text{A.63})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (\text{A.64})$$

## A.6 $\sigma$ -座標プリミティブ方程式

静力学平衡の下では, 気圧  $p$  は鉛直座標  $z$  に対し単調減少する関数である. そこで, 鉛直座標を地表面気圧  $p_s$  で規格化した気圧座標

$$\sigma \equiv \frac{p}{p_s} \quad (\text{A.65})$$

に変換する.  $\sigma$  と  $z$  の関係は, 静力学平衡の式と式 (A.5) を用いて次のように表される.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\frac{g\sigma}{R^d T_v}. \quad (\text{A.66})$$

### A.6.1 $\sigma$ -座標変換公式

$z$ -座標から  $\sigma$ -座標への変換公式を以下に示す.

鉛直微分は,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bullet}{\partial z} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \\ &= -\frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma}. \quad (\because \text{式 (A.66)})\end{aligned}\quad (\text{A.67})$$

水平微分は次のように変換できる. なお, 水平方向に圧力勾配が存在することで,  $\sigma$  座標軸が水平方向に変化することを考慮しなければならない. 次式 (A.68) および式 (A.69) における右辺第 2 項が上記のことを考慮して生じる項である.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \bullet}{\partial \lambda}\right)_z &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \lambda}\right)_\sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma \\ &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma,\end{aligned}\quad (\text{A.68})$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \bullet}{\partial \varphi}\right)_z &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \varphi}\right)_\sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_\sigma \\ &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \varphi}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_\sigma.\end{aligned}\quad (\text{A.69})$$

時間変化は次のように変換できる. 時間変化によっても  $\sigma$  の座標軸が変化するため,  $z$  も  $\sigma$  に対して時間変化する. 次式の右辺第 2 項はそれを補正している.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_z &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_\sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma \\ &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma.\end{aligned}\quad (\text{A.70})$$

ラグランジュ微分はこれらを用いて,

$$\begin{aligned}\left(\frac{d \bullet}{dt}\right)_z &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_z + \frac{u}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \lambda}\right)_z + \frac{v}{a} \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \varphi}\right)_z + w \left(\frac{\partial \bullet}{\partial z}\right)_z \\ &= \left(\frac{\partial \bullet}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{u}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{v}{a} \left(\frac{\partial \bullet}{\partial \varphi}\right)_\sigma \\ &\quad + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \left[ \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{u}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{v}{a} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_\sigma - w \right] \frac{\partial \bullet}{\partial \sigma} \\ &= \left(\frac{d \bullet}{dt}\right)_\sigma.\end{aligned}\quad (\text{A.71})$$

ここで,  $\sigma$ -座標鉛直速度  $\dot{\sigma}$  を定義する.

$$\dot{\sigma} \equiv \left[ \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_\sigma + \frac{u}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_\sigma + \frac{v}{a} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_\sigma - w \right]. \quad (\text{A.72})$$

### A.6.2 $\sigma$ -座標プリミティブ方程式系

静力学平衡の式

式 (A.66) に重力ポテンシャル  $\Phi = gz$  を用いると, 次のように書ける.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{R^d T_v}{\sigma}. \quad (\text{A.73})$$

運動方程式

水平方向の圧力勾配は式 (A.68) と式 (A.69) を用いると次のように変換される.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_z &= \frac{1}{\rho} \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_\sigma \right] \\ &= \frac{R^d T_v}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial \lambda} + \frac{R^d T_v}{p} \frac{g\sigma}{R^d T_v} p_s \left( \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_\sigma \quad (\because \text{式 (A.65)}) \\ &= R^d T_v \left( \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right)_\sigma + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}, \quad \left( \because \frac{1}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial \lambda} = \frac{\partial \ln p_s}{\partial \lambda} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)_z = R^d T_v \left( \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right)_\sigma + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}. \quad (\text{A.75})$$

ここで,  $\pi \equiv \ln p_s$  である. したがって, 運動方程式の水平成分は,

$$\frac{du}{dt} - fv - \frac{uv}{a} \tan \varphi = -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{R^d T_v}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \mathcal{F}_\lambda, \quad (\text{A.76})$$

$$\frac{dv}{dt} + fu + \frac{u^2}{a} \tan \varphi = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{R^d T_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} + \mathcal{F}_\varphi. \quad (\text{A.77})$$

連続の式

速度の発散は、式 (A.64) に式 (A.67, 68, 69) を用いて変形すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 (\nabla \cdot \mathbf{v})_z &= \frac{1}{a \cos \varphi} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_\sigma \right] \\
 &\quad + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)_\sigma \right] - \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{dz}{dt} \right)_\sigma \quad \left( \because w = \left( \frac{dz}{dt} \right)_\sigma \right) \\
 &= \frac{1}{a \cos \varphi} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_\sigma \right] \\
 &\quad + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)_\sigma \right] \\
 &\quad - \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_\sigma + \frac{u}{a \cos \varphi} \left( \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_\sigma + \frac{v}{a} \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)_\sigma + \dot{\sigma} \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right] \quad (\because \text{式 (A.71, 72)}) \\
 &= \frac{1}{a \cos \varphi} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_\sigma \right] \\
 &\quad + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right)_\sigma + \frac{g\sigma}{R^d T_v} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)_\sigma \right] \\
 &\quad - \frac{g\sigma}{R^d T_v} \left[ \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_\sigma + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_\sigma + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)_\sigma + \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_\sigma + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)_\sigma + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right\} \right] \\
 &= \frac{1}{a \cos \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_\sigma + \frac{1}{a \cos \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right)_\sigma + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} \\
 &\quad - \frac{g\sigma}{R^d T_v} \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_\sigma + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)_\sigma + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)_\sigma + \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) \right] \\
 &= (\nabla \cdot \mathbf{v}_H)_\sigma + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \left( \frac{d \partial z}{dt \partial \sigma} \right)_\sigma \cdot \quad \left( \because -\frac{g\sigma}{R^d T_v} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) \quad (\text{A.78})
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_H \equiv \frac{1}{a \cos \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_\sigma + \frac{1}{a \cos \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right)_\sigma \quad (\text{A.79})$$

よって、 $z$ -座標の連続の式は次のように変換される。

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho} \left( \frac{d\rho}{dt} \right)_z &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{d\rho}{dt} \right)_\sigma + (\nabla \cdot \mathbf{v}_H)_\sigma + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \left( \frac{d \partial z}{dt \partial \sigma} \right)_\sigma \\
 &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{d\rho}{dt} \right)_\sigma + (\nabla \cdot \mathbf{v}_H)_\sigma + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{\rho}{p_s} \left( \frac{d p_s}{dt \rho} \right)_\sigma \\
 &\quad \left( \because \frac{\partial \sigma}{\partial z} \left( \frac{d \partial z}{dt \partial \sigma} \right)_\sigma = -\frac{\rho g}{p_s} \left( \frac{d}{dt} \left( -\frac{p_s}{\rho g} \right) \right) = \frac{\rho}{p_s} \left( \frac{d p_s}{dt \rho} \right)_\sigma \right) \\
 &= \left( \frac{d \ln p_s}{dt} \right)_\sigma + (\nabla \cdot \mathbf{v}_H)_\sigma + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} \quad (\text{A.80})
 \end{aligned}$$

したがって,  $\pi \equiv \ln p_s$  を用いると,

$$\frac{d\pi}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v}_H + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0. \quad (\text{A.81})$$

熱力学の式

式 (A.61) の右辺第 1 項は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_p^d \rho} \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{C_p^d \rho} \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma p + \dot{\sigma} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\} \quad (\because \text{式 (A.63)}) \\ &= \frac{1}{C_p^d \rho} \left\{ \sigma \frac{\partial p_s}{\partial t} + \sigma \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma p_s + \dot{\sigma} p_s \right\} \\ &= \frac{R^d T_v}{C_p^d} \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

ここで,

$$\mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma = \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (\text{A.83})$$

したがって, 熱力学の式は次のように変換される.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{R^d T_v}{C_p^d} \left\{ \frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right\} + \frac{Q^*}{C_p^d}. \quad (\text{A.84})$$



A.6.3  $\sigma$ -座標における境界条件

地表面高度

$$\Phi = \Phi_s(\lambda, \varphi) \quad \text{at } \sigma = 1. \quad (\text{A.85})$$

$\Phi$  は地表面地形を表す. この境界条件を用いて静力学平衡の式を鉛直積分すると, 任意の  $\sigma$  での高度  $\Phi$  を求めることができる.

 $\sigma$ -座標鉛直速度

$$\dot{\sigma} = 0 \quad \text{at } \sigma = 0, 1. \quad (\text{A.86})$$

## A.6.4 傾向方程式

連続の式 (A.81) を鉛直方向に  $\sigma = 0$  から  $\sigma = 1$  まで積分し,  $\dot{\sigma}$  に関する境界条件, 式 (A.86) を用いれば, 傾向方程式と呼ばれる  $\pi$  の時間変化に関する式が得られる.

