

# 天王星と海王星の内部構造

重綱 理音

学籍番号 : 02170432

\*\*\*\*\*

北海道大学理学部地球惑星科学科

指導教員 : 倉本 圭・鎌田 俊一

\*\*\*\*\*

2021年3月25日

## 概要

巨大氷惑星である天王星と海王星は地球から遠く離れているため観測が限られていたが、それぞれ 1986 年と 1989 年のボイジャー 2 号の接近観測により重力場、大気の組成と構造、固有磁場等が明らかになった。特に重力場データは両天体の内部構造推定に重要である。天王星と海王星の材料物質や形成過程はその内部構造に反映されているため、内部構造を研究することで両天体の起源に関する手がかりが得られることが期待される。天王星と海王星の内部構造についてこれまでいくつかのモデルが提唱されてきた。古典的なものは円盤ガス成分からなる外層、氷、岩石の 3 層構造をしていると説明している。しかし近年では層構造でなく連続構造を仮定したモデルもまた観測結果に整合することがわかり、意見が分かれている。

そこで本研究では天王星と海王星の内部構造推定の最新の理解について学ぶことを目的として、最新の内部構造モデルの 1 つである Helled et al. (2011) のレビューを行った。

天王星と海王星の内部には、平均密度-質量関係から氷成分と岩石成分の存在が示唆され、浅部に源がある磁場、円盤ガスより高い大気中の D/H 比から  $\text{H}_2\text{O}$  の存在が示唆される。ここで氷成分とは、材料物質の段階で氷として存在した  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CH}_4$ ,  $\text{NH}_3$  等を指す。Helled et al. (2011) は内部組成にあらかじめ仮定を置かずに、重力調和係数 ( $J_2$ ,  $J_4$ ), 惑星半径, 質量, 自転周期に制約される天王星と海王星の非先験的圧力-密度分布モデルを求めた。さらに外層物質の代表として H, He, 氷成分の代表として  $\text{H}_2\text{O}$ , 岩石成分の代表として  $\text{SiO}_2$  を想定し、それぞれの状態方程式を用いて、求めた非先験的圧力-密度分布と整合的な物質分布を推定した。その結果、両惑星の重元素は惑星中心に向かって徐々に増加することが示された。推定組成分布は一意的でなく、重元素を帯びた物質として氷成分のみあるいは岩石成分のみを想定しても、重力データを説明することができる。また、2 つのタイプの物質分布モデルを提示している。1 つ目は、惑星の表面から中心まで単調に重元素の混合比が上昇するものである。2 つ目は、3 層構造であるが古典的な 3 層構造モデルとは異なり、重元素混合比がほぼ 0 である外層と、一様な高い重元素混合比を持つ中心核、そして外層と中心核をつなぐ遷移層からなり、遷移相では重元素が深さと共に連続的に増加する。どちらのモデルも重力調和係数によくフィットし、天王星と海王星のモデル全体組成は似通っている。

最近の惑星形成論によれば天王星と海王星は形成後期に巨大衝突を経験した可能性がある。両天体は形成当初は層構造を持っていたが、後に衝突で壊されたということも考えられる。Helled et al. (2011) の結果は、層構造が破壊された構造物も、現時点で得られている両惑星の観測データと矛盾しないことを示している。

天王星についてはそう遠くない将来、新たな接近観測が行われることが期待される。それに向け、正確な内部構造を得るためにどのような観測を行うべきか検討することが求められる。

## 目次

|     |                                |    |
|-----|--------------------------------|----|
| 1   | 背景と目的                          | 3  |
| 2   | 天王星と海王星の起源                     | 3  |
| 3   | 内部構造の制約条件                      | 5  |
| 4   | 古典的内部構造モデル                     | 10 |
| 5   | 非先験的内部構造モデル                    | 10 |
| 5.1 | 重力観測を元にする密度モデル                 | 10 |
| 5.2 | 組成の解釈                          | 14 |
| 5.3 | フィッティング結果                      | 16 |
| 6   | 考察                             | 19 |
| 7   | まとめ                            | 21 |
|     | 謝辞                             | 23 |
|     | 付録 A ルジャンドル多項式について             | 25 |
|     | 付録 B 密度と重力調和係数の関係式の導出          | 29 |
|     | 付録 C 密度多項式の係数を 5 つに減らす方法       | 40 |
|     | 付録 D 静水圧平衡の式及び質量連続の式の規格化前と後の関係 | 42 |
|     | 付録 E Helled et al. (2011) 全訳   | 44 |
|     | 参考文献                           | 56 |

## 1 背景と目的

天王星と海王星は、それぞれ太陽系の第 7, 第 8 惑星である。太陽と地球から遠く離れているため (表 (1)) 直接的な観測が困難であり謎が多かったが、ボイジャー 2 号が 1986 年と 1989 年にそれぞれの天体に接近観測を行ったことでその物理的特徴 (表 1), 化学的特徴 (表 2) が一部明らかになった。得られたデータの中で密度と質量の関係 (図 1) に注目すると天王星と海王星の独自の特徴が見えてくる。つまり木星と土星はほとんどが H と He で構成された惑星であることが示唆される一方で、天王星と海王星は H と He だけでなく氷や岩石で構成されていることが示唆される。天体の内部組成と構造は天体の形成過程を反映しているため、太陽系で最も外側にある天王星と海王星は巨大ガス惑星とは異なる独自の起源を持つと考えられる。

本研究は、天王星と海王星の内部構造について、推定手法と現在の理解を初学者にもわかるように解説することを目的とする。そのために最新の内部構造推定の一つである Helled et al. (2011) のレビューをおこなった。この論文では天王星と海王星の密度と圧力の内部分布を観測データから推定し、その組成的な解釈を行うことで両惑星の内部構造がモデル化されている。

## 2 天王星と海王星の起源

天王星と海王星の形成論は様々なものがあるが、もっとも広く受け入れられているものは (不完全) コア集積モデルである。コア集積モデルとは、原始太陽系円盤において固体成分が集積することでまず固体の惑星 (コア) が形成され、その後重力により円盤ガスを取り込み、ガス惑星になったとするモデルである。このモデルではガスを取り込んで惑星質量が増えることで重力が増し、より多くの円盤ガスを引き寄せさらに質量が増えるという正のフィードバックが起こる。これを暴走ガス集積と呼ぶ。しかし天王星と海王星は、外層の質量が比較的小さいことから、暴走ガス集積は十分には進まなかったとみられる。そのため、コアの形成に基づく巨大氷惑星の形成論は、(不完全) コア集積モデルとも呼ばれる。

コア集積モデルにおける固体惑星の形成については、微惑星集積モデルとペブル集積モデルの大きく 2 つが提唱されている。

### 微惑星集積モデル

微惑星集積モデルは円盤内のダストの付着成長によってまず無数の微惑星が形成されることを想定する。微惑星の集団の中で特に大きいものが、より小さな微惑星を重力で取り込み優先的に成長して原始惑星となる。

原始惑星はその重力により円盤ガスを取り込むことで外層を持つようになる。外惑星領域で、原始惑星がいくつ成長したのかは、初期の固体成分の分布に依存し、はっきりしていない。多数形成された場合は、相互の巨大衝突も経た可能性も

ある。

天王星と海王星は公転速度が遅いため、もし両惑星が現在の位置で形成されたとすると、このモデルでは成長が遅過ぎ、太陽系の年齢内に現在の質量に到達できないという問題がある。これはかつて現在より内側の軌道で両天体が形成された後に木星から重力相互作用によって角運動量を受け取り現在の軌道まで移動したと考えると説明がつく。

### ペブル集積モデル

数 mm から数 cm サイズのペブル (小石) が集積して惑星ができるというペブル集積モデルは、巨大惑星のコアを短時間で形成することができる可能性があり、近年注目を集めている。最初になんらかの原因で固体物質が自己重力でまとまった惑星の種が形成されることを前提とする。太陽の周りを公転するペブルは大きさが小さい故に、円盤ガスから摩擦抵抗を強く受け、角運動量を失い軌道半径が小さくなる。この現象によって惑星の種の公転軌道に向かってどんどんペブルが供給され、これを取り込むことで惑星が成長する。

質量がある程度大きくなると原始惑星は円盤ガスを重力で取り込み外層を持つようになる。その後もペブルの降着は続くが、外層に突入したペブルは固体コアに落下する前に燃え尽きて気体となってしまう。惑星質量が増加するにつれ重力も増し、さらに多くのペブルを引き寄せる。他方、集積熱によって昇温した大気の圧力が存在するため、ペブルの集積が盛んなうちは円盤ガスを取り込む効率は低い。この段階で円盤ガスが消失することで薄い外層を持つ天王星と海王星の形成を説明できる。ペブル集積モデルによる巨大惑星形成は、ペブルが外側の軌道から供給される効果により、固体コアの成長が速い。そのため天王星と、海王星が現在の軌道の付近で形成したとしてもおかしくない。

ここで本来の「不完全」でないコア集積モデルについても述べておく。ガスの質量が固体部分の質量を超えると大気の静水圧平衡が崩れ、ガスが惑星に向かって落ち込んでいくようになる。この段階では、重力が卓越して、ガスの流入を昇温した大気の圧力によって妨げる効果が働かなくなり、円盤ガスを集め惑星の質量が増すほど、その重力によってさらに急速に円盤ガスを集めるようになる。この正のフィードバックが働いている状態を暴走ガス集積と呼ぶ。これによって惑星周辺のガス密度が少なくなるまで成長を続ける。惑星質量が木星質量程度に達すると、惑星重力によるトルクが、円盤ガスを惑星軌道の周囲から排除する効果が生じ、ガスの流入が停止する。

微惑星集積かペブル集積かに依らず、コア集積を経て生じた巨大氷惑星は、中心に氷成分と岩石成分の混合物からなる固体のコア、その外側に円盤ガスからなる外層を持つようになる。融解によって固体のコアが分化すれば、中心部の岩石層を氷層 (正確には高温高圧状態の氷成分からなる層) が取り巻くようになるであろう。ペブル集積モデルでは外層形成後に降着したペブルが外層に気化して取り込まれるため、微惑星集積モデルよりも外層は重元素に富み、分厚くなる可能性が

ある. 一方, 原始惑星が多数形成され, 原始惑星がそれぞれ外層を獲得した後に巨大衝突が起きた場合, 外層の物質と固体コアの間で物質の攪拌が起き, 内部に明瞭な組成境界が存在しなくなる可能性も考えられる.

表 1: 天王星と海王星の物理的特徴.  $R_{\text{ref}}$  は重力調和係数  $J_n$  を基準にした半径.

|                             | 天王星                 | 海王星                 | reference |
|-----------------------------|---------------------|---------------------|-----------|
| 質量 $M$ (地球質量)               | 14.536              | 17.147              | 1         |
| 平均密度 ( $\text{kg m}^{-3}$ ) | 1,266.46            | 1,630.53            | 6         |
| 1 bar 半径 (km)               | $25,559 \pm 4$      | $24,764 \pm 15$     | 6         |
| 半径 $R_{\text{ref}}$ (km)    | 26,200              | 25,225              | 6         |
| 軌道半径 (AU)                   | 19.1497             | 29.967              | 2, 4      |
| 公転周期 (年)                    | 84.01               | 164.794             | 3, 4      |
| 赤道傾斜角 (度)                   | 99.77               | 28.32               | 2, 4      |
| 自転周期 (時間)                   | 17.24               | 16.11               | 6         |
| 黒体温度 (K)                    | 58.1                | 46.6                | 2, 4      |
| 慣性モーメント ( $MR^2$ )          | 0.225               | 0.24                | 2, 5      |
| $J_2$                       | $3,341.29 \pm 0.72$ | $3,408.43 \pm 4.50$ | 6         |
| $J_4$                       | $-30.44 \pm 1.02$   | $-33.40 \pm 2.90$   | 6         |

1: Helled et al. (2011), 2: NASA Uranus Fact Sheet, 3: Allison et al. (1991), 4: NASA Neptune Fact Sheet, 5: Hubbard et al. (1991), 6: <http://ssd.jpl.nasa.gov>, Jacobson (2003), Jacobson et al. (2006)

表 2: 巨大惑星の主要大気組成.

|     | $\text{H}_2$     | He               | reference |
|-----|------------------|------------------|-----------|
| 天王星 | $82.5 \pm 3.3\%$ | $15.2 \pm 3.3\%$ | 1         |
| 海王星 | $80.0 \pm 3.2\%$ | $19.0 \pm 3.2\%$ | 2         |
| 木星  | $89.8 \pm 2.0\%$ | $10.2 \pm 2.0\%$ | 3         |
| 土星  | $96.3 \pm 2.4\%$ | $3.25 \pm 2.4\%$ | 4         |

1: NASA Uranus Fact Sheet, 2: NASA Neptune Fact Sheet, 3: NASA Jupiter Fact Sheet, 4: NASA Saturn Fact Sheet

### 3 内部構造の制約条件

#### 構成物の推定

天王星と海王星の内部構造推定に必要な, 組成に関する制約条件について説明する.