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = - \int_0^1 \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi d\sigma - \int_0^1 D d\sigma. \quad (\text{A.87})$$

この式を用いると,  $\dot{\sigma}$  の情報がなくても地表面気圧の時間変化を求めることができる. なお, ここでは  $\nabla \cdot \mathbf{v}_H$  を  $D$  としている. 鉛直速度  $\dot{\sigma}$  は, 連続の式 (A.81) を鉛直方向に  $\sigma = 0$  から  $\sigma = \sigma$  まで積分することで診断的に求められる.

$$\dot{\sigma} = -\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \int_0^\sigma D d\sigma - \int_0^\sigma \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi d\sigma. \quad (\text{A.88})$$

## A.7 モデル支配方程式

### A.7.1 渦度方程式

渦度の定義は次の通りである.

$$\zeta \equiv \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi). \quad (\text{A.89})$$

渦度方程式は以下に示す方法で得られる. まず式 (A.76, 77) のそれぞれ左辺第 1 項を, 式 (A.71, 72) を用いて展開すると, 次のようになる.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - fv - \frac{uv}{a} \tan \varphi = -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{R^d T_v}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \mathcal{F}_\lambda, \quad (\text{A.90})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} + fu + \frac{u^2}{a} \tan \varphi = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{R^d T_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} + \mathcal{F}_\varphi. \quad (\text{A.91})$$

次に, 式 (A.91) に  $\frac{\partial}{\partial \lambda}$  を作用した式から式 (A.90) に  $\frac{\partial}{\partial \varphi} \cos \varphi$  を作用した式を引くと,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial \lambda} (fu) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{u^2}{a} \tan \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{R^d T_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial \lambda} (\mathcal{F}_\varphi) \\ & - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{u}{a} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi fv) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{uv}{a} \sin \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{R^d T_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi \mathcal{F}_\lambda) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.92})$$

式 (A.92) の  $\Phi$  に関する項 (左辺第 7 項と第 16 項) は打ち消しあう. その他の項は以下のように整理できる.

時間微分の項 (第 1 項と第 10 項)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right\} - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi) \right\} \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi) \right\} \\ & = a \cos \varphi \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

速度の 2 階水平微分の項 (第 3, 12, 15 項)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{uv}{a} \sin \varphi \right) \\
 &= \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{v}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{v}{a} \left( \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} + u \frac{\partial \cos \varphi}{\partial \varphi} \right) \right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi) \right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \left( \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi) \right) v \cos \varphi \right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (\zeta v \cos \varphi). \tag{A.94}
 \end{aligned}$$

速度の 2 階水平微分の項 (第 2, 6, 11 項)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{u^2}{a} \tan \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{u}{a} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{u^2}{a} \tan \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{u}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{u}{a \cos \varphi} \left( u \sin \varphi - \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{u}{a \cos \varphi} \left( -u \frac{\partial \cos \varphi}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi) \right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \lambda} (\zeta u). \tag{A.95}
 \end{aligned}$$

最後に、式 (A.92) を式 (A.93, 94, 95) を用いて整理し、両辺に  $\frac{1}{a \cos \varphi}$  をかけることで、次式のような渦度方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\zeta v \cos \varphi) - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\zeta u) \\
 &\quad - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} + \frac{R^d T_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} - \mathcal{F}_\varphi + f u \right] \\
 &\quad - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ - \cos \varphi \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - \frac{R^d T_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \mathcal{F}_\lambda \cos \varphi + f v \cos \varphi \right]. \tag{A.96}
 \end{aligned}$$

## A.7.2 発散方程式

発散の定義は次の通りである.

$$D \equiv \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi). \quad (\text{A.97})$$

発散方程式は以下に示す方法で得られる. まず, 式 (A.90) に  $\frac{\partial}{\partial \lambda}$  を作用した式と式 (A.91) に  $\frac{\partial}{\partial \varphi} \cos \varphi$  を作用した式との和をとると,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial \lambda} (fv) - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{uv}{a} \tan \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{R^d T_v}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \lambda} (\mathcal{F}_\lambda) \\ & + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{u}{a} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi fu) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{u^2}{a} \sin \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{R^d T_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi \mathcal{F}_\varphi) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.98})$$

この式は以下のように整理できる.

時間微分の項 (第 1 項と第 10 項)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right\} + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right\} \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right\} \\ & = a \cos \varphi \frac{\partial D}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{A.99})$$

$\Phi$  に関する項 (第 7 項と第 16 項)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \\ & = a \cos \varphi \left\{ \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right\} \Phi \\ & = a \cos \varphi \nabla_\sigma^2 \Phi. \end{aligned} \quad (\text{A.100})$$

速度の 2 階水平微分の項 (第 2, 12 項)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \\
 &= \frac{1}{2a \cos \varphi} \frac{\partial^2 u^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial v^2}{\partial \varphi} \right) \\
 &= \left\{ \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \right\} \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{v}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{u}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\
 &= a \cos \varphi \nabla_{\sigma}^2 KE - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{v}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{u}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right). \tag{A.101}
 \end{aligned}$$

ここで,  $KE = \frac{u^2 + v^2}{2}$  とした.

速度の 2 階水平微分の項 (第 3, 6 項, 式 (A.101) の第 2 項)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{uv}{a} \tan \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{v}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{v}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi) \right\} - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{v}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) \\
 &= - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ v \left( \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi) \right) \right\} \\
 &= - \frac{\partial}{\partial \lambda} (\zeta v). \tag{A.102}
 \end{aligned}$$

速度の 2 階水平微分の項 (第 11, 15 項, 式 (A.101) の第 3 項)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{u}{a} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{u^2}{a} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{u}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{u}{a} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{u}{a} \left( u \sin \varphi - \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{u}{a} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{u}{a} \left( u \frac{\partial \cos \varphi}{\partial \varphi} + \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{u}{a} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{u}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi) \right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ u \cos \varphi \left( \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi) \right) \right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (\zeta u \cos \varphi). \tag{A.103}
 \end{aligned}$$

最後に, 式 (A.98) を式 (A.99, 100, 101, 102, 103) を用いて整理し, 両辺に  $\frac{1}{a \cos \varphi}$  をか

けることで、次式のような発散方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial D}{\partial t} = & \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\zeta v) - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\zeta u \cos \varphi) \\
 & - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{R^d T_v}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} - \mathcal{F}_\lambda - f v \right] \\
 & - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \cos \varphi \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} + \frac{R^d T_v}{a} \cos \varphi \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} - \mathcal{F}_\varphi \cos \varphi + f u \cos \varphi \right] \\
 & - \nabla_\sigma^2 (\Phi + KE). \tag{A.104}
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\nabla_\sigma^2 = \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \tag{A.105}$$

### A.7.3 熱力学の式

式 (A.84) より、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial t} = & - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial (uT)}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial (vT \cos \varphi)}{\partial \varphi} + TD \\
 = & - \dot{\sigma} \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \kappa T_v \left( \frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right) + \frac{Q^*}{C_p}. \tag{A.106}
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\kappa = \frac{R^d}{C_p^d} \tag{A.107}$$

である。

#### A.7.4 温度の基本場とずれの分離

仮温度  $T_v$  を  $\sigma$  のみに依存する場  $\bar{T}_v(\sigma)$  と, そこからのずれ成分  $T'_v$  にわけると,

渦度方程式 (A.96) で  $T_v$  を含む項は次のように変形される.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{R^d T_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{R^d T_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] \\
 = & -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{R^d \bar{T}_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right] - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{R^d T'_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right] \\
 & + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{R^d \bar{T}_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{R^d T'_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] \\
 = & -\frac{1}{a \cos \varphi} \left\{ \frac{R^d \bar{T}_v}{a} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \lambda \partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{R^d T'_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right] - \frac{R^d \bar{T}_v}{a} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \varphi \partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{R^d T'_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] \right\} \\
 = & -\frac{1}{a \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{R^d T'_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{R^d T'_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] \right\}. \tag{A.108}
 \end{aligned}$$

発散方程式 (A.104) で  $T_v$  を含む項は次のように変形される.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{R^d T_v}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{R^d T_v}{a} \cos \varphi \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right] \\
 = & -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{R^d \bar{T}_v}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{R^d T'_v}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] \\
 & - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{R^d \bar{T}_v}{a} \cos \varphi \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right] - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{R^d T'_v}{a} \cos \varphi \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right] \\
 = & -\frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} (R^d \bar{T}_v \pi) - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{R^d T'_v}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] \\
 & - \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} (R^d \bar{T}_v \pi) \right] - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{R^d T'_v}{a} \cos \varphi \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right] \\
 = & -\nabla_\sigma^2 (R^d \bar{T}_v \pi) - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{R^d T'_v}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{R^d T'_v}{a} \cos \varphi \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right]. \tag{A.109}
 \end{aligned}$$

ここで,

$$\nabla_\sigma^2 \equiv \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \tag{A.110}$$

熱力学の式 (A.106) の右辺第 1-3 項は, 温度  $T$  を  $\sigma$  のみに依存する場  $\bar{T}(\sigma)$  とそこからのずれ成分  $T'$  に分けると, 次のように表される.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial(uT)}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial(vT \cos \varphi)}{\partial \varphi} + TD \\
 = & -\frac{1}{a \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial(u\bar{T})}{\partial \lambda} + \frac{\partial(uT')}{\partial \lambda} + \frac{\partial(v\bar{T} \cos \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(vT' \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right\} + \bar{T}D + T'D \\
 = & -\frac{1}{a \cos \varphi} \left\{ \bar{T} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial(uT')}{\partial \lambda} + \bar{T} \frac{\partial(v \cos \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(vT' \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right\} \\
 & + \bar{T} \left[ \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right] + T'D \\
 = & -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial(uT')}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial(vT' \cos \varphi)}{\partial \varphi} + T'D. \tag{A.111}
 \end{aligned}$$

#### A.7.5 変数変換

支配方程式系における変数を, モデル内部で用いられている変数に変換する.  $\mu \equiv \sin \varphi$  を導入し, 速度場  $u, v$  は  $U \equiv u \cos \varphi, V \equiv v \cos \varphi$  に変換する. このとき, 水平風の渦度  $\zeta$  と発散  $D$  は次式のように変換され, これを改めて  $\zeta$  および  $D$  の定義とする.

$$\begin{aligned}
 \zeta &= \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi) \\
 &= \frac{1}{a \cos^2 \varphi} \frac{\partial v \cos \varphi}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \cos \varphi) \\
 &= \frac{1}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial V}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial \mu}, \tag{A.112}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \\
 &= \frac{1}{a \cos^2 \varphi} \frac{\partial u \cos \varphi}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \\
 &= \frac{1}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial V}{\partial \mu}. \tag{A.113}
 \end{aligned}$$



水平風による移流は次式のように変換される.

$$\begin{aligned}
 \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \bullet}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \bullet}{\partial \varphi} &= \frac{1}{a \cos^2 \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} (u \cos \varphi \bullet) - \bullet \frac{\partial}{\partial \lambda} (u \cos \varphi) \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{a \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi \bullet) - \bullet \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right\} \\
 &= \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} (U \bullet) - \frac{\bullet}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} (V \bullet) - \frac{\bullet}{a} \frac{\partial V}{\partial \mu} \\
 &= \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} (U \bullet) + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} (V \bullet) - \bullet D. \tag{A.114}
 \end{aligned}$$

水平風による移流は, 式 (A.114) とは別の記述でも表される. 連続の式の変換のために示す.

$$\begin{aligned}
 \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \bullet}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \bullet}{\partial \varphi} &= \frac{u \cos \varphi}{a \cos^2 \varphi} \frac{\partial \bullet}{\partial \lambda} + \frac{v \cos \varphi}{a \cos \varphi} \frac{\partial \bullet}{\partial \varphi} \\
 &= \frac{U}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial \bullet}{\partial \lambda} + \frac{V}{a} \frac{\partial \bullet}{\partial \mu} \\
 &\equiv \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma \bullet. \tag{A.115}
 \end{aligned}$$

### A.7.6 支配方程式の最終形

以上を用いて方程式系を記述すると以下ようになる.

連続の式

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_{\sigma} \pi = -D - \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma}. \quad (\text{A.116})$$

静水圧の式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{R^d T_v}{\sigma}. \quad (\text{A.117})$$

運動方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{a} \left( \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial V_A}{\partial \lambda} - \frac{\partial U_A}{\partial \mu} \right), \quad (\text{A.118})$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a} \left( \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial U_A}{\partial \lambda} + \frac{\partial V_A}{\partial \mu} \right) - \nabla_{\sigma}^2 (\Phi + R\bar{T}\pi + KE). \quad (\text{A.119})$$

ここで,

$$U_A(\varphi, \lambda, \sigma) \equiv (\zeta + f)V - \dot{\sigma} \frac{\partial U}{\partial \sigma} - \frac{R^d T'_v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \mathcal{F}_{\lambda} \cos \varphi, \quad (\text{A.120})$$

$$V_A(\varphi, \lambda, \sigma) \equiv -(\zeta + f)U - \dot{\sigma} \frac{\partial V}{\partial \sigma} - \frac{R^d T'_v}{a} (1-\mu^2) \frac{\partial \pi}{\partial \mu} + \mathcal{F}_{\varphi} \cos \varphi. \quad (\text{A.121})$$

熱力学の式

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = & -\frac{1}{a} \left( \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial UT'}{\partial \lambda} + \frac{\partial VT'}{\partial \mu} \right) + T'D \\ & - \dot{\sigma} \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \kappa T_v \left( \frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_{\sigma} \pi + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right) + \frac{Q^*}{C_p}. \end{aligned} \quad (\text{A.122})$$

水蒸気の式

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{1}{a} \left( \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial Uq}{\partial \lambda} + \frac{\partial Vq}{\partial \mu} \right) + qD - \dot{\sigma} \frac{\partial q}{\partial \sigma} + S_q. \quad (\text{A.123})$$

式(A.18)の  $Q^*$  から粘性による寄与  $C_p D(v)$  を再び分離し,  $Q^* = Q + C_p D(v)$  とする. また, 渦度, 発散, 温度, 水蒸気の式に対してそれぞれの水平拡散項  $D(\zeta)$ ,  $D(D)$ ,  $D(T)$ ,  $D(q)$  をつける. この項は数値的安定性のために付加する必要がある. また, 物理的には離散化のスケール以下の運動を表現していると解釈できる. 最後に, 乾燥大気の気体定数および定圧比熱  $R^d$ ,  $C_p^d$  をそれぞれ  $R$ ,  $C_p$  のように改めて置き直せば, 本論文 2.1.2 節に示す DCPAM5 の力学過程の支配方程式系を得る.

## 付録 B: 計算設定の異なる実験結果の比較

本研究では、本論文第 3 章で説明した実験の他に、2 種類の異なる計算設定での実験も行った。ここではその 3 種類の実験結果を比較する。それぞれの計算の設定で異なるのは、空間解像度、時間解像度、雲消滅時間である。詳細を表 B.1 に示す。表中の (1) が第 3 章で説明し第 5 章で再解析データとの比較を行った実験の計算設定である。(1)(2)(3) の設定で計算した結果得られた、年平均および季節平均のエネルギー収支、水収支、循環場の物理量の東西平均の図は、図 B.1-10 にまとめた。

また、3 種類の計算結果について、熱収支や水収支に関する各物理量のデータを格子面積で重み付けして求めた年平均での全球平均値を表 B.2 に示す。表中の値の正負は、大気へのエネルギーの入出を区別している(正が入る量、負が出る量)。表中の熱収支と水収支というのは、大気に対する正味の加熱と水蒸気増加を表している。図 B.1 の水色線や図 B.4 の黒色線で示す熱収支と水収支の全球平均値は、高解像度であるほど 0 に近い値になると期待したが、必ずしもそうではないことがわかった。その原因についてはよくわからないが、モデル計算においては一般的に収支は数  $W/m^2$  程度差が生じると言われているので、その点ではどの計算も収支がよくつりあった結果が得られたといえる。

|       | (1)      | (2)      | (3)      |
|-------|----------|----------|----------|
| 空間解像度 | T42L26   | T42L26   | T21L26   |
| 時間解像度 | 3 min    | 3 min    | 15 min   |
| 雲消滅時間 | 1500 sec | 3600 sec | 1500 sec |

表 B.1: 3 種類の実験の計算設定。

| (W/m <sup>2</sup> ) | (1)    | (2)    | (3)    |
|---------------------|--------|--------|--------|
| OLR                 | -230.4 | -230.3 | -234.2 |
| OSR                 | 223.7  | 224.0  | 228.1  |
| SLR                 | 37.6   | 37.9   | 41.7   |
| SSR                 | -154.6 | -154.9 | -160.1 |
| 地表面顕熱フラックス          | 17.0   | 17.1   | 21.5   |
| 凝結加熱率               | 108.4  | 108.1  | 104.1  |
| 熱収支                 | 1.7    | 1.9    | 1.1    |
| 蒸発散フラックス            | 108.6  | 108.2  | 104.2  |
| 凝結加熱率               | 108.4  | 108.1  | 104.1  |
| 水収支                 | 0.2    | 0.1    | 0.1    |

表 B.2: 年平均での全球平均値.