ボイジャー 2 号の観測の結果, 天王星と海王星の表面の大気はほとんどが水素

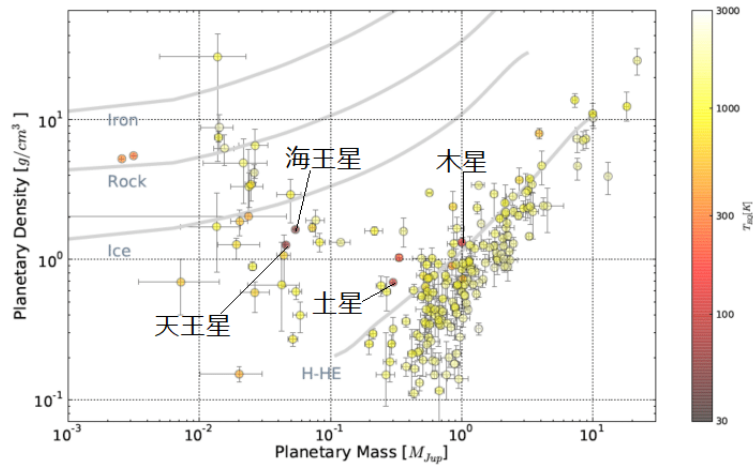


図 1: 質量と半径が特定されている惑星の密度-質量図. 系外惑星も含んでいる. Fischer et al. (2015) の元図に一部加筆した. カラースケールは平衡温度を表す. 灰色の曲線はそれぞれ H-He のみ, 氷のみ, 岩石のみ, 鉄のみで惑星を作った場合の密度-質量関係を表す.

とヘリウムであることが判明した (表 2). これは巨大ガス惑星に似ている. しかし, 平均密度, 磁場情報, 大気中の D/H の分析から, 表層以深はより重い物質で構成されていると推測される.

#### 天王星と海王星の質量-密度関係

天王星と海王星の平均密度はそれぞれ  $1,271 \text{ kg/m}^3$ ,  $1,638 \text{ kg/m}^3$  であり, 質量はそれぞれ  $0.045735$ ,  $0.053953$  木星質量である (図 1). 図 1 には, それぞれ H-He (H と He), Ice (氷), Rock (岩石), Iron (鉄) のみで惑星を作った場合の質量-密度関係が曲線で示されている. 各曲線と木星, 土星, 天王星, 海王星を比較すると木星と土星は H と He のみで作った惑星の質量-密度関係に非常に近い一方で, 天王星と海王星は H と He のみで作った惑星の質量-密度関係と氷や岩石のみで作った惑星の質量-密度関係の間に位置している. このことから木星と土星は内部も表面と同じくほぼ H と He のみで構成されており, 天王星と海王星は, 表面は H と He が豊富であるが内部は氷や岩石由来の物質が豊富であることが示唆される.

太陽系元素存在度 (図 2) に注目すると太陽系では H, He が圧倒的に多く, それに O と C が次ぐ. O は比較的存在度の高い Mg, Si, Fe, C, H と化合して珪酸塩を作り, また C の一部が O と化合して CO や CO<sub>2</sub> を形成する. 残りの酸素は H と結びついて H<sub>2</sub>O を作る. 酸化物は揮発性のものと非揮発性のものに分けられ, 揮発性のものとしては H<sub>2</sub>O が, 非揮発性のものとしては Mg, Si, Fe などの酸化物が特に多く存在するはずである. 前者は CH<sub>4</sub>, NH<sub>3</sub> などと共にスノーラインの外側で氷成分として, 後者は, 金属鉄や硫化鉄と共に原始惑星系円盤の全領域で岩石成分として惑星材料物質になる. 天王星や海王星が形成されるような軌道半径

はスノーラインより外側であるため、氷成分が惑星材料物質に加わる。これらの成分とを豊富に取り込んで両天体が形成されたとすれば、質量-密度関係の説明がつく。

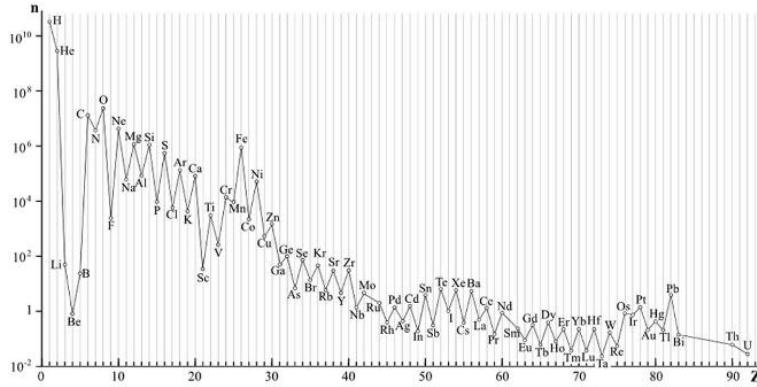


図 2: 太陽系元素存在度 (Cameron 1973). 横軸は原子番号, 縦軸は相対存在量を示す。

### 天王星と海王星の磁場

ボイジャー 2 号は両天体に偏心した磁場を検出しており、その性質から比較的浅部に  $\text{H}_2\text{O}$  が存在すると推測できる。観測された磁場は双極子近似を行うと磁気中心が惑星の中心から大きくずれており、磁軸も自転軸に対し大きく傾いている (図 3)。磁場は多極子展開すると高次項ほど距離の大きなべき乗に反比例して強度が減少するため、浅部に源を持つ多極性の磁場が、探査機の位置からこのような磁場として観測されたと考えられる。これは電気伝導度の高い流体が比較的浅部に存在して磁場を形成していることを示唆する。この流体が金属鉄である可能性は低い。なぜなら主な惑星材料物質で最も密度が高い鉄は惑星の中心部に分布し、浅部にはほとんど分布しないからである。このことと前節の惑星を形成する材料の候補を考慮すると、磁場を作り出している流体は高温高圧下で電気伝導性を獲得した水である可能性が高い。

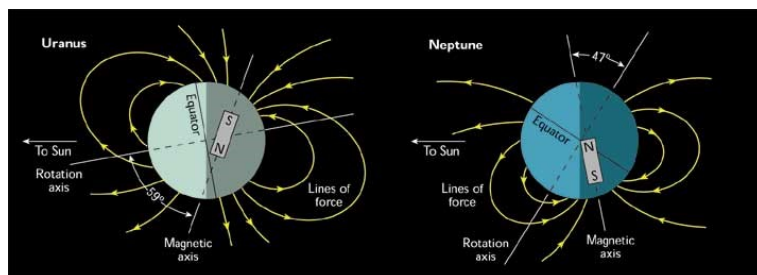


図 3: 天王星 (左) と海王星 (右) の磁場とその双極子近似 (NASA)。



## 天王星と海王星の D/H 比

大気の水素同位体比 (D/H 比) から水の存在が示唆される. 天王星と海王星の大気 D/H 比はそれぞれ  $(4.4 \pm 0.4) \times 10^{-5}$ ,  $(4.1 \pm 0.4) \times 10^{-5}$  である (HD 混合比: 天王星 148ppm, 海王星 192ppm). これらの値とその他の太陽系の天体の値をプロットしたものが図 4 である. 天王星と海王星の D/H 比はほぼ原始太陽系円盤と同じ値を取る木星と土星の  $(2.10 \pm 0.13) \times 10^{-5}$ ,  $(2.6 \pm 0.7) \times 10^{-5}$  より大きい, 彗星に見出されている  $\text{H}_2\text{O}$  の値よりは小さい. これは彗星的な始原天体から供給された  $\text{H}_2\text{O}$  が天王星と海王星の内部に大量に存在し, 円盤ガスから取り込んだ  $\text{H}_2$  との間で同位体が混合したとすると説明がつく.

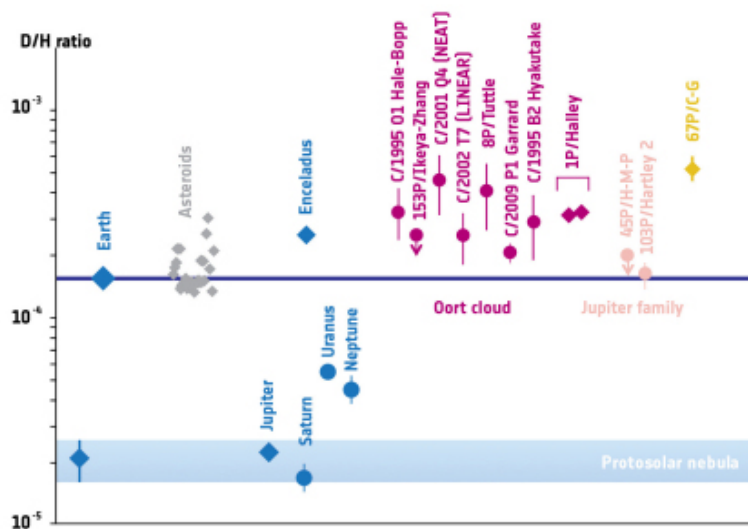


図 4: 太陽系の天体の D/H 比 (Altwegg et al. 2015). 木星, 土星, 天王星, 海王星については大気中の水素分子の値である. その他の天体は  $\text{H}_2\text{O}$  の値である.

## 物理的制約条件

内部構造の物理的制約条件には, 質量, 平均半径, これらから求められる平均密度, そして重力調和係数  $J_n$ , 浅部の大気密度分布, 自転速度が挙げられる. 明瞭な固体表面のない天王星と海王星の自転速度には, ボイジャーによって計測された磁場の回転速度が用いられる. ただし自転の一様性についてはあまりわかっておらず, 深さ緯度分布を持つ可能性があることには注意が必要である.

## 半径の測定法

赤道半径は探査機の電波掩蔽を利用して求められた。ボイジャー 2 号は天王星のほぼ赤道上で地球から見て惑星の裏側に入り、掩蔽の始まりと終わりの 2 つの半径がもたらされた。これにより表の通り天王星の赤道半径は  $25,559 \pm 4 \text{ km}$  であるとわかった。一方、海王星でのボイジャー 2 号の掩蔽位置は赤道から逸れており、より信頼できる南緯  $42.26$  度の掩蔽からの脱出時のデータをもとに、この緯度での半径は  $24,601 \pm 4 \text{ km}$  と求められている<sup>\*1</sup> (Tyler et al. 1989; Lindal 1992, 図 7)。

これを赤道半径に直すには遠心力による惑星形状の偏平化の効果を考慮する必要がある。Lindal (1992) は自転と東西風プロファイルを考慮し、海王星の 1 bar 等圧面の赤道半径は  $24,766 \pm 15 \text{ km}$  と決定した。一方で、Helled et al. (2011) は、東西風を無視した場合の赤道半径を求めており、これは  $24,764 \pm 15 \text{ km}$  である。この赤道半径は Tyler et al. (1989) が報告したものに似ており、2 km だけ Lindal (1992) が得たものよりも小さい。

## 重力調和係数

重力調和係数とは、惑星の作る重力ポテンシャルの式に現れる係数のことである。軸一様に自転する軸対称かつ赤道対象な密度分布を持つ惑星の重力ポテンシャルは

$$U = \frac{GM}{r} \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{2n} J_{2n} P_{2n}(\cos \theta) \right) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (1)$$

で与えられる。 $(r, \theta, \phi)$  は 3 次元極座標であり、 $a$  は 1 bar 気圧レベルの赤道半径、 $G$  は万有引力定数、 $M$  は惑星の総質量、 $\omega$  は自転角速度、 $P_n$  はルジャンドル多項式である。ポテンシャル  $U$  は偶数のルジャンドル多項式  $P_{2n}$  の展開式として表現される。奇数のルジャンドル多項式は赤道反対称性のため、この場合は含まれない。内部構造の制約条件である重力調和係数  $J_{2n}$  は探査機の惑星接近時のドップラートラッキングのデータから決定される。ルジャンドル多項式については付録 A を参照。

## 浅部の大気密度分布

天王星と海王星の浅部における鉛直密度分布もモデルの制約条件として必要である。Helled et al. (2011) は Lodders & Fegley(1998) のモデル大気を参照している。

---

<sup>\*1</sup> Lindal 1992 によるとこの時地球から南極が見えていたためデータがわかりにくいのは掩蔽開始の方である。よって Helled et al. (2011) の原文の誤りであると考えられる。

## 4 古典的内部構造モデル

古典的内部モデルでは天王星と海王星が「岩石」(ケイ酸塩, 鉄)の核, 「氷」( $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CH}_4$ ,  $\text{NH}_3$ ,  $\text{H}_2\text{S}$ )の殻, ガス状の外層(H, Heと少量の重めの元素)3層で構成されていることを仮定している. 各層で仮定した物質に対する状態方程式(equation of state, 略称 EOS)を用い, 断熱温度構造布を仮定して, 重力調和係数の観測値と最もよく合うように各層の厚さを推定する (Hubbard et al. 1991; Podolak et al. 1995).