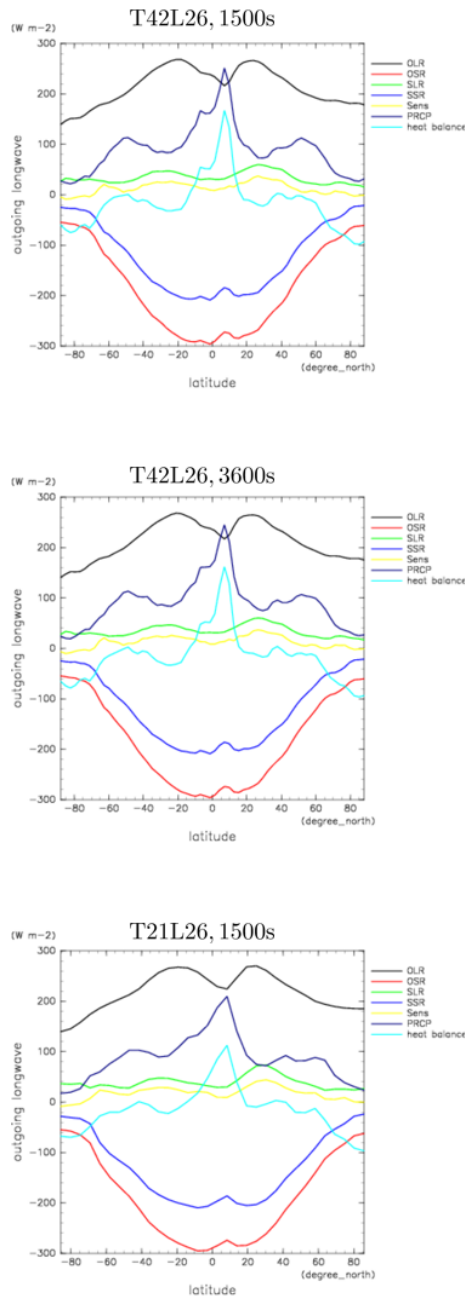


図 B.1: 大気の内味加熱に關係するエネルギーフラックスの東西平均 (年平均). 横軸は緯度 [degree north], 縦軸はエネルギーフラックス [ $W/m^2$ ] である. グラフはそれぞれ, 黒色線が OLR, 赤色線が OSR, 緑色線が SLR, 青色線が SSR, 黄色線が地表面顕熱フラックス, 紺色線が凝結加熱率, 水色線が大気に対する内味の加熱を示す.

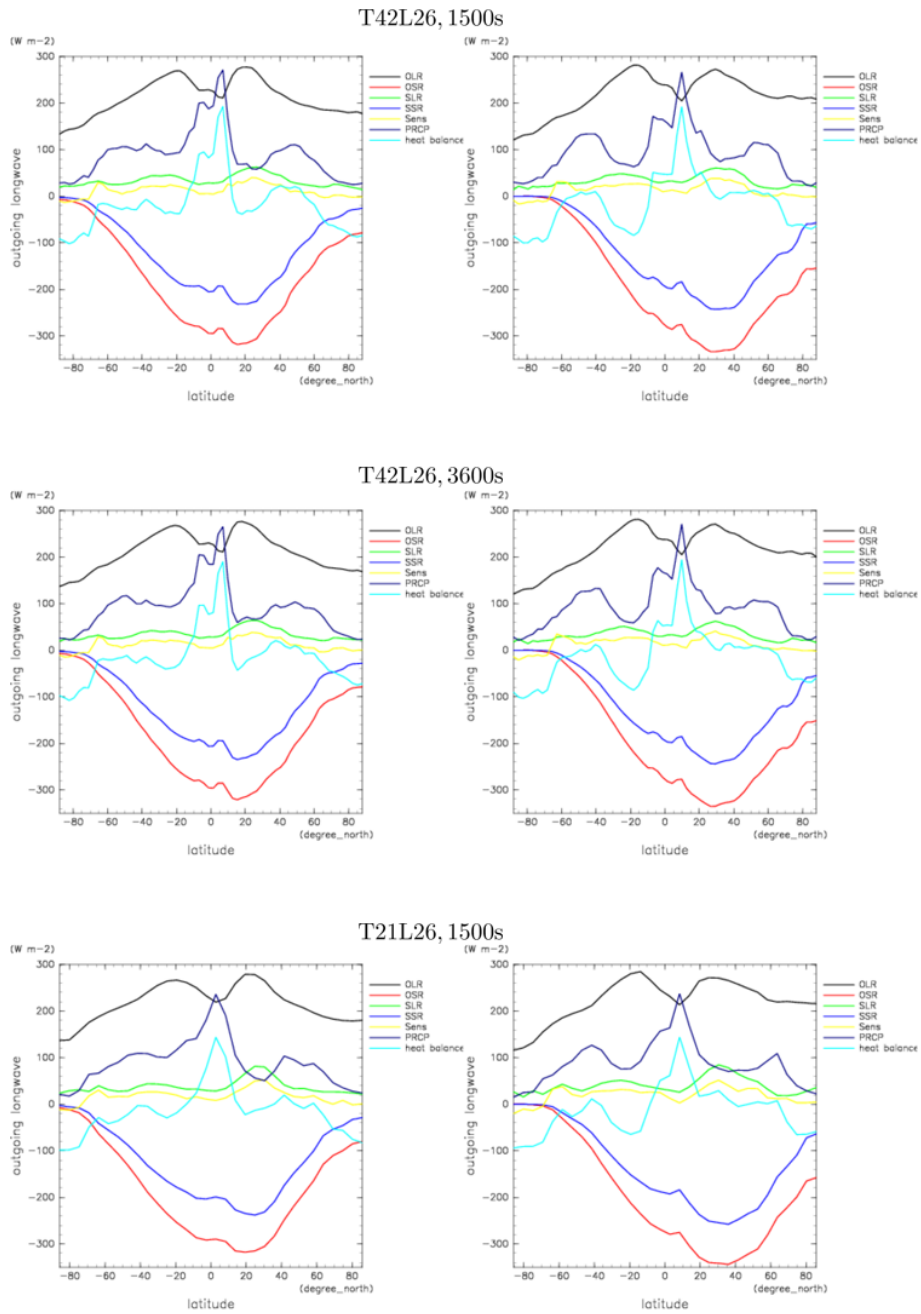


図 B.2: 図 B.1 と同じ. 左列は春平均, 右列は夏平均.

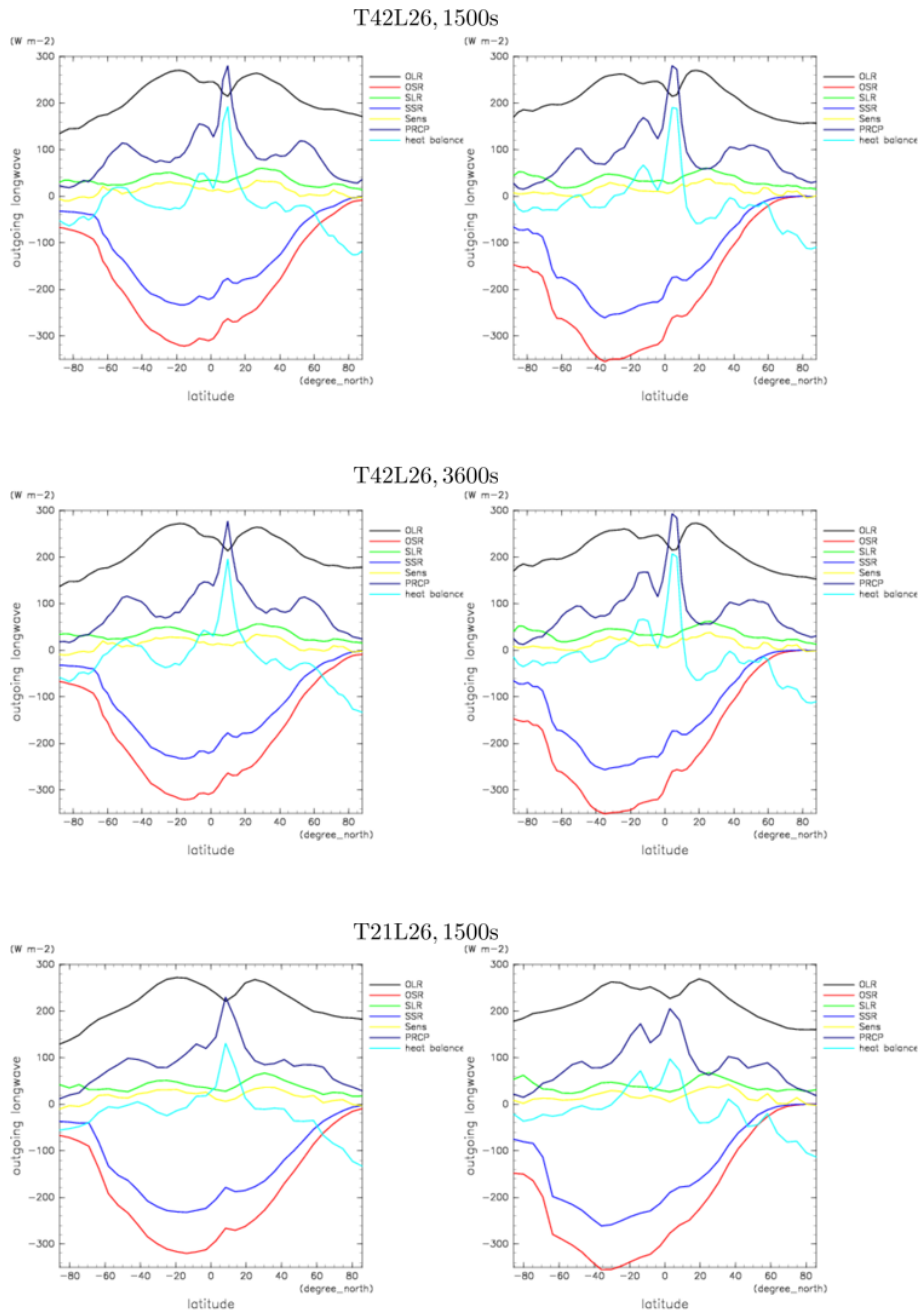


図 B.3: 図 B.1 と同じ. 左列は秋平均, 右列は冬平均.

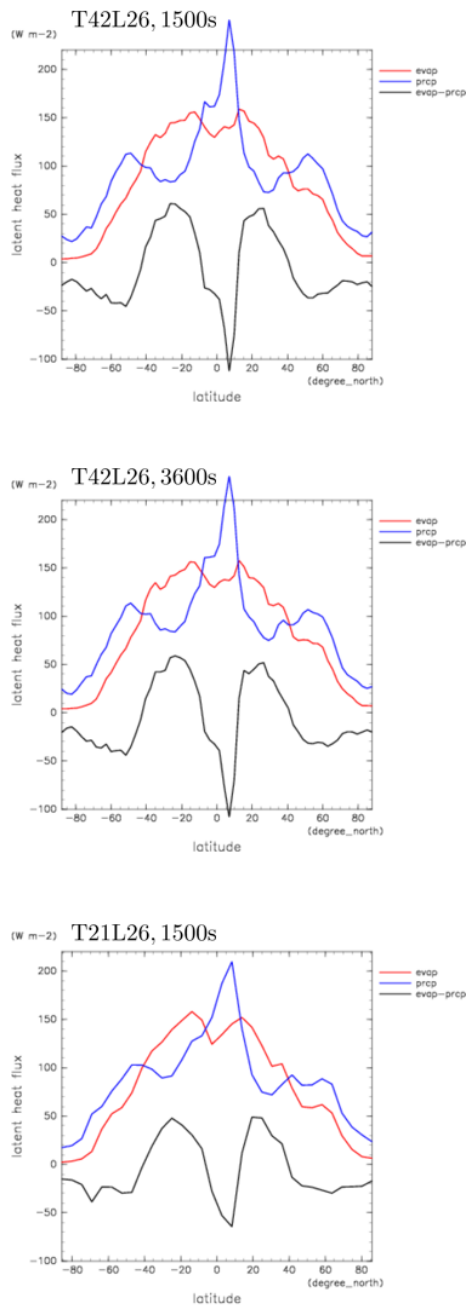


図 B.4: 凝結加熱率 (青色線) と蒸発散フラックス (赤色線) の東西平均 (年平均). 横軸は緯度 [degree north], 縦軸はエネルギーフラックス [ $W/m^2$ ] である. 黒色線は蒸発散と降水の差を示したもので, これが大気に対する正味の水蒸気増加を表す.



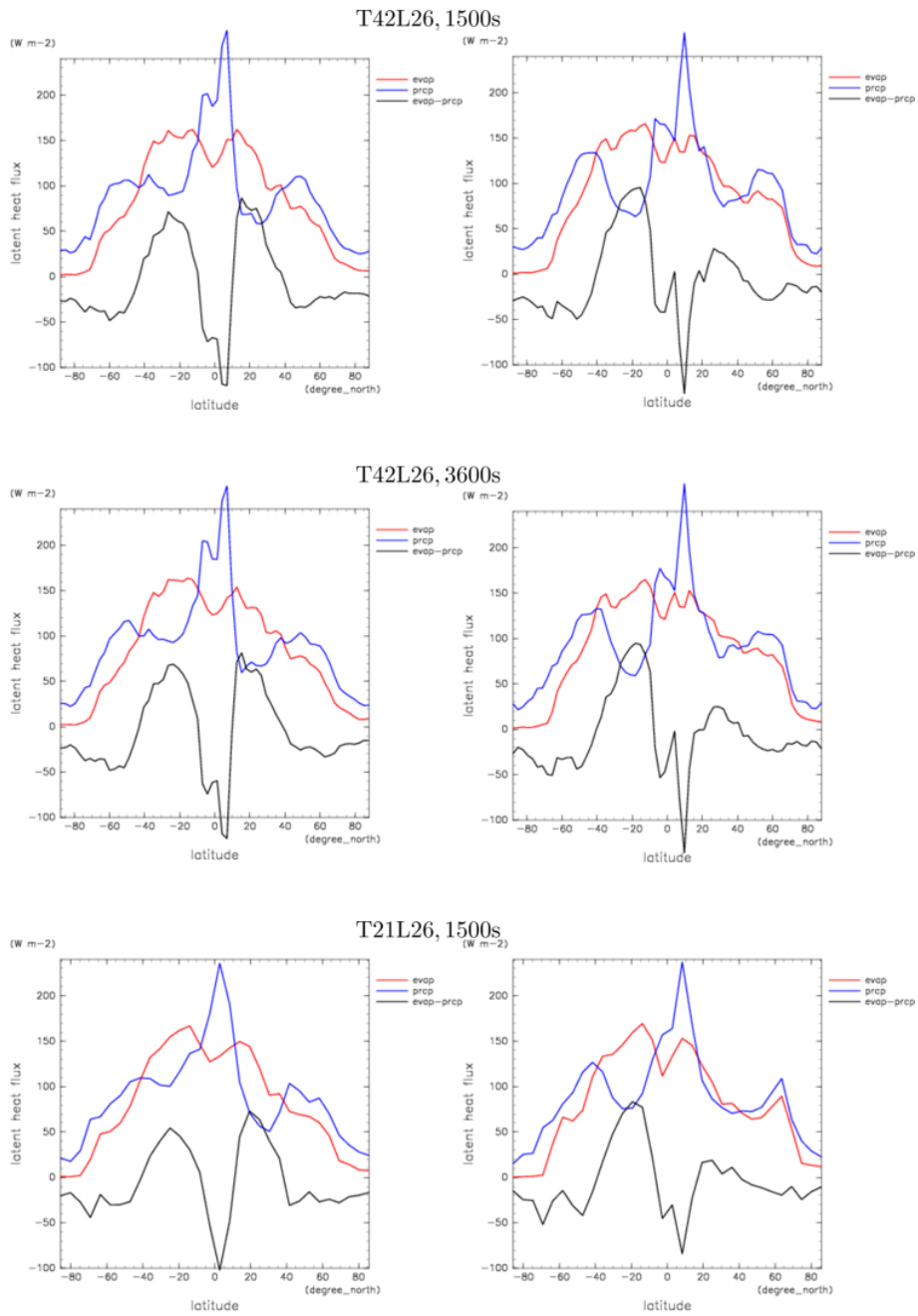


図 B.5: 図 B.4 と同じ. 左列は春平均, 右列は夏平均.

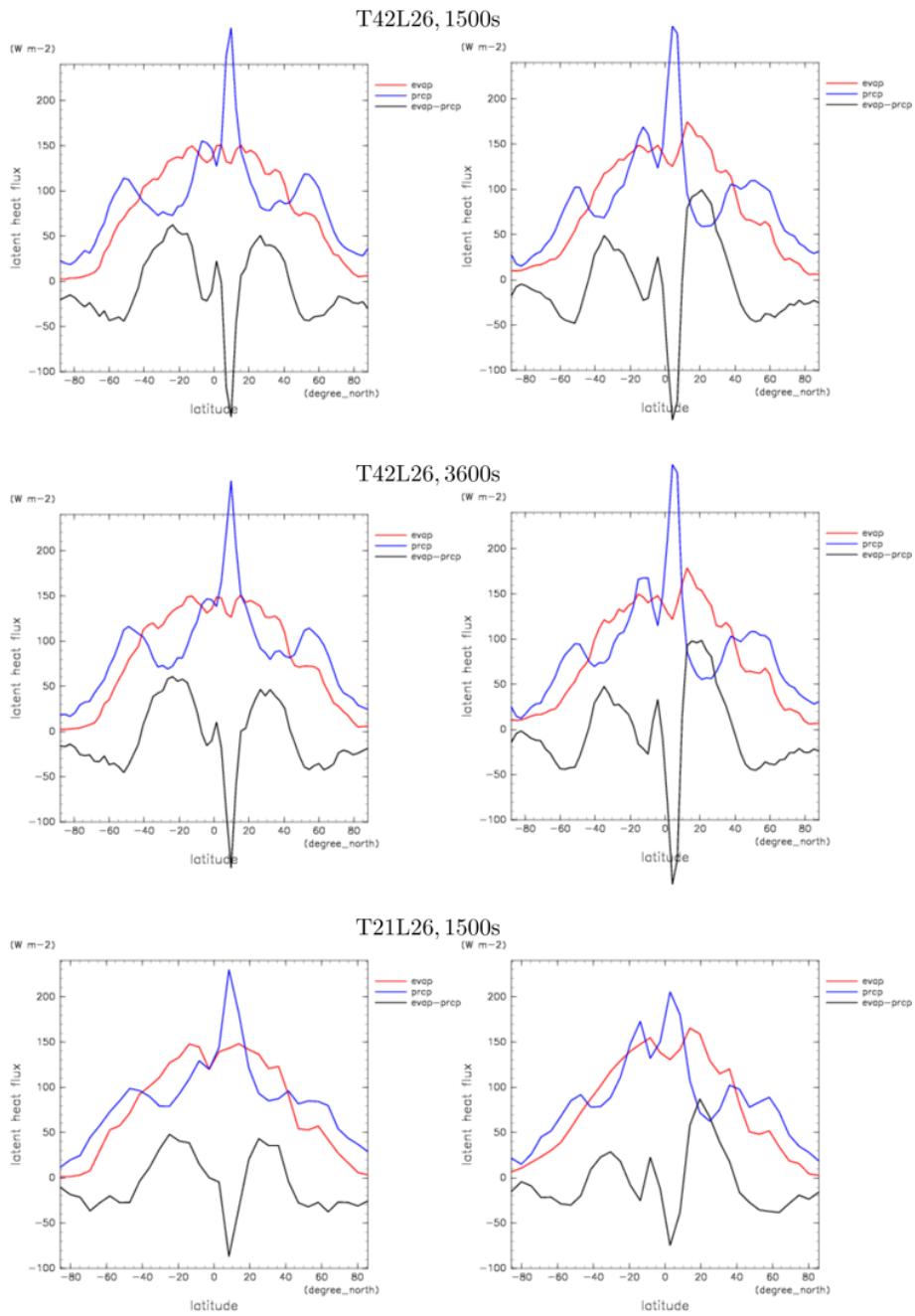


図 B.6: 図 B.4 と同じ. 左列は秋平均, 右列は冬平均.