この手法で求められた内部構造モデルは海王星の重力調和係数をよく説明するが, 天王星の  $J_2$  と  $J_4$  を同時にうまく説明することができていないという指摘がある. Podolak et al. (1995)によれば, 天王星で観測された重力調和係数に合わせるためには, 氷殻の密度を 10% 小さくすることが必要である. これは惑星内部の温度分布が断熱的ではなく, 惑星内部温度が高いことで説明することができる. 対流構造が発達している場合は, 温度構造は断熱分布に沿うと期待される一方で, 物質成層などによって対流が阻害されている場合は, 温度勾配が断熱分布を上回る可能性がある. 天王星は受け取った太陽放射とほぼ同じ惑星放射を放出しており, 内部熱流量はほぼゼロであることが観測から確認されている (Pearl & Conrath 1991). これは天王星の内部で実際に対流が阻害されているという見解と調和的である.

## 5 非先験的内部構造モデル

比較的新しい天王星と海王星の内部構造推定には, 組成や温度分布に仮定を置かず内部の密度構造をまず推定するもう一つのアプローチがある. この方法では測定された重力場と合う天王星と海王星の密度分布を求め, それを用いた組成解釈は EOS を使って行う (Marley et al. 1995). Helled et al. (2011) もその一つである.

### 5.1 重力観測を元にする密度モデル

本節では Helled et al. (2011) の手法を解説する. 密度は惑星中心からの距離(動径距離)の 6 次関数であると仮定する<sup>\*2</sup>. つまり惑星内部に不連続な密度のジャンプは仮定しない. 大気密度の観測値と重力調和係数の観測値を用いて, 最小二乗法で係数フィッティングを行う.

密度を表す多項式から 1 次の項は除かれる. これは中心で密度勾配がゼロのはずだからである. また, 重力成層の安定性から密度は動径距離とともに減少することが要求される. 当然, 表面までの密度の体積積分は全質量になる. 6 次多項式は 6 つの係数と定数を含むが, 以上から, 自由度を 5 つに落とすことができ, 以下

<sup>\*2</sup> 観測値によって課される独立な制約の数を考慮し, 6 次としている.

のようにあらわすことができる。

$$\begin{aligned} \eta = 3\beta^6 + k_0(1 - 3\beta^6) + k_2\beta^2 \left(1 - \frac{9}{5}\beta^4\right) + k_3\beta^3 \left(1 - \frac{3}{2}\beta^3\right) \\ + k_4\beta^4 \left(1 - \frac{9}{7}\beta^2\right) + k_5\beta^5 \left(1 - \frac{9}{8}\beta\right) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで  $\eta$  は惑星の平均密度で規格化した密度,  $\beta$  は惑星の赤道半径で規格化した動径距離である。この式の導出は付録 C に記した。

5つの係数に対して5つ以上の独立な制約条件があれば係数が求められる。天王星と海王星は4次までの重力調和係数が測定されており, 2つの調和係数  $J_2, J_4$  が制約条件として使用できる。残りの3つ以上の制約には, いくつかの深度での大気密度観測値を用いる。密度分布と重力調和係数は以下の式で関係づけられる(付録 C)

$$Ma^n J_n = - \int_{\tau} \rho(r) r^n P_n(\cos \theta) d\tau \quad (3)$$

ここで  $\rho$  は密度,  $d\tau$  は微小体積要素である。右辺は  $n \leq 2$  のとき, 球対称な密度分布に対してはゼロになる。自転による惑星の扁平化を考慮することで, ゼロでない値が現れる。惑星は一様自転しているものとし, その周期には磁場の測定から求められたものを当てはめる。また静水圧平衡の条件から, 遠心力を加味した等ポテンシャル面と等密度面が平行になっていることを仮定する。内部に差動回転がありうることは注意が必要である。

#### 大気境界条件

大気境界条件には, Lodders & Fegley (1998) のモデル大気を表 9.2 を補間して得られる4点の観測密度を用いる。なお, 観測値と呼んでいる値は, 掩蔽観測に基づく惑星大気モデルからピックアップした値であり, 誤差を含むことに注意する。

これへの最小二乗フィッティングは以下のように定式化する。まず, 4つの動径距離  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  における密度観測値をそれぞれ  $\eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*, \eta_4^*$  とする(添え字\*は観測値を意味する)。モデル密度  $\eta_i$  と観測値  $\eta_i^*$  との残差の二乗和が最も小さくなるための係数 ( $k_0, k_2, k_3, k_4, k_5$ ) への条件を求める。残差を  $d_i$  とすると, この場合

$$\begin{aligned} d_i &= \eta_i^* - \eta_i \\ &= \eta_i^* - \left\{ 3\beta_i^6 + k_0(1 - 3\beta_i^6) + k_2\beta_i^2 \left(1 - \frac{9}{5}\beta_i^4\right) + k_3\beta_i^3 \left(1 - \frac{3}{2}\beta_i^3\right) \right. \\ &\quad \left. + k_4\beta_i^4 \left(1 - \frac{9}{7}\beta_i^2\right) + k_5\beta_i^5 \left(1 - \frac{9}{8}\beta_i\right) \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

密度の測定の誤差を考慮し,  $\eta_i^*$  の誤差分散を  $\sigma_i^2$  とすると, この誤差分散で重みづ

けした式 (4) は

$$d'_i = \frac{1}{\sigma_i} \left( \eta_i^* - \left\{ 3\beta_i^6 + k_0(1 - 3\beta_i^6) + k_2\beta_i^2 \left( 1 - \frac{9}{5}\beta_i^4 \right) + k_3\beta_i^3 \left( 1 - \frac{3}{2}\beta_i^3 \right) \right. \right. \\ \left. \left. + k_4\beta_i^4 \left( 1 - \frac{9}{7}\beta_i^2 \right) + k_5\beta_i^5 \left( 1 - \frac{9}{8}\beta_i \right) \right\} \right) \quad (5)$$

となる. ここで誤差 100% とし,  $\sigma_i = \pm\eta_i^*$  としている. 式 (5) はさらに

$$d_i'^2 = \frac{1}{\eta_i^{*2}} \left( \eta_i^* - \left\{ 3\beta_i^6 + k_0(1 - 3\beta_i^6) + k_2\beta_i^2 \left( 1 - \frac{9}{5}\beta_i^4 \right) + k_3\beta_i^3 \left( 1 - \frac{3}{2}\beta_i^3 \right) \right. \right. \\ \left. \left. + k_4\beta_i^4 \left( 1 - \frac{9}{7}\beta_i^2 \right) + k_5\beta_i^5 \left( 1 - \frac{9}{8}\beta_i \right) \right\} \right)^2 \quad (6)$$

と表せる. これを式変形すると以下のようになる.

$$d_i'^2 = \frac{1}{\eta_i^{*2}} (\eta_i^* - \eta_i)^2 \\ d_i'^2 = \frac{1}{\eta_i^{*2}} (\eta_i^{*2} - 2\eta_i^*\eta_i + \eta_i^2) \quad (7)$$

この二乗残差  $d_i'^2$  の総和が最小になればよいので,  $\sum_{i=1}^4 d_i'^2$  に対して係数  $k_j$  ( $j = 0, 2, 3, 4, 5$ ) で偏微分し, 極値条件を与える. まず二乗残差の和を偏微分すると,

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^4 d_i'^2}{\partial k_j} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\eta_i^{*2}} \frac{\partial}{\partial k_j} (\eta_i^* - 2\eta_i^*\eta_i + \eta_i^2) \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial d_i'^2}{\partial k_j} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\eta_i^{*2}} \frac{\partial}{\partial k_j} (-2\eta_i^*\eta_i + \eta_i^2) \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial d_i'^2}{\partial k_j} = \sum_{i=1}^4 \frac{2}{\eta_i^{*2}} \frac{\partial \eta_i}{\partial k_j} (-\eta_i^* + \eta_i) \quad (8)$$

となる. さらに式 (2) を用いて右辺を計算していくと

$$= \sum_{i=1}^4 \frac{2}{\eta_i^{*2}} \frac{\partial \eta_i}{\partial k_j} \left( -\eta_i^* + 3\beta_i^6 + k_0(1 - 3\beta_i^6) + k_2\beta_i^2 \left( 1 - \frac{9}{5}\beta_i^4 \right) + k_3\beta_i^3 \left( 1 - \frac{3}{2}\beta_i^3 \right) \right. \\ \left. + k_4\beta_i^4 \left( 1 - \frac{9}{7}\beta_i^2 \right) + k_5\beta_i^5 \left( 1 - \frac{9}{8}\beta_i \right) \right) \\ = \sum_{i=1}^4 \frac{2}{\eta_i^{*2}} \frac{\partial \eta_i}{\partial k_j} \left( -\eta_i^* + 3\beta_i^6 + k_0 \frac{\partial \eta_i}{\partial k_0} + k_2 \frac{\partial \eta_i}{\partial k_2} + k_3 \frac{\partial \eta_i}{\partial k_3} + k_4 \frac{\partial \eta_i}{\partial k_4} + k_5 \frac{\partial \eta_i}{\partial k_5} \right) \\ = \sum_{i=1}^4 \frac{2}{\eta_i^{*2}} \frac{\partial \eta_i}{\partial k_j} \left( -\eta_i^* + 3\beta_i^6 + \sum_{p=0,2,3,4,5} \frac{\partial \eta_i}{\partial k_p} k_p \right) \quad (9)$$

となる. この方程式の添え字は  $j = 0, 2, 3, 4, 5$  のみであるため  $5 \times 1$  の列ベクトルとなる. これを行列式で表すと,

$$\mathbf{d} = 2\mathbf{A}^T\mathbf{W}(-\mathbf{E} + 3\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{x}) \quad (10)$$

ここで

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \sum_i \frac{\partial d_i'^2}{\partial k_0} \\ \sum_i \frac{\partial d_i'^2}{\partial k_2} \\ \sum_i \frac{\partial d_i'^2}{\partial k_3} \\ \sum_i \frac{\partial d_i'^2}{\partial k_4} \\ \sum_i \frac{\partial d_i'^2}{\partial k_5} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial k_0} & \frac{\partial \eta_1}{\partial k_2} & \frac{\partial \eta_1}{\partial k_3} & \frac{\partial \eta_1}{\partial k_4} & \frac{\partial \eta_1}{\partial k_5} \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial k_0} & \frac{\partial \eta_2}{\partial k_2} & \frac{\partial \eta_2}{\partial k_3} & \frac{\partial \eta_2}{\partial k_4} & \frac{\partial \eta_2}{\partial k_5} \\ \frac{\partial \eta_3}{\partial k_0} & \frac{\partial \eta_3}{\partial k_2} & \frac{\partial \eta_3}{\partial k_3} & \frac{\partial \eta_3}{\partial k_4} & \frac{\partial \eta_3}{\partial k_5} \\ \frac{\partial \eta_4}{\partial k_0} & \frac{\partial \eta_4}{\partial k_2} & \frac{\partial \eta_4}{\partial k_3} & \frac{\partial \eta_4}{\partial k_4} & \frac{\partial \eta_4}{\partial k_5} \\ \frac{\partial k_0}{\partial \eta_1} & \frac{\partial k_2}{\partial \eta_1} & \frac{\partial k_3}{\partial \eta_1} & \frac{\partial k_4}{\partial \eta_1} & \frac{\partial k_5}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial k_0}{\partial \eta_2} & \frac{\partial k_2}{\partial \eta_2} & \frac{\partial k_3}{\partial \eta_2} & \frac{\partial k_4}{\partial \eta_2} & \frac{\partial k_5}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial k_0}{\partial \eta_3} & \frac{\partial k_2}{\partial \eta_3} & \frac{\partial k_3}{\partial \eta_3} & \frac{\partial k_4}{\partial \eta_3} & \frac{\partial k_5}{\partial \eta_3} \\ \frac{\partial k_0}{\partial \eta_4} & \frac{\partial k_2}{\partial \eta_4} & \frac{\partial k_3}{\partial \eta_4} & \frac{\partial k_4}{\partial \eta_4} & \frac{\partial k_5}{\partial \eta_4} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\eta_1^{*2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\eta_2^{*2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\eta_3^{*2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\eta_4^{*2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \eta_1^* \\ \eta_2^* \\ \eta_3^* \\ \eta_4^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1^6 \\ \beta_2^6 \\ \beta_3^6 \\ \beta_4^6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} k_0 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{pmatrix} \quad (11)$$

式 (10) の左辺のベクトルの成分は極値条件より全て 0 になる. よって

$$\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{W}(\mathbf{E} - 3\mathbf{B}) \quad (12)$$

$\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{A}$  が正則ならば

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{W}(\mathbf{E} - 3\mathbf{B}) \quad (13)$$

このように大気境界条件に対するフィッティングができる.

## 重力調和係数条件

重力調和係数  $J_{2n}$  は式 (3) より密度の関数, つまり密度の多項式係数  $k_j$  の関数であることがわかる. 前節の式の密度  $\eta_i$ ,  $i = 1 \dots 4$  を  $J_{2n}$ ,  $n = 1 \dots 2$  に置き換えて同様に最小二乗法を行う. この時大気境界条件と重力調和係数条件を同時に満たす正規方程式は以下ようになる.

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{A}_J^T \mathbf{W}_J \mathbf{A}_J) \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{W} (\mathbf{E} - 3\mathbf{B}) + \mathbf{A}_J^T \mathbf{W}_J (\mathbf{E}_J - \mathbf{B}_J) \quad (14)$$

ここで  $(\mathbf{A}_J)_{st} = \frac{\partial J_{2s}}{\partial k_t}$ ,  $(\mathbf{W}_J)_{st} = \frac{1}{\sigma_{st}^J}$  ( $\sigma_{st}^J$  は  $J_{2s}^*$  と  $J_{2t}^*$  の共分散. なお, \*印は観測値を表す.),  $(\mathbf{E}_J)_{s1} = J_{2s}^*$ ,  $(\mathbf{B}_J)_{s1} = (J_{2s}$  を構成する項のうち, 多項式係数  $k_j$  を含まない項) である. これも同様に  $(\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{A}_J^T \mathbf{W}_J \mathbf{A}_J)$  が正則なら,

$$\mathbf{x} = \left( \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{A}_J^T \mathbf{W}_J \mathbf{A}_J \right)^{-1} \left( \mathbf{A}^T \mathbf{W} (\mathbf{E} - 3\mathbf{B}) + \mathbf{A}_J^T \mathbf{W}_J (\mathbf{E}_J - \mathbf{B}_J) \right) \quad (15)$$

となる. これを  $\eta_i$  の値を仮置きして, 大気と重力調和係数の両方に合うまで逐次計算する. しかし大気へのフィッティングと重力調和係数へのフィッティングはトレードオフの関係にあるため, 計測された重力調和係数との適合は完璧ではない (Helled et al. 2011).

得られた密度分布に対して静水圧平衡と質量連続の式を適用すると圧力分布が求められる.

$$\frac{1}{\eta} \frac{d\xi}{d\beta} = -\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{2}{3} m\beta \quad (16)$$

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = 3\eta\beta^2 \quad (17)$$

ここで,  $\xi = p(s)/p_0$ ,  $p_0 = GM\rho_0/R$ ,  $\alpha = M(\beta)/M$ ,  $m = \omega^2 R^3/GM$  であり, それぞれ規格化された圧力, 特性圧力, 規格化された質量, 微小パラメータである. 規格化前の式の形との関係を付録 E に記しておく.

以上の方法によって求められた内部構造を以下の図に示す.

## 5.2 組成の解釈

前節の密度分布と整合するような内部構造を実現する組成を求める. ここで温度構造には断熱構造を仮定する.

水成分の代表として  $\text{H}_2\text{O}$ , 岩石成分の代表として  $\text{SiO}_2$  を想定し, 単純化のため, これらどちらか一方が水素-ヘリウムガスに混合していると仮定する. 以下の additive-volume rule (Saumon et al. 1995) より, 総密度を計算する.

$$\frac{1}{\rho(P, T)} = \frac{X}{\rho_{\text{H}}} + \frac{Y}{\rho_{\text{He}}} + \frac{Z}{\rho_Z}, \quad (18)$$

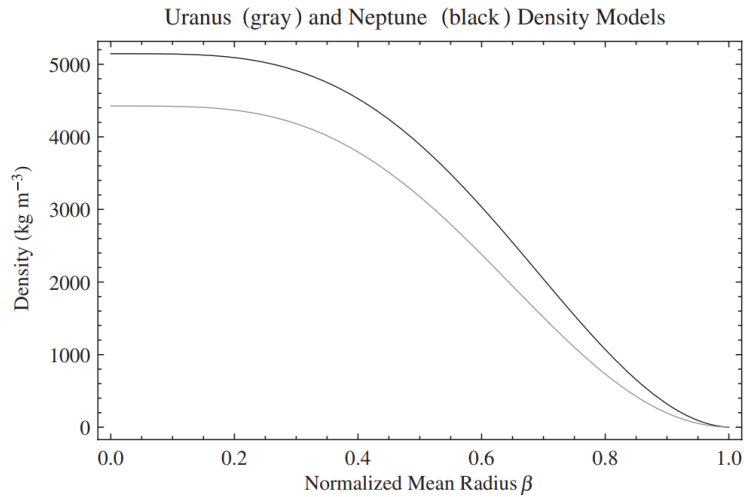


図 5: Helled et al. (2011) が作成した天王星, 海王星の密度分布. 横軸は規格化された半径, 縦軸は密度を表す. 灰色の線は天王星の密度を示し, 黒色の線は海王星の密度を示す.

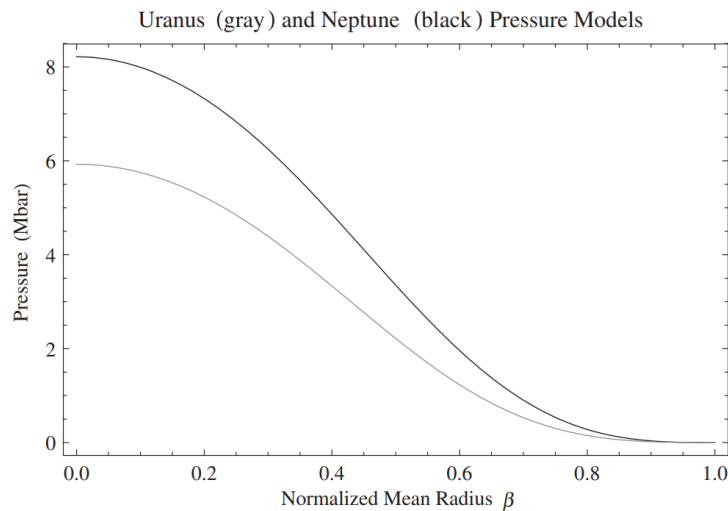


図 6: Helled et al. (2011) が作成した天王星, 海王星の圧力分布. 横軸は規格化された半径, 縦軸は圧力を表す. 灰色の線は天王星の圧力を示し, 黒色の線は海王星の圧力を示す.

ここで  $X$  は水素の質量分率,  $Y$  はヘリウムの質量分率,  $Z$  は高  $Z$  物質の質量分率,  $\rho_i$  はそれぞれの成分の密度である. 高  $Z$  物質は  $\text{SiO}_2$  または  $\text{H}_2\text{O}$  を指す. 水素とヘリウムの比率には太陽組成比  $X/Y=2.94$  を与える.  $Z$  を定めると  $X, Y$  が共に定まる.

各物質の密度  $\rho_i, i = \text{H}, \text{He}, \text{Z}$  を求めるための EOS について, 水素とヘリウムには自由エネルギー最小化に基づく SCVHEOS を用い (Saumon et al. 1995),  $\text{SiO}_2$  と  $\text{H}_2\text{O}$  には Young & Corey (1995); More et al. (1988) の高温, 高密度に対する EOS の表を使用している.



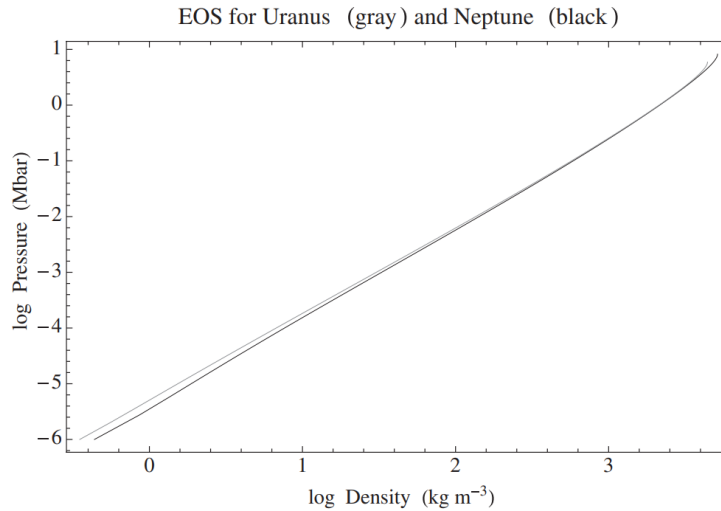


図 7: Helled et al. (2011) が求めた天王星, 海王星の経験的 EOS. 横軸は密度の対数, 縦軸は圧力の対数を表す. 灰色の線は天王星の内部構造を示し, 黒色の線は海王星の内部構造を示す.

断熱温度分布は, 比エントロピー一定の条件から得られる. 混合物の比エントロピーは次式で与えられる.

$$S(P, T) = XS_{\text{H}}(P, T) + YS_{\text{He}}(P, T) + ZS_{\text{Z}}(P, T) + S_{\text{mix}}(P, T) \quad (19)$$

ここで,  $S_{\text{H}}, S_{\text{He}}, S_{\text{Z}}$  はそれぞれ水素, ヘリウム, 高  $Z$  物質の比エントロピーである.  $S_{\text{mix}}$  は  $S_{\text{mix}} = k_B (N \ln N - \sum N_i \ln N_i)$ , で与えられる比混合エントロピーで  $N$  は単位質量当たりの全粒子数 (自由電子を含む),  $N_i$  は成分  $i$  の全粒子数,  $k_B$  はボルツマン定数である.

断熱過程では温度と密度は

$$T = C\rho^\gamma \quad (20)$$

の関係で近似でき,  $C$  と  $\gamma$  は組成に依存する (理想気体なら  $\gamma$  は比熱比).

以上から  $Z$  分布を与えると, 温度, 密度, 圧力が決まることになる. 温度分布は 1 bar 面の観測温度を起点に計算できる. こうして求められた密度分布が, 非先験的密度分布モデルに適合するよう  $Z(\beta)$  分布を探索的に求めることで組成モデルが得られる.

### 5.3 フィッティング結果

Helled et al. (2011) は 2 つのタイプの組成分布を仮定して組成解釈を行った. 1 つは  $Z$  が  $\log \rho$  に対して線形に増加する case I, もう 1 つは, 密度分布は連続だが, 一番外側の層と一番内側の核において  $Z$  がそれぞれ小さな値と大きな値で一定であり, 中間の層で  $\log \rho$  に対して線形増加する case II である.