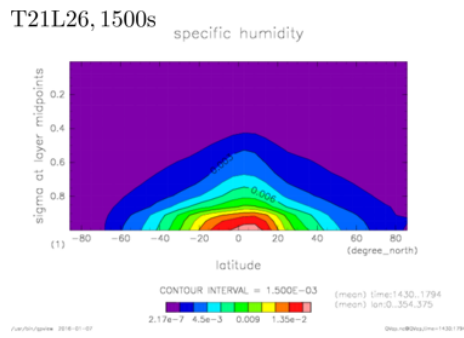
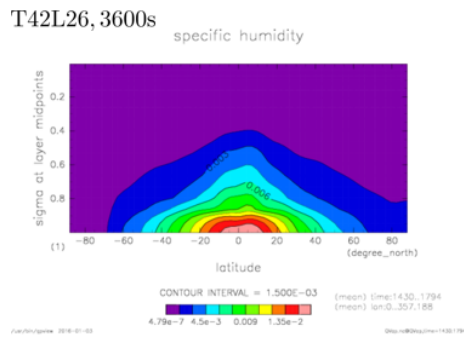
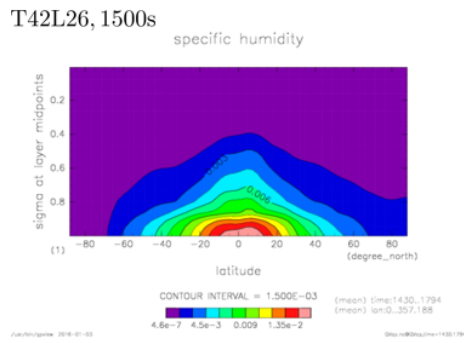


図 B.7: 東西平均した比湿. 横軸は緯度 [degree north], 縦軸は圧力座標. 等値線間隔は  $1.5 \times 10^{-3}$  [kg/kg].

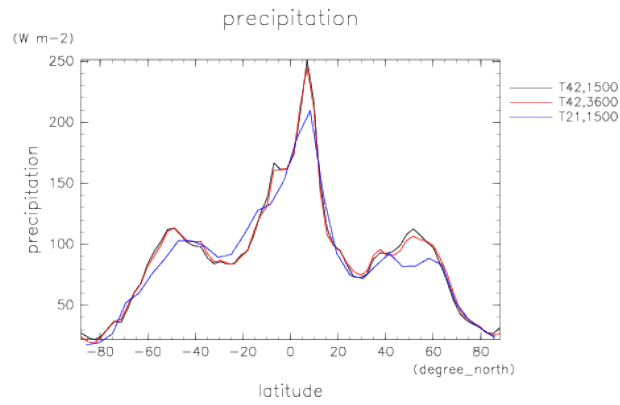


図 B.8: 東西平均した凝結加熱率 (降水量に水の潜熱をかけたもの). 横軸は緯度 [degree north], 縦軸はエネルギーフラックス [ $W/m^2$ ] である. グラフはそれぞれ, 黒色線が T42・雲寿命 1500 秒, 赤色線が T42・雲寿命 3600 秒, 青色線が T21・雲寿命 1500 秒のデータである.

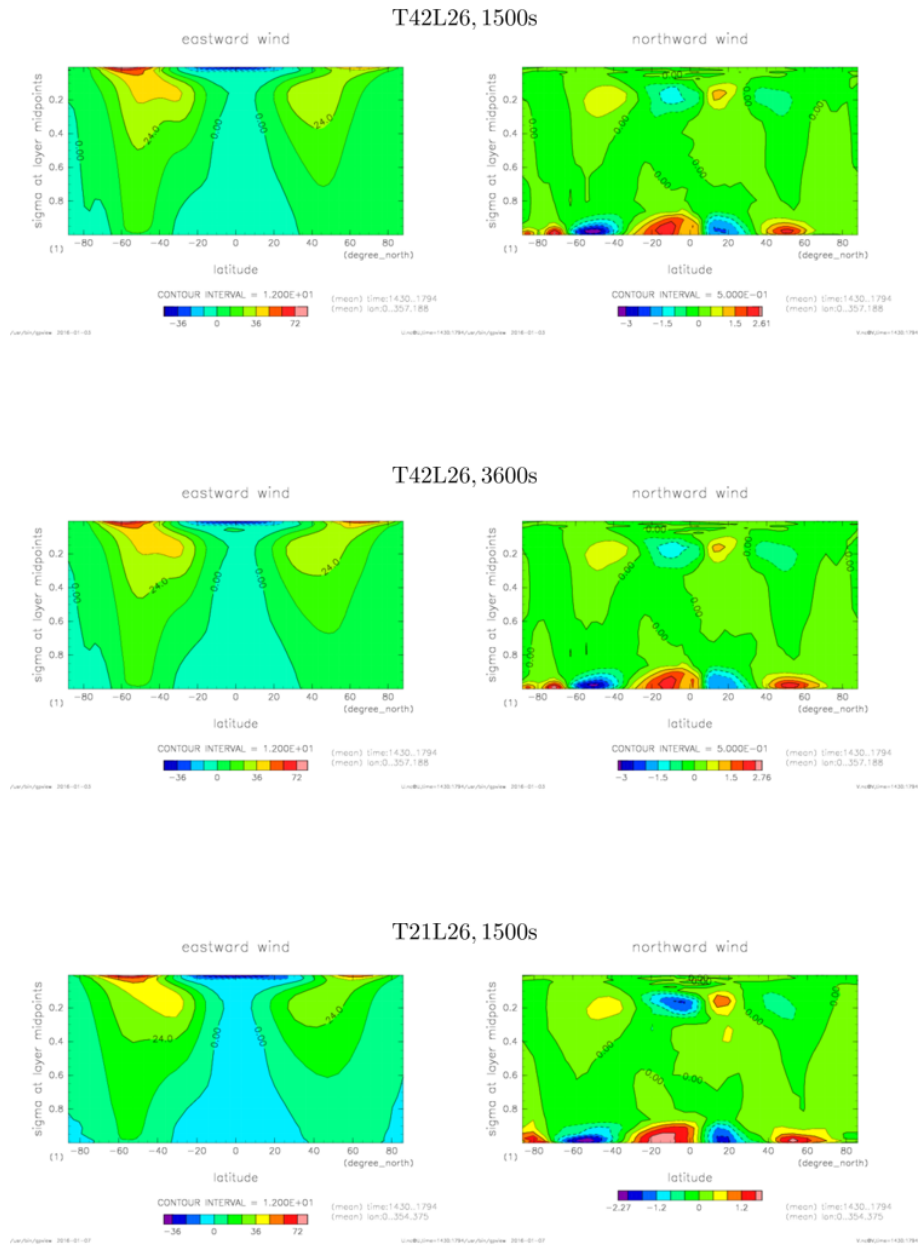


図 B.9: (左) 東西平均した東西風 (右) 東西平均した南北風. 横軸は緯度 [degree north], 縦軸は圧力座標, 等値線間隔は, 東西風は 12 [m/s], 南北風は 0.5 [m/s] である.