## case I

表層付近での  $P - \rho$  関係は太陽組成の水素, ヘリウム混合物によく一致する. ここで  $Z$  を表面付近の 0 から中心に向かって増やす組成モデルが case I である. 天王星で高  $Z$  物質が  $\text{SiO}_2$  の場合  $\log \rho = -0.455$  の時に  $Z = 0$  から  $\log \rho = 3.646$  の時に  $Z=0.85$  まで  $\log \rho$  に対し線形に増加させた場合, 非先験的モデルに良く合致する. 温度推定は, 式 (20) に高圧下での漸近値である  $\gamma = 0.5$  をあてはめた.

高  $Z$  物質を  $\text{H}_2\text{O}$  とした場合についても行った. 図 8 は天王星について重力観測とフィットした非先験的モデル (黒い曲線) と上述した  $\text{SiO}_2$  (黒い破線) と  $\text{H}_2\text{O}$  (灰色の破線) の組成モデルを比較して示している (点は case II で説明する). 図 9 は海王星について求めた結果が示されている. 高  $Z$  物質を氷とした場合の曲線の方がやや非先験的モデルに近いが,  $\text{SiO}_2$  を高  $Z$  物質とした時との差はわずかである. 中間圧力における密度が高すぎるのは前述した推定温度の過小評価が原因となり得るが, 組成勾配の与え方で合わせることも可能である. いずれにせよ, 中心に向かって  $Z$  値が連続的に増加するモデルによって, 観測に適合するモデルが得られることがわかる.

1 bar にて, Helled et al. (2011) の天王星モデルの密度は  $3.5 \times 10^{-4} \text{ gcm}^{-3}$ , 温度は 75 K, 理想気体とした場合の平均分子質量は 2.2 である. この平均分子量は太陽での水素とヘリウム混合物に非常に近い値である.

非先験的モデルの天王星の中心圧力は 5.93 Mbar で, 中心密度は  $4.42 \text{ gcm}^{-3}$  である. ここで中心圧力での温度が  $10^4 \text{ K}$  より著しく高くない限り,  $\text{SiO}_2$  の密度は  $7 \text{ gcm}^{-3}$  に近いことを考慮すると, 天王星の中心は純粋な  $\text{SiO}_2$  よりも軽いことになる. 中心での密度, 圧力, 温度 ( $T = 10^4 \text{ K}$  とする) 条件に H, He,  $\text{SiO}_2$  をフィットさせると,  $Z=0.85$  という質量分率が得られる.

次に海王星モデルの性質を示す. 非先験的密度モデルでは 1 bar における海王星の密度は  $4.38 \times 10^{-4} \text{ gcm}^{-3}$  であり, 観測温度 75 K を当てはめると, 平均分子量は 2.7 と求まる. この平均分子量は太陽組成の水素とヘリウム混合物の値 2.3 よりもかなり高い. この温度での  $\text{SiO}_2$  の蒸気圧はかなり低く, 非現実的ではあるが  $\text{SiO}_2$  の蒸気が分子量の増加をもたらしていると仮定すると 1 気圧における質量分率は  $Z=0.0073$  となる.

このモデルの海王星の中心圧力は 8.22 Mbar である. 中心密度は  $5.15 \text{ gcm}^{-3}$  である. 天王星の時と同様に式 (20) で温度が与えられると仮定すると, 中心温度が  $8.1 \times 10^3 \text{ K}$  となる. これらの物理量は質量分率  $Z=0.82$  と合う. これは天王星にて決定された値と非常に似ている.

$\text{SiO}_2$  を内部での高  $Z$  物質として用いると, 高  $Z$  物質の質量は天王星と海王星についてそれぞれ 10.9, 12.9 地球質量 ( $M_\oplus$ ) となる.  $\text{H}_2\text{O}$  を内部での高  $Z$  物質を代表するために用いると, 高  $Z$  物質の質量は天王星と海王星についてそれぞれ  $\sim 12.8, \sim 15.2$  地球質量 ( $M_\oplus$ ) である. 惑星中心の  $Z$  の質量分率は両惑星において 90% 以上である. 水が用いた場合でも, 両惑星モデルの中心は高  $Z$  物質に加え

て若干ガスを含む結果となった。

## case II

最も外側の層が一定の低い  $Z$ , 中心核が一様な高い  $Z$  を持ち, 中間層 (遷移領域) が  $\log \rho$  に対して表面の値から中心核の値まで線形的に変化する  $Z$  を持つのが case II ある。遷移領域の始まりと終わりは非先験的モデルに合うように決める。図 8, 9 では, 黒 (岩石), 灰色 (氷) の点でその結果が表されている。天王星の遷移領域は約 1500 K で始まり, この温度領域ではちょうどケイ酸塩が蒸発し始める。海王星の遷移領域はやや低い約 1400 K で始まる。天王星の全体的な組成は基本的に case I でも case II でも同じである。天王星と同様に海王星の case II モデルは case I と似たような結果を与える。

case II の場合, 天王星と海王星の  $\text{SiO}_2$  の含有量はそれぞれ 11.3, 13.1 地球質量 ( $M_\oplus$ ) で,  $\text{H}_2\text{O}$  の含有量はそれぞれ 13.2, 15.4 地球質量 ( $M_\oplus$ ) である。

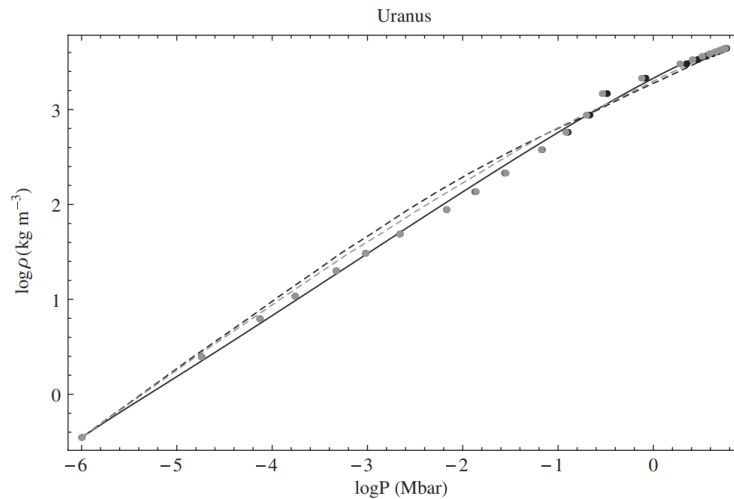


図 8: Helled et al. (2011) が求めた天王星モデルでの圧力-密度関係。黒い曲線は重力データにフィッティングさせて作った多項式である。黒と灰色の破線は高  $Z$  物質としてそれぞれ  $\text{SiO}_2$  と  $\text{H}_2\text{O}$  を取った組成モデル case I のものを表す。黒と灰色の点は高  $Z$  物質としてそれぞれ  $\text{SiO}_2$  と  $\text{H}_2\text{O}$  を取った組成モデル case II のものを表す。

## 平均組成

これらのモデルフィットから各成分 (質量比) の平均相対存在量得ることができる。結果は以下の表 3 の通りである。天王星, 海王星の組成は互いに似通っており,  $\text{SiO}_2$  よりも軽い  $\text{H}_2\text{O}$  を高  $Z$  物質とすると, 高  $Z$  物質の質量分率が増加することがわかる。

表の組成はあくまで単純な多項式フィッティングの解釈から得られるものであり, このモデルでは高  $Z$  物質として  $\text{SiO}_2$  ないし  $\text{H}_2\text{O}$  どちらか一方を仮定した。

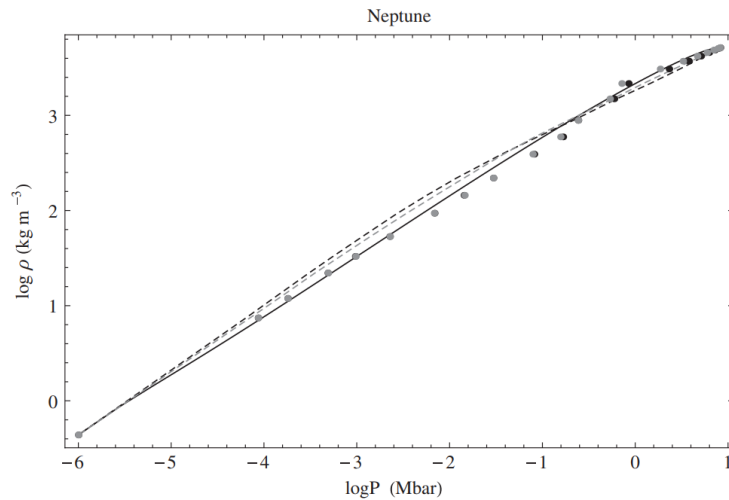


図 9: Helled et al. (2011) が求めた海王星モデルでの圧力-密度関係. 黒い曲線は重力データにフィッティングさせて作った多項式である. 黒と灰色の破線は高 Z 物質としてそれぞれ  $\text{SiO}_2$  と  $\text{H}_2\text{O}$  を取った組成モデル case I のものを表す. 黒と灰色の点は高 Z 物質としてそれぞれ  $\text{SiO}_2$  と  $\text{H}_2\text{O}$  を取った組成モデル case II のものを表す.

しかし最初に述べた通り現実ではこれらの惑星は氷と岩石の両方の混合物から構成されていると推測されており, より詳細で現実に即した理論モデルが必要である.

表 3: Helled et al. (2011) が作成した各モデル case における質量比で表した天王星, 海王星のバルク組成.

|                  | $\text{SiO}_2$                     | $\text{H}_2\text{O}$                |
|------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| Case I: Uranus   | $X = 0.181; Y = 0.0616; Z = 0.757$ | $X = 0.0848; Y = 0.0288; Z = 0.886$ |
| Case I: Neptune  | $X = 0.181; Y = 0.0615; Z = 0.758$ | $X = 0.0795; Y = 0.027; Z = 0.893$  |
| Case II: Uranus  | $X = 0.164; Y = 0.0556; Z = 0.781$ | $X = 0.0641; Y = 0.0218; Z = 0.914$ |
| Case II: Neptune | $X = 0.175; Y = 0.0694; Z = 0.766$ | $X = 0.0719; Y = 0.0244; Z = 0.904$ |

## 6 考察

### 形成論

天王星と海王星の形成論としては固体コアが成長し, その重力で円盤ガスを取り込んで巨大氷惑星になったとする (不完全) コア集積モデルがもっとも広く受け入れられている. これは高 Z 物質として,  $\text{H}_2\text{O}$  ないし  $\text{SiO}_2$  を想定し, 両惑星の表層密度分布と重力場が説明できることを示した Helled et al. (2011) の結果と基本的に整合する. もちろん固体核の現実的な組成は, 多種の氷成分と岩石成分の混合物であろう.

一方 Helled et al. (2011) の提示したモデルは内部の密度分布が連続である.

例えば case II のように高密度の中心核があり、それを遷移層が覆うような構造は、ペブル集積モデルと整合的かもしれない。なぜなら、固体核がある程度成長し、外層のガスを厚く纏いはじめると、その中で集積するペブルは蒸発し、水素ヘリウムガスとまじりあって、固体核を覆うようになると考えられるからである。微惑星形成集積モデルでも、ガスを纏った原始惑星が複数でき、それらが最終段階で巨大衝突を起こしたとすれば、物質同士の攪拌が起き、密度分布が連続的になる可能性もある。しかしながら現在の観測的制約では、物質分布が連続か不連続か決着がつかないことには注意が必要である。

## 熱構造

Helled et al. (2011) も、古典的な三層モデル同様に断熱温度構造の仮定を置いた。しかしこれが、高 Z 物質の割合が深さとともに連続的に増加するという仮定と整合するかについては疑問が残る。なぜなら化学的な成層が熱対流を抑制してしまうため、内部は断熱温度分布よりも高温になる可能性があるからである。より高温を仮定すると、惑星中心に水素ヘリウムが混在する必要はなくなるかもしれない。

特に天王星は内部からの熱流がほぼなく、これは熱対流が抑制されているためと考えることができる。一方で海王星では内部からの熱流が観測されており、内部で熱対流が起きていることを示唆する。ただしどのぐらいの深さに熱対流が及んでいるのかはよくわからない。

天王星と海王星の形成時に、異なる条件で巨大衝突が起こることで現在見られる天王星と海王星の違いが説明できるかもしれない。天王星と海王星が岩石殻、氷殻、水素ヘリウムの外層からなる構造を持っていたと仮定し、そこに分化した別の原始惑星を巨大衝突させたシミュレーション結果を表した図が図 10(Reinhardt et al. 2020) と図 11(Reinhardt et al. 2020) である。図 10 について、天王星には衝突体は斜めに衝突し、自転軸を傾け(上図右側の矢印)、放出破片からは新たな赤道面に沿って衛星系が生じる。中心から逸れた衝突の結果、外層以外ではほとんど物質の混合は起こっていない。一方、海王星は衝突体と正面衝突を起こし、自転軸の向きは天王星に比べると大きく変化していない。この時原始衛星円盤が形成されず、海王星には逆行衛星が多く見られることに整合する。

熱に関しては図 11 を見るとわかる。正面衝突(図左側)が起こると内部が著しく昇温する。表面付近はオレンジ色となる。一方斜め衝突(図右側)が起こると浅い領域が強く加熱される。正面衝突を起こした海王星は衝突体が内部のコアまで貫入し、海王星の内部で激しい混合が起こっている。この時大量のエネルギーが海王星内部にもたらされる。これが海王星が現在も太陽放射の吸収のほぼ 2.6 倍のエネルギーを放射している原因と考えられる。一方、天王星はこのような加熱はあまり起こらず現在太陽放射と熱平衡になっていることが説明できる。

衝突の起き方とその結果生じる層構造の関係は以下のように考えられる。斜めに衝突が起きた天王星では、内部にエネルギーや衝突体の構成物は比較的流入し

なかった。その結果天王星は現在も Helled et al. (2011) の case II のように層構造を保っている可能性がある。一方海王星は正面からの衝突が起きたため衝突エネルギーや衝突体構成物がコア付近まで貫入した。その結果コアは高温と衝撃によってバラバラになり混合が起こった可能性がある。この場合、中心ほど重元素割合は高くなるが明確な境界を持つコアは無く、case I のような物質分布になるかもしれない。

ただし深さと共に重元素の混合比が増加するという事は化学的な安定成層が形成されることを意味する。つまり内部加熱があっても対流を起こしにくい構造となるため、これは海王星の高い熱流量の説明には不利である。また、従来の3層構造ではほぼ純粋な  $\text{H}_2\text{O}$  の層が対流して磁場を生み出していると考えていたが、無境界モデルでは H と He と  $\text{H}_2\text{O}$  が共存することになる。このような条件で十分な電気伝導度を保ち磁場を生み出すことができるか検討が必要である。

#### さらなる制約に向けて

現時点の観測制約から推定される、両惑星の内部構造モデルには大きな幅がある。今後、周回観測を行ない、外層の構造や重力場を精密に求めることができれば、内部構造モデルが絞り込まれ、天王星と海王星の起源の解明にさらに近づくことができる可能性がある。

例えば周回観測によって重力調和係数がより高次まで得られると、それ自体は惑星表面付近の密度構造を強く反映するが、表面密度の精度が上がることで内部の密度の制約も良くなるため、全体として内部密度の制約が良くなることが期待される。また、衛星の潮汐進化が木星内部構造を反映していることを利用した内部構造推定法も存在する。天王星と海王星は共に衛星を持っているため、こうした内部構造推定も可能かもしれない。また太陽系外縁天体は天王星、海王星の形成材料の生き残りと考えられ、これらの観測や理解が進むことで組成の解釈をより良くすることができる可能性がある。

## 7 まとめ

本研究では Helled et al. (2011) のレビューを行い、内部構造から天王星と海王星の起源について考察した。内部構造とは組成、密度、圧力、温度の深さ分布である。

天王星と海王星の形成論の中ではコア集積モデルが最も広く受け入れられている。コア集積モデルでは、固体のコアがまず形成され、そのコアが重力で外層を獲得することで惑星が形成されたと考える。コア集積モデルはコアの成長プロセスによってさらにペブル集積モデル、微惑星集積モデルに分類される。ペブル集積モデルでは小石(ペブル)が集まってコアが形成され、微惑星集積モデルでは微惑星という  $10^0 \sim 10^2 \text{ km}$  程度のサイズの天体が集まってコアが形成される。

天王星と海王星は観測から H と He からなる外層を持つことがわかっている。

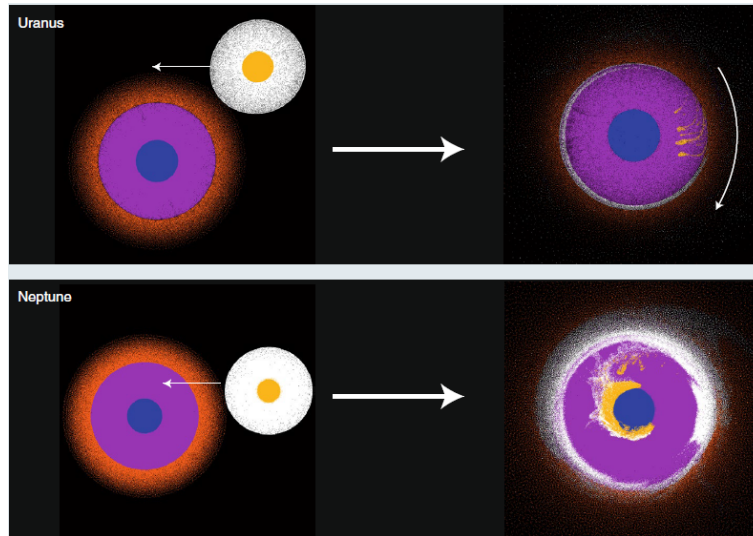


図 10: 天王星 (上), 海王星 (下) の衝突シミュレーション結果の図 (Reinhardt et al. 2020). 図の左側について, 紫色のより大きい円がそれぞれ天王星と海王星の断面図を表し, 白色のより小さい円が衝突体の断面図である. 天王星と海王星の断面図について青色は岩石コア, 紫は氷のマントル, オレンジは H と He の外層を表している. 衝突体は白色の氷地殻と黄色の氷のコアに分化している. 図の右側は衝突後の両天体を表している.

惑星の平均密度-質量関係から考えると両天体の内部には H と He でなく重元素が含まれるはずである. 太陽系元素存在度からこの重元素は  $\text{H}_2\text{O}$  や岩石である可能性がある. 浅部に源がある磁場, 大気中の D/H 比から特に  $\text{H}_2\text{O}$  の存在が示唆される. 惑星形成論から天王星と海王星の組成分布は深さと共に重元素が増加すると考えられている. 古典的な H, He の外層,  $\text{H}_2\text{O}$  のマントル, 岩石のコアの 3 層からなるモデルがかつてメジャーであったが, そのモデルを疑問視する研究も存在する. そこで Helled et al. (2011) は密度分布を 6 次多項式と仮定し, 組成を仮定せず平均密度, 質量, 浅部の大気密度分布等を制約条件として導出した. H と He そして高 Z 物質 ( $\text{SiO}_2$  または  $\text{H}_2\text{O}$ ) を構成物として仮定し, それぞれの EOS を用いて密度計算を行うことで重力観測に合う組成分布モデルを導出した. ただし, このモデルでは単純化のため, 高 Z 物質には  $\text{SiO}_2$  と  $\text{H}_2\text{O}$  のどちらか一方を仮定する.

Helled は 2 つの組成分布モデルの case についてフィッティングを行った. case I は無境界構造を仮定し, case II はそれぞれ一様な組成の外層と核, および深さと共に重元素混合比が増加する遷移層の 3 層からなる構造を仮定している. どちらの case も重力観測から得られた非先験的密度分布モデルと基本的によく合う.

わずかに合わない部分は, 例えば中間の圧力領域 ( $\log P = -4 \sim -1(\text{Mbar})$ ) で温度勾配を断熱温度勾配よりも急にし, 中心付近での高 Z 物質質量分率の増加率をより高くすることで解消される.

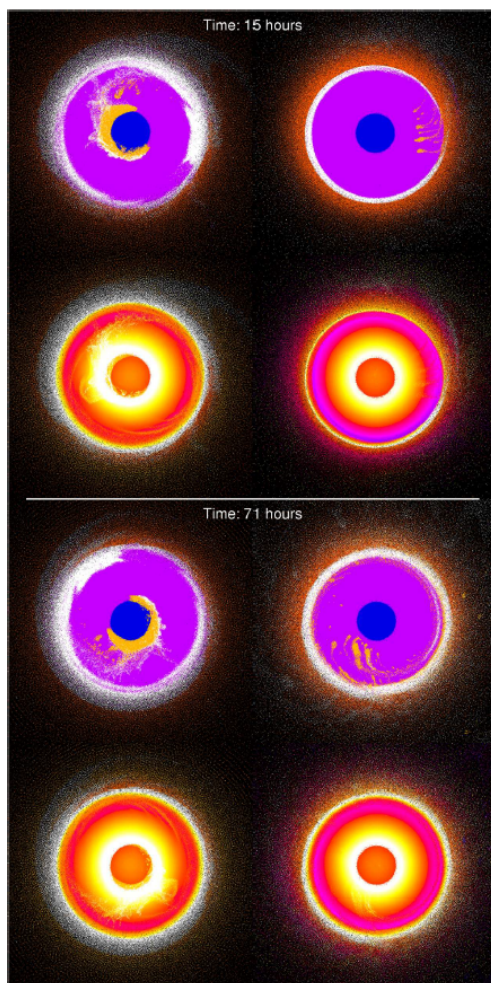


図 11: 正面衝突 (左) と斜め衝突 (右) 後の惑星の断面図 (Reinhardt et al. 2020). 惑星は海王星, 衝突体は分化した 2 地球質量の天体を想定. 図の上半分は衝突から 15 時間後, 下半分は衝突から 71 時間後の様子. 上から 1 段目と 3 段目の図の色の意味は図 10 と同じ. 上から 2 段目と 4 段目の図は粒子の内部エネルギーを示し, 黒色の  $0 \text{ erg g}^{-1}$  から白色の  $10^{12} \text{ erg g}^{-1}$  までエネルギーを表す.

天王星と海王星の材料物質は物質境界の無いモデルからも円盤ガス, 氷, 岩石が妥当であると考えられる. 天王星と海王星の形成後に巨大衝突が起こることによって層構造が崩壊して重元素混合比が連続的に変化する構造になり, Helled et al. (2011) の内部構造が実現した可能性がある.

## 謝辞

本研究にあたり, 直接ご指導してくださった倉本圭教授, 鎌田俊一准教授に深謝致します. お二方は毎週のゼミで私の初歩的なものも含めたあらゆる質問に丁寧に答えてくださりました. また, 石渡正樹教授, 宇宙惑星グループの皆様からはゼミの発表, 中間発表, 最終発表の資料に関してたくさんの有益な助言をいただきま



した。皆様のおかげで卒業研究を成し遂げることができました。ありがとうございました。

## 付録 A ルジャンドル多項式について

ルジャンドル多項式とはラプラス方程式 (ポアソン方程式において密度が 0) の解の 1 つである. 極座標形式のラプラス方程式は以下のように表される (以下の計算, 導出は蓬田 2007<sup>\*3</sup> を参照).

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

ここで,  $\psi$  はポテンシャルで極座標は  $(r, \theta, \phi)$  の文字で表す. 変数分離でこの解を求める. 解を

$$\psi(r, \theta, \phi) \equiv R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\phi) \quad (\text{A.2})$$

と仮定し, これをラプラス方程式に代入すると

$$\frac{\nabla^2 \psi}{\psi} = \frac{1}{R} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0. \quad (\text{A.3})$$

移項により  $\phi$  のみの関数と  $r, \theta$  のみの関数に分ける. これらは定数  $a$  の時のみ等しくなるので

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \equiv a \quad (\text{A.4})$$

まず  $\phi$  のみの項について考える. この項からは常微分方程式

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + a\Phi = 0 \quad (\text{A.5})$$

が得られる. この解は

$$\Phi = Ae^{i\sqrt{a}\phi} + Be^{-i\sqrt{a}\phi} \quad \text{or} \quad C \cos \sqrt{a}\phi + D \sin \sqrt{a}\phi \quad (\text{A.6})$$

となる.  $\phi$  座標は経度を表すため一回転すると元に戻る性質がある. つまり, 任意の  $\phi$  について

$$\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi) \quad (\text{A.7})$$

となる. 例として  $\cos$  の解に対して見ると

$$\cos \sqrt{a}\phi = \cos \sqrt{a}(\phi + 2\pi) \quad (\text{A.8})$$

となる.  $2\pi\sqrt{a}$  は  $2\pi \times (\text{整数})$  なので  $\Phi$  に対する解は以下ようになる.