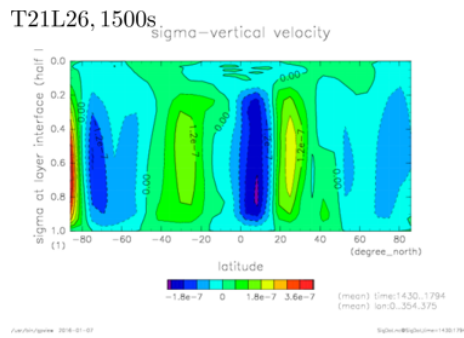
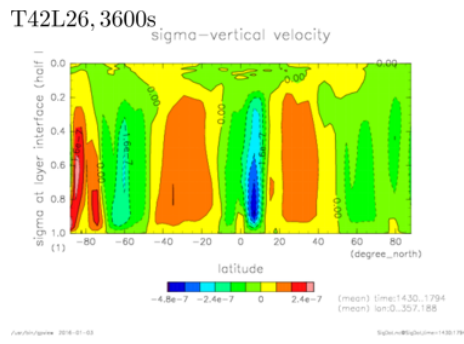
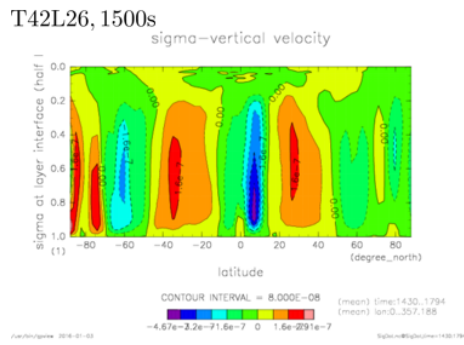


図 B.10: 東西平均した鉛直速度. 横軸は緯度 [degree north], 縦軸は  $\sigma$  座標. 単位は全て  $[s^{-1}]$  であるが, 等値線間隔はそれぞれ異なるので注意されたい.

## 付録 C: 再解析データの描画スクリプト

本研究で作成した再解析データの描画スクリプトを以下に示す。描画するデータの種類や取得方法に関する詳細は本論文の第4章を参照されたい。以下のスクリプトは全て Ruby で書かれている。どのスクリプトにおいても、実行して出力される画像は PDF ファイルである。

- ERA40 の熱収支に関する各物理量の 45 年平均・東西平均.

```

#!/usr/bin/env ruby
# -*- coding: utf-8 -*-

#ERA40 の 45 年・東西平均の熱収支
#梅内 紫芳
#最終更新日: 2016/01/09

require "numru/ggraph"
include NumRu

ttr = GPhys::IO.open('top_net_thermal_rad.nc','ttr')
tsr = GPhys::IO.open('top_net_solar_rad.nc','tsr')
str = GPhys::IO.open('surf_net_thermal_rad.nc','str')
ssr = GPhys::IO.open('surf_net_solar_rad.nc','ssr')
sshf = GPhys::IO.open('surf_sens_hf.nc','sshf')
cp = GPhys::IO.open('conv_prpc.nc','cp')
lsp = GPhys::IO.open('large-scale_prpc.nc','lsp')

#6 時間の秒数で割る
ttr_2 = -ttr/21600
tsr_2 = -tsr/21600
str_2 = -str/21600
ssr_2 = -ssr/21600
sshf_2 = -sshf/21600
cp_2 = (cp/21600)*2500000000
lsp_2 = (lsp/21600)*2500000000
prcp = cp_2 + lsp_2

#大気に対する正味の熱収支
total = (-ttr_2) + (-tsr_2) + str_2 + ssr_2 + sshf_2 + prcp

DCL.groprn(2)
DCL.sgpset('lcntl', false) ; DCL.uzfact(0.7)
GGraph.line(ttr_2.cut('time'=>505488..899208).mean('time','longitude'),
  true, 'max'=>300, 'min'=>-300, 'title'=>'heat balance', 'index'=>15, '
  legend'=>'ttr', 'annotate'=>false)
GGraph.line(tsr_2.cut('time'=>505488..899208).mean('time','longitude'),
  false, 'index'=>25, 'legend'=>'tsr')
GGraph.line(str_2.cut('time'=>505488..899208).mean('time','longitude'),
  false, 'index'=>35, 'legend'=>'str')
GGraph.line(ssr_2.cut('time'=>505488..899208).mean('time','longitude'),
  false, 'index'=>45, 'legend'=>'ssr')
GGraph.line(sshf_2.cut('time'=>505488..899208).mean('time','longitude')
, false, 'index'=>55, 'legend'=>'sshf')
GGraph.line(prcp.cut('time'=>505488..899208).mean('time','longitude'),
  false, 'index'=>75, 'legend'=>'prcp')
GGraph.line(total.cut('time'=>505488..899208).mean('time','longitude'),
  false, 'index'=>95, 'legend'=>'total')
DCL.grcls

```

- ERA40 の熱収支に関する各物理量の各季節平均・東西平均.

```

#!/usr/bin/env ruby
# -*- coding: utf-8 -*-

#ERA40 の季節・東西平均の熱収支
#梅内 紫芳
#最終更新日: 2016/01/09

require "numru/ggraph"
include NumRu

ttr = GPhys::IO.open('top_net_thermal_rad.nc','ttr')
tsr = GPhys::IO.open('top_net_solar_rad.nc','tsr')
str = GPhys::IO.open('surf_net_thermal_rad.nc','str')
ssr = GPhys::IO.open('surf_net_solar_rad.nc','ssr')
sshf = GPhys::IO.open('surf_sens_hf.nc','sshf')
cp = GPhys::IO.open('conv_prpc.nc','cp')
lsp = GPhys::IO.open('large-scale_prpc.nc','lsp')

#初期値設定
ttr_sum = 0
tsr_sum = 0
str_sum = 0
ssr_sum = 0
sshf_sum = 0
cp_sum = 0
lsp_sum = 0
date_sum = 0

#特定の3ヶ月間だけを取り出して平均を取るループ計算
for loop in 1958..2001

  #spring
  date_number = (Time.new(loop,6,1) - Time.new(loop,3,1))/86400
  t_1 = (Time.new(loop,3,1)-Time.new(1900,1,1))/3600
  t_2 = (Time.new(loop,6,1)-Time.new(1900,1,1))/3600

  #summer
  #date_number = (Time.new(loop,9,1) - Time.new(loop,6,1))/86400
  #t_1 = (Time.new(loop,6,1)-Time.new(1900,1,1))/3600
  #t_2 = (Time.new(loop,9,1)-Time.new(1900,1,1))/3600

  #autumn
  #date_number = (Time.new(loop,12,1) - Time.new(loop,9,1))/86400
  #t_1 = (Time.new(loop,9,1)-Time.new(1900,1,1))/3600
  #t_2 = (Time.new(loop,12,1)-Time.new(1900,1,1))/3600

  #winter
  #date_number = (Time.new(loop+1,3,1) - Time.new(loop,12,1))/86400
  #t_1 = (Time.new(loop,12,1)-Time.new(1900,1,1))/3600
  #t_2 = (Time.new(loop+1,3,1)-Time.new(1900,1,1))/3600

  #OLR
  ttr_loop = (ttr.cut('time'=>t_1..t_2)/21600).mean('time')
  ttr_sum = ttr_sum + ttr_loop*date_number

  #OSR
  tsr_loop = (tsr.cut('time'=>t_1..t_2)/21600).mean('time')
  tsr_sum = tsr_sum + tsr_loop*date_number

  #OLR
  str_loop = (str.cut('time'=>t_1..t_2)/21600).mean('time')
  str_sum = str_sum + str_loop*date_number

  #SLR
  ssr_loop = (ssr.cut('time'=>t_1..t_2)/21600).mean('time')

```



```
ssr_sum = ssr_sum + ssr_loop*date_number

#Sens
sshf_loop = (sshf.cut('time'=>t_1..t_2)/21600).mean('time')
sshf_sum = sshf_sum + sshf_loop*date_number

#conv_prcp
cp_loop = (cp.cut('time'=>t_1..t_2)/21600).mean('time')
cp_sum = cp_sum + cp_loop*date_number

#large-scale_prcp
lsp_loop = (lsp.cut('time'=>t_1..t_2)/21600).mean('time')
lsp_sum = lsp_sum + lsp_loop*date_number

date_sum = date_sum + date_number

end

ttr_2 = -ttr_sum / date_sum
tsr_2 = -tsr_sum / date_sum
str_2 = -str_sum / date_sum
ssr_2 = -ssr_sum / date_sum
sshf_2 = -sshf_sum / date_sum
cp_2 = (cp_sum *2500000000) / date_sum #水の凝結熱をかけて単位変換
lsp_2 = (lsp_sum *2500000000) / date_sum #水の凝結熱をかけて単位変換
prcp = cp_2 + lsp_2

total = (-ttr_2) + (-tsr_2) + str_2 + ssr_2 + sshf_2 + prcp

DCL.groprn(2)
DCL.sgpset('lcntl', false) ; DCL.uzfact(0.7)
GGraph.line(ttr_2.mean('longitude'), true, 'max'=>300, 'min'=>-300, 'title'=>'heat balance', 'index'=>15, 'legend'=>'ttr', 'annotate'=>false)
GGraph.line(tsr_2.mean('longitude'), false, 'index'=>25, 'legend'=>'tsr')
GGraph.line(str_2.mean('longitude'), false, 'index'=>35, 'legend'=>'str')
GGraph.line(ssr_2.mean('longitude'), false, 'index'=>45, 'legend'=>'ssr')
GGraph.line(sshf_2.mean('longitude'), false, 'index'=>55, 'legend'=>'sshf')
GGraph.line(prcp.mean('longitude'), false, 'index'=>75, 'legend'=>'prcp')
GGraph.line(total.mean('longitude'), false, 'index'=>95, 'legend'=>'total')
DCL.grcls
```