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} \left( A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi} \right) \quad \text{or} \quad \sum_{m=0}^{\infty} (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi) \quad (\text{A.9})$$

<sup>\*3</sup> 蓬田 清 (2007) 演習形式で学ぶ特殊関数・積分変換入門 (共立出版) 47-70

次に  $r, \theta$  についての方程式を考える. 先ほどの議論で得られた  $a = m^2$  を式 (A.4) に代入すると

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0 \quad (\text{A.10})$$

となる. ここで先ほど同様の議論を行う. この式を  $r$  のみの部分と  $\theta$  のみの部分に分けると互いに等しいのはこれらが定数  $b$  となる時である. よってここから 2 つの 2 階常微分方程式が得られる.

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - bR = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( b - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0 \quad (\text{A.12})$$

ここで  $\theta$  についての方程式 (A.12) について見ていく. ここではルジャンドル多項式の導入が目的であるため詳細は省くが, この式の解が有限となるためには特別な条件が必要となる. その条件とは定数  $b$  が  $b \equiv n(n+1)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots; m = 0, 1, \dots, n$ ) である. すると式 (A.12) は以下ようになる.

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0 \quad (\text{A.13})$$

ここで  $\cos \theta = x$  と変数変換すると次のようなルジャンドルの微分方程式が得られる.

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right\} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right\} \Theta = 0 \quad (\text{A.14})$$

$m = 0$  とした時の解がルジャンドル多項式  $P_n(x)$  である.

ルジャンドル多項式は具体的には

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{A.15})$$

で表される関数である<sup>4, 5</sup>. ここで  $x = \cos \theta$ ,  $\theta$  は球座標における余緯度 ( $\theta = 0$  が北極) である. これは球表面の物理量分布を示す関数であり, 表式の通り余緯度は引数になっているが経度  $\phi$  は含まれないため軸対称な球上での分布を示したい際に用いられる. 今回は軸対称の惑星の質量分布を表すために用いられた. なお, 軸対称ではないより複雑な物質分布を表すためには球面調和関数やルジャンドル陪関数といった関数を用いる (付録 B にて登場).  $n$  ごとの具体的な形や式は以下の図 A.1, 表 A.1 のようになっている.

図 A.1 について,  $x = \cos \theta$  であるためグラフの右側から  $\theta = 0$  (北極),  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (赤道),  $\theta = \pi$  (南極) という形になっている. 図 A.1, 表 A.1 から読み取れるように  $n$  が奇数の時  $P_n(x)$  は  $x = -1$  になり,  $x = 1$  で 1 になる. 一方  $n$  が偶

<sup>4</sup> MIT [http://web.mit.edu/12.004/TheL/PastHandouts/Chap09\\_Interiors.pdf](http://web.mit.edu/12.004/TheL/PastHandouts/Chap09_Interiors.pdf)

<sup>5</sup> MIT Chapter9 Interiors [http://web.mit.edu/12.004/TheLastHandout/PastHandouts/Chap09\\_Interiors.pdf](http://web.mit.edu/12.004/TheLastHandout/PastHandouts/Chap09_Interiors.pdf), 4-7

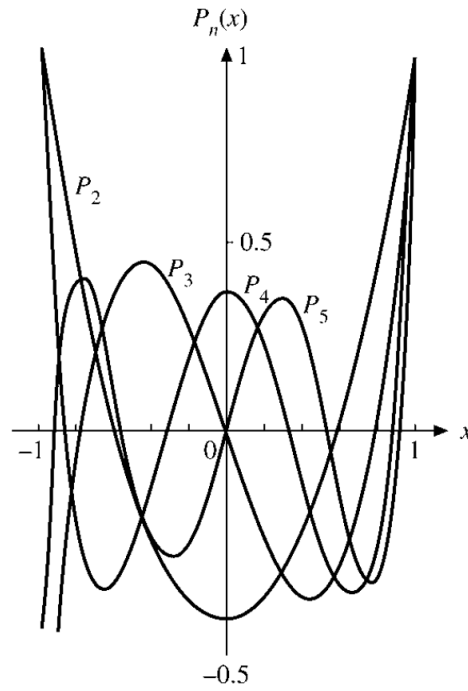


図 A.1:  $n = 2 \sim 5$  のルジャンドル多項式を描画したもの (Arfken & Weber 2005). 横軸は  $x = \cos \theta$ , 縦軸は  $P_n(x)$  を表す.

表 A.1: ルジャンドル多項式の  $n = 0 \sim 8$  までの表式.

---

|   |
|---|
| $P_0(x) = 1$  |
| $P_1(x) = x$  |
| $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$                                      |
| $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$                                     |
| $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$                             |
| $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$                           |
| $P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$                 |
| $P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$               |
| $P_8(x) = \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$ |

---

数の場合  $P_n(x)$  は  $x = -1$  と  $x = 1$  で 1 になる. このため, 赤道対称性を仮定すると  $n$  が奇数の  $P_n(x)$  は 0 になる. 今回は惑星の重力ポテンシャルを表すために用いるためこれは北極に相対的に質量が集中し, 南極では相対的に質量が少ないという状態を表す. 天王星と海王星にこの仮定は不適であるため以下の式のように偶数の  $n$  のみを用いて重力ポテンシャルの表記をしている.

$$U = \frac{GM}{r} \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{2n} J_{2n} P_{2n}(\cos \theta) \right) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (\text{A.16})$$

この式でルジャンドル多項式  $P_n(x)$  が足し合わされている理由はフーリエ展開をイメージするとわかりやすい. 惑星内部に固体の面があるとすればその起伏が密度分布, 重力に影響する. この起伏は簡単な正弦波や余弦波の形とは限らないが複数の簡単な起伏  $P_n(x)$ (余弦の関数) を組み合わせることで級数近似を行うこ

とができる。つまり平面での複雑な波を簡単な波 ( $\sin, \cos$ ) の組み合わせで表すフーリエ展開のように、球面での複雑な起伏を簡単な起伏 ( $P_n$ ) の組み合わせで表せるのである。また、重力ポテンシャルの式から次数  $n$  が大きくなるほど  $(\frac{a}{r})^2$  が小さくなるため  $P_n(x)$  がついている項の寄与が小さくなることがわかる。これは惑星が観測点から遠いと質点近似や球として近似がなされるように粗い形 ( $n$  が小さい) による重力寄与は距離  $r$  について比較的減衰しにくく、細かい形 ( $n$  が大きい) による重力寄与は距離  $r$  について比較的減衰しやすいからである。以上がルジャンドル多項式の補足説明である。

## 付録 B 密度と重力調和係数の関係式の導出

惑星密度と重力調和係数の関係式

$$Ma^n J_n = - \int_{\tau} \rho(r) r^n P_n(\cos \theta) d\tau \quad (\text{B.1})$$

をここでは導出する。手順については MIT の講義資料を参照した (<http://web.mit.edu/12.004/TheLastHandout/PastHandouts/Chap09.Interiors.pdf>)。

証明

証明に用いる式は以下の 3 つの式である。

$$\Phi(r, \theta, \lambda) \approx -\frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{l=2}^n \left(\frac{R}{r}\right)^l \sum_{m=0}^l P_l^m(\mu) [C_{lm} \cos(m\lambda) + S_{lm} \sin(m\lambda)] \right\} \quad (\text{B.2})$$

$$\Phi(r, \theta, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [\alpha_{lm} r^l + \beta_{lm} r^{-(l+1)}] Y_{lm}(\theta, \lambda) \quad (\text{B.3})$$

$$\beta_{lm} = -\frac{4\pi G}{(2l+1)} \int_{r'=0}^{\infty} \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \rho(r', \theta', \lambda') Y_{lm}^*(\theta', \lambda') r'^{l+2} \sin \theta' dr' d\theta' d\lambda' \quad (\text{B.4})$$

式 (B.2) は非球対称成分を考慮した重力ポテンシャルの式であり、原点を質量  $M$ 、半径  $R$  の惑星の重心に取っている。 $(r, \theta, \lambda)$  は 3 次元極座標でありそれぞれ動径、余緯度、経度である。余緯度は  $\theta = 0$  が北極に対応する。 $n$  は 2 以上の自然数である。 $C_{lm}, S_{lm}$  は定数であり、後述の  $l, m$  に依存する。 $P_l^m(\mu)$  はルジャンドル陪関数であり

$$P_l^m(\mu) = \left( \frac{(-1)^m (1 - \mu^2)^{m/2}}{2^l l!} \right) \left( \frac{d}{d\mu} \right)^{l+m} (\mu^2 - 1)^l \quad (\text{B.5})$$

と表せる。ここで、整数  $l$  は次数、整数  $m$  は位数、 $\mu = \cos \theta$  である。 $l$  は半球の節の線の数を表し、構造の細かさの基準である。 $m$  は緯度と経度の線の密度を表す。なお、 $m \leq l$  であることに注意。 $m = 0$  の時の  $P_l^m(\mu)$  は緯度のみに依存し、帯状調和関数と呼ばれる。 $m = l$  の時の  $P_l^m(\mu)$  は緯度のみの関数となり、sectoral 調和関数と呼ばれる。 $0 < m < l$  の  $P_l^m(\mu)$  は緯度と経度両方に依存し、tesseral 調和関数と呼ばれる。

式 (B.3) は一般ポテンシャルの式である。これは惑星外部でのポテンシャルに関するラプラス方程式

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (\text{B.6})$$

の解である。係数  $\alpha_{lm}, \beta_{lm}$  は惑星の密度分布を記述する係数である。関数  $Y_{lm}(\theta, \lambda)$  は球面調和関数と呼ばれ、球の表面の完全な正規直交関数の組を代表する。ルジャンドル多項式は軸対称な球面しか扱えなかったのに対し、球面調和関数は次数  $l$  と位数  $m$  で経度方向も考慮した物理量分布を示すことができるのである。具体的には以下のように表される。

$$Y_{lm}(\theta, \lambda) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (\text{B.7})$$

式 (B.3) に登場する係数  $\beta_{lm}$  の表式が式 (B.4) である。  $Y_{lm}^*(\theta, \lambda)$  は球面調和関数の複素共役である。式 (B.4) がこのような表式となる理由はこの付録の最後に示す。この証明は煩雑なのでまずは  $\beta_{lm}$  はこのように表せるとわかっている状態で計算を行う。

これらの式で計算を進める前に式を単純化する。まず惑星が軸対称、つまり経度方向に一様であると考え、すると  $m=0$  のみを考えればよい。さらに  $r \rightarrow \infty$  の時  $\Phi \rightarrow 0$  であるから、式 (B.3) の係数  $\alpha$  は  $\alpha_{lm} = 0$  でなくてはならない。これらを反映すると式 (B.2), (B.3), (B.4) は以下のようになる。

$$\Phi(r, \theta, \lambda) \approx -\frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{l=2}^n \left(\frac{R}{r}\right)^l P_l(\mu) C_{l0} \right\} \quad (\text{B.8})$$

$$\Phi(r, \theta, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_{l0} r^{-(l+1)} Y_{l0}(\mu) \quad (\text{B.9})$$

$$\beta_{l0} = -\frac{4\pi G}{(2l+1)} \int_{r'=0}^{\infty} \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \rho(r', \theta') Y_{l0}^*(\theta') r'^{l+2} \sin \theta' dr' d\theta' d\lambda' \quad (\text{B.10})$$

また球面調和関数はこの時

$$Y_{l0}(\mu) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\mu) \quad (\text{B.11})$$

となる。なお  $m=0$  の時  $P_l^0(\mu) = P_l(\mu)$  となり、これは本文でレビューした Helled et al. (2011) で用いられているルジャンドル多項式である (付録 A で紹介)。

ここから一般ポテンシャル (B.9) と重力ポテンシャル (B.8) が等しいという等式を立てて式 (B.1) を導く。(B.9)=(B.8) より、

$$\begin{aligned} -\frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{l=2}^n \left(\frac{R}{r}\right)^l P_l(\mu) C_{l0} \right\} &= \sum_{l=0}^{\infty} \beta_{l0} r^{-(l+1)} Y_{l0}(\theta) \\ -\frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{l=2}^n \left(\frac{R}{r}\right)^l P_l(\mu) J_l \right\} &= \sum_{l=0}^{\infty} \beta_{l0} r^{-(l+1)} Y_{l0}(\theta) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

なお、1行目から2行目への変形には定義  $J_l \equiv C_{l0}$  を用いた。ここからルジャンドル関数  $P_l(\cos \theta)$  の直交性を用いて計算を進める。ルジャンドル関数の直交性

とは整数  $l, k$  について以下の式 (B.13) の関係を指す<sup>6</sup>.

$$\int_{\mu=-1}^1 P_l(\mu)P_k(\mu)d\mu = \frac{2}{2k+1}\delta_{lk} \quad (\text{B.13})$$

$$-\int_{\theta=0}^{\pi} P_l(\cos\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2}{2k+1}\delta_{lk}. \quad (\text{B.14})$$

この2式はそれぞれ積分変数を  $\mu, \theta$  とした場合のルジャンドル多項式の直交性である. なお  $\delta_{lk}$  はクロネッカーのデルタであり,

$$\delta_{lk} = \begin{cases} 1 & (l = k) \\ 0 & (l \neq k) \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

である.