## ● NCEP2 の熱収支に関する各物理量の 45 年平均・東西平均.

```

#!/usr/bin/env ruby
# -*- coding: utf-8 -*-

#NCEP の 45 年・東西平均の熱収支
#梅内 紫芳
#最終更新日: 2016/01/09

require "numru/ggraph"
include NumRu

ulwrf_ntat = GPhys::IO.open('ulwrf.ntat.mon.mean.nc', 'ulwrf')
dswrf_ntat = GPhys::IO.open('dswrf.ntat.mon.mean.nc', 'dswrf')
uswrf_ntat = GPhys::IO.open('uswrf.ntat.mon.mean.nc', 'uswrf')
ulwrf_sfc = GPhys::IO.open('ulwrf.sfc.mon.mean.nc', 'ulwrf')
dlwrf_sfc = GPhys::IO.open('dlwrf.sfc.mon.mean.nc', 'dlwrf')
dswrf_sfc = GPhys::IO.open('dswrf.sfc.mon.mean.nc', 'dswrf')
uswrf_sfc = GPhys::IO.open('uswrf.sfc.mon.mean.nc', 'uswrf')
shtfl = GPhys::IO.open('shtfl.sfc.mon.mean.nc', 'shtfl')
prate = GPhys::IO.open('prate.sfc.mon.mean.nc', 'prate')

#正味の計算
olr = ulwrf_ntat
osr = -(dswrf_ntat - uswrf_ntat)
slr = ulwrf_sfc - dlwrf_sfc
ssr = -(dswrf_sfc - uswrf_sfc)
prate_2 = prate*2500000

#大気に対する正味の熱収支
total = (-olr) + (-osr) + slr + ssr + shtfl + prate_2

DCL.groptn(2)
DCL.sgpset('lcntl', false) ; DCL.uzfact(0.7)
GGraph.line(olr.cut('time'=>1569072..1888992).mean('time','lon'), true,
  'max'=>300, 'min'=>-300, 'title'=>'heat balance', 'index'=>15, 'legend
'=>'olr', 'annotate'=>false)
GGraph.line(osr.cut('time'=>1569072..1888992).mean('time','lon'), false
, 'index'=>25, 'legend'=>'osr')
GGraph.line(slr.cut('time'=>1569072..1888992).mean('time','lon'), false
, 'index'=>35, 'legend'=>'slr')
GGraph.line(ssr.cut('time'=>1569072..1888992).mean('time','lon'), false
, 'index'=>45, 'legend'=>'ssr')
GGraph.line(shtfl.cut('time'=>1569072..1888992).mean('time','lon'), fal
se, 'index'=>55, 'legend'=>'shtfl')
GGraph.line(prate_2.cut('time'=>1569072..1888992).mean('time','lon'), f
alse, 'index'=>75, 'legend'=>'prate')
GGraph.line(total.cut('time'=>1569072..1888992).mean('time','lon'), fal
se, 'index'=>95, 'legend'=>'total')
DCL.grcls

```

## ● NCEP2 の熱収支に関する各物理量の各季節平均・東西平均.

```

#!/usr/bin/env ruby
# -*- coding: utf-8 -*-

#NCEP の季節・東西平均の熱収支
#梅内 紫芳
#最終更新日: 2016/01/09

require "numru/ggraph"
include NumRu

ulwrf_ntat = GPhys::IO.open('ulwrf.ntat.mon.mean.nc','ulwrf')
dswrf_ntat = GPhys::IO.open('dswrf.ntat.mon.mean.nc','dswrf')
uswrf_ntat = GPhys::IO.open('uswrf.ntat.mon.mean.nc','uswrf')
ulwrf_sfc = GPhys::IO.open('ulwrf.sfc.mon.mean.nc','ulwrf')
dlwrf_sfc = GPhys::IO.open('dlwrf.sfc.mon.mean.nc','dlwrf')
dswrf_sfc = GPhys::IO.open('dswrf.sfc.mon.mean.nc','dswrf')
uswrf_sfc = GPhys::IO.open('uswrf.sfc.mon.mean.nc','uswrf')
shtfl = GPhys::IO.open('shtfl.sfc.mon.mean.nc','shtfl')
prate = GPhys::IO.open('prate.sfc.mon.mean.nc','prate')

#初期値設定
ulwrf_ntat_sum = 0
dswrf_ntat_sum = 0
uswrf_ntat_sum = 0
ulwrf_sfc_sum = 0
dlwrf_sfc_sum = 0
dswrf_sfc_sum = 0
uswrf_sfc_sum = 0
shtfl_sum = 0
prate_sum = 0
date_sum = 0

#特定の3ヶ月間だけを取り出して平均を取るループ計算
for loop in 1979..2014

  #spring
  date_number = (Time.new(loop,6,1) - Time.new(loop,3,1))/86400
  t_1 = (Time.new(loop,3,1)-Time.new(1800,1,1))/3600
  t_2 = (Time.new(loop,6,1)-Time.new(1800,1,1))/3600

  #summer
  #date_number = (Time.new(loop,9,1) - Time.new(loop,6,1))/86400
  #t_1 = (Time.new(loop,6,1)-Time.new(1800,1,1))/3600
  #t_2 = (Time.new(loop,9,1)-Time.new(1800,1,1))/3600

  #autumn
  #date_number = (Time.new(loop,12,1) - Time.new(loop,9,1))/86400
  #t_1 = (Time.new(loop,9,1)-Time.new(1800,1,1))/3600
  #t_2 = (Time.new(loop,12,1)-Time.new(1800,1,1))/3600

  #winter
  #date_number = (Time.new(loop+1,3,1) - Time.new(loop,12,1))/86400
  #t_1 = (Time.new(loop,12,1)-Time.new(1800,1,1))/3600
  #t_2 = (Time.new(loop+1,3,1)-Time.new(1800,1,1))/3600

  #ulwrf_ntat
  ulwrf_ntat_loop = ulwrf_ntat.cut('time'=>t_1..t_2).mean('time')
  ulwrf_ntat_sum = ulwrf_ntat_sum + ulwrf_ntat_loop*date_number

  #dswrf_ntat
  dswrf_ntat_loop = dswrf_ntat.cut('time'=>t_1..t_2).mean('time')
  dswrf_ntat_sum = dswrf_ntat_sum + dswrf_ntat_loop*date_number

  #uswrf_ntat
  uswrf_ntat_loop = uswrf_ntat.cut('time'=>t_1..t_2).mean('time')

```

```
uswrf_ntat_sum = uswrf_ntat_sum + uswrf_ntat_loop*date_number

#ulwrf_sfc
ulwrf_sfc_loop = ulwrf_sfc.cut('time'=>t_1..t_2).mean('time')
ulwrf_sfc_sum = ulwrf_sfc_sum + ulwrf_sfc_loop*date_number

#dlwrf_sfc
dlwrf_sfc_loop = dlwrf_sfc.cut('time'=>t_1..t_2).mean('time')
dlwrf_sfc_sum = dlwrf_sfc_sum + dlwrf_sfc_loop*date_number

#dswrf_sfc
dswrf_sfc_loop = dswrf_sfc.cut('time'=>t_1..t_2).mean('time')
dswrf_sfc_sum = dswrf_sfc_sum + dswrf_sfc_loop*date_number

#uswrf_sfc
uswrf_sfc_loop = uswrf_sfc.cut('time'=>t_1..t_2).mean('time')
uswrf_sfc_sum = uswrf_sfc_sum + uswrf_sfc_loop*date_number

#shtfl
shtfl_loop = shtfl.cut('time'=>t_1..t_2).mean('time')
shtfl_sum = shtfl_sum + shtfl_loop*date_number

#prate
prate_loop = prate.cut('time'=>t_1..t_2).mean('time')
prate_sum = prate_sum + prate_loop*date_number

date_sum = date_sum + date_number

end

olr = ulwrf_ntat_sum / date_sum
osr = -((dswrf_ntat_sum / date_sum) - (uswrf_ntat_sum / date_sum))
slr = (ulwrf_sfc_sum / date_sum) - (dlwrf_sfc_sum / date_sum)
ssr = -((dswrf_sfc_sum / date_sum) - (uswrf_sfc_sum / date_sum))
shtfl_2 = shtfl_sum / date_sum
prate_2 = (prate_sum *2500000) / date_sum

total = (-olr) + (-osr) + slr + ssr + shtfl_2 + prate_2

DCL.groprn(2)
DCL.sgpset('lcntl', false) ; DCL.uzfact(0.7)
GGraph.line(olr.mean('lon'), true, 'max'=>300, 'min'=>-300, 'title'=>'heat balance', 'index'=>15, 'legend'=>'olr', 'annotate'=>false)
GGraph.line(osr.mean('lon'), false, 'index'=>25, 'legend'=>'osr')
GGraph.line(slr.mean('lon'), false, 'index'=>35, 'legend'=>'slr')
GGraph.line(ssr.mean('lon'), false, 'index'=>45, 'legend'=>'ssr')
GGraph.line(shtfl_2.mean('lon'), false, 'index'=>55, 'legend'=>'shtfl')
GGraph.line(prate_2.mean('lon'), false, 'index'=>75, 'legend'=>'prate')
GGraph.line(total.mean('lon'), false, 'index'=>95, 'legend'=>'total')
DCL.grcls
```