ルジャンドル多項式の直交性を利用するために, 式 (B.12) の両辺に  $P_k(\cos\theta)$  ( $k = 2, 3, \dots$ )<sup>7</sup> をかけてさらに体積積分 ( $R \leq r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \lambda \leq 2\pi$ ) をする. 両辺の計算過程を書くと紙面に収まらないので左辺と右辺に分けて計算を行う. なお式 (B.14) にならい, 以降  $P_l$  の引数は  $\mu$  でなく  $\cos\theta$  を用いる.

左辺について

式 (B.12) の左辺

$$-\frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{l=2}^n \left(\frac{R}{r}\right)^l P_l(\cos\theta)J_l \right\}$$

に  $P_k(\cos\theta)$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) をかけて体積積分 ( $R \leq r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \lambda \leq 2\pi$ ) をすると,

$$\begin{aligned} & -\int_{r=R}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} r^2 \sin\theta \frac{GM}{r} \{P_k(\cos\theta) \\ & - \sum_{l=2}^n \left(\frac{R}{r}\right)^l P_l(\cos\theta)P_k(\cos\theta)J_l\} d\lambda d\theta dr \\ = & -\int_{r=R}^{\infty} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} GMr \{P_0(\cos\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta \\ & - \sum_{l=2}^n \left(\frac{R}{r}\right)^l P_l(\cos\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta J_l\} d\lambda d\theta dr \quad (\text{B.16}) \end{aligned}$$

<sup>6</sup> Arfken & Weber(2005), MATHEMATICAL Methods for Physicist SIXTH EDITION (Academic Press), 742, 750, 756-757

<sup>7</sup> ルジャンドル多項式の  $l = 0$  は惑星の平均密度を表しているため

$$-\frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{l=2}^n \left(\frac{R}{r}\right)^l P_l(\theta)J_l \right\}$$

の{}内第一項の1にその意味が含まれている. そして  $k = 1$  は惑星重心と座標中心のズレを表す. 今惑星中心を座標原点としているのでこの項は必要ない. よって  $k = 2$  から始まる.



1 行目から 2 行目への変化で,  $P_0(\cos \theta) = 1$  を用いた. ルジャンドル多項式の直交性の式 (B.14) より

$$\begin{aligned}
&= - \int_{r=R}^{\infty} \int_{\lambda=0}^{2\pi} GMr \left\{ 0 + \sum_{l=2}^n \left( \frac{R}{r} \right)^l \frac{2}{2k+1} \delta_{lk} J_l \right\} dr d\lambda \\
&= - \int_{r=R}^{\infty} \int_{\lambda=0}^{2\pi} GMr \left( \frac{R}{r} \right)^k \frac{2}{2k+1} J_k dr d\lambda \\
&= - \int_{r=R}^{\infty} 2\pi GMR^k r^{-k+1} \frac{2}{2k+1} J_k dr \\
&= -GMR^k \frac{4\pi}{2k+1} J_k \int_{r=R}^{\infty} r^{-k+1} dr \\
&= -GMR^k \frac{4\pi}{2k+1} J_k \left[ \frac{1}{-k+2} r^{-k+2} \right]_{r=R}^{\infty} \\
&= -GMR^k \frac{4\pi}{2k+1} J_k \left( 0 - \frac{1}{-k+2} R^{-k+2} \right) \\
&= -GMR^2 \frac{4\pi}{(2k+1)(k-2)} J_k \tag{B.17}
\end{aligned}$$

となる. 次に右辺の計算を行う.

右辺について

式 (B.12) の右辺

$$\sum_{l=0}^{\infty} \beta_{l0} r^{-(l+1)} Y_{l0}(\theta)$$

にも同様に  $P_k(\cos \theta)$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) をかけて体積積分 ( $R \leq r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \lambda \leq 2\pi$ ) をすると,

$$\begin{aligned}
&\int_{r=R}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} r^2 \sin \theta \sum_{l=0}^{\infty} \beta_{l0} r^{-(l+1)} Y_{l0}(\theta) P_k(\cos \theta) dr d\theta d\lambda \\
&= \int_{r=R}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \beta_{l0} r^{-l+1} Y_{l0}(\theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta dr d\theta d\lambda \tag{B.18}
\end{aligned}$$

球面調和関数式 (B.11) より

$$= \int_{r=R}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \beta_{l0} r^{-l+1} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta dr d\theta d\lambda \tag{B.19}$$

さらにルジャンドル多項式の直交性の式 (B.14) より

$$\begin{aligned}
&= - \int_{r=R}^{\infty} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \beta_{l0} r^{-l+1} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{2}{2k+1} \delta_{lk} dr d\lambda \\
&= -2\pi \int_{r=R}^{\infty} \beta_{k0} r^{-k+1} \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} \frac{2}{2k+1} dr \\
&= -2\pi \beta_{k0} \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} \frac{2}{2k+1} \left[ \frac{1}{-k+2} r^{-k+2} \right]_{r=R}^{\infty} \\
&= -\beta_{k0} \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} \frac{4\pi}{2k+1} \left( 0 - \frac{1}{-k+2} R^{-k+2} \right) \\
&= -\beta_{k0} \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} \frac{1}{k-2} R^{-k+2} \tag{B.20}
\end{aligned}$$

となる。

左辺と右辺の比較

整数  $k$  を  $l$  に置き換えて, 左辺の計算結果の式 (B.17) と右辺の計算結果の式 (B.20) を再び等号で結ぶと,

$$\begin{aligned}
-GMR^2 \frac{4\pi}{(2l+1)(l-2)} J_l &= -\beta_{l0} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{1}{l-2} R^{-l+2} \\
GMJ_l &= \beta_{l0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} R^{-l} \tag{B.21}
\end{aligned}$$

となる。ここで定数  $\beta_{l0}$  に式 (B.10) を代入すると

$$\begin{aligned}
GMJ_l &= -\frac{4\pi G}{2l+1} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} R^{-l} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{r'=0}^{\infty} [\rho(r', \theta') Y_{l0}^*(\theta', \lambda') \\
&\quad \times r'^{l+2} \sin \theta'] dr' d\theta' d\lambda' \tag{B.22}
\end{aligned}$$

さらに (B.7) より,  $Y_{l0}^*$  を  $P_l$  で表すと,

$$\begin{aligned}
MJ_l &= -\frac{4\pi}{(2l+1)} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} R^{-l} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{r'=0}^{\infty} \rho(r', \theta') \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) r'^{l+2} \sin \theta' \\
&\quad dr' d\theta' d\lambda' \\
MJ_l &= -R^{-l} \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \rho(r, \theta) P_l(\mu) r^{l+2} \sin \theta dr d\theta d\lambda \tag{B.23}
\end{aligned}$$

ここで体積積分を  $V$  で表すと ( $\iiint r^2 \sin \theta dr d\theta d\lambda = \int_V dV$ ), 式 (B.23) は

$$MJ_l R^l = - \int_{\tau} \rho(r, \theta) P_l(\mu) r^l dV \quad (\text{B.1})$$

となる.

よって式 (B.1), ならびに Helled et al. (2011) の式 (3) は示された.

### $\beta_{lm}$ の表式の証明

式 (B.3)

$$\Phi(r, \theta, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [\alpha_{lm} r^l + \beta_{lm} r^{-(l+1)}] Y_{lm}(\theta, \lambda)$$

の係数  $\beta_{lm}$  が式 (B.4)

$$\beta_{lm} = -\frac{4\pi G}{(2l+1)} \int_{r'=0}^{\infty} \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \rho(r', \theta', \lambda') Y_{lm}^*(\theta', \lambda') r'^{l+2} \sin \theta' dr' d\theta' d\lambda'$$

のように表せることを証明する. この証明には式 (B.3) と以下の式 (B.24) を用いる.

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (\text{B.24})$$

この式はポテンシャル  $\Phi(\mathbf{r})$  を積分形式で表したものである. 式 (B.3) と式 (B.24) より,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \beta_{lm} r^{-(l+1)} Y_{lm}(\theta, \lambda) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (\text{B.25})$$

となる. なお, 本節冒頭の議論より  $\alpha_{lm}$  は消去してある.  $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  は以下のように表せる.

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} \left\{ \frac{4\pi}{(2l+1)} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \lambda') Y_{lm}(\theta, \lambda) \right\} \quad (\text{B.26})$$

これを証明し, 式 (B.25) に代入するという手順を踏む.

式 (B.26) の証明に必要な式を以下に列挙する.

$$(1 - 2xz + z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \quad (\text{B.27})$$

$$P_l(\cos \psi) = \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (\text{B.28})$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_n \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \psi) \quad (\text{B.29})$$

式 (B.28) について, これはルジャンドル多項式の加法定理と呼ばれるものであり, 角  $\psi$  は 2 点  $(\theta, \varphi)$  と  $(\theta', \varphi')$  のなす角である. 式 (B.29) について,  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  を位置ベクトルとする点の極座標を  $(r, \theta, \varphi), (r', \theta', \varphi')$ ,  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  の間の角度を  $\psi$  とし,  $r$  と  $r'$  のうち大きい方を  $r_>$ , 小さい方を  $r_<$  としている.

式 (B.27) は式 (B.28) の証明に必要なものである. (B.29) の整数  $n$  を  $l$  に置き換えて式 (B.28) を代入すると,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} \left\{ \frac{4\pi}{(2l+1)} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \lambda') Y_{lm}(\theta, \lambda) \right\}$$

となり, 式 (B.26) が得られる. なお,  $r_< = r', r_> = r$  と表記を変えている. この結果を式 (B.25) に代入すると,

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \beta_{lm} r^{-(l+1)} Y_{lm}(\theta, \lambda) &= -G \int_V \rho(\mathbf{r}') \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} \\ &\times \left\{ \frac{4\pi}{(2l+1)} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \lambda') Y_{lm}(\theta, \lambda) \right\} dV' \\ &= - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l G \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{r'^l}{r^{l+1}} \\ &\times \left\{ \frac{4\pi}{(2l+1)} Y_{lm}^*(\theta', \lambda') Y_{lm}(\theta, \lambda) \right\} dV' \quad (\text{B.30}) \end{aligned}$$

よって,

$$\beta_{lm} = - \frac{4\pi G}{(2l+1)} \int_{r'=0}^{\infty} \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \rho(\mathbf{r}') Y_{lm}^*(\theta', \lambda') r'^{l+2} \sin \theta d\lambda' d\theta' dr' \quad (\text{B.10})$$

となる. これで式 (B.3) の係数  $\beta_{lm}$  の表式 (B.4) が証明された.

以降では証明に用いられた 2 式 (B.27, B.29) が得られる過程を示す. 式 (B.27), (B.29) は後藤, 山本, 神吉 (2004) <sup>\*8</sup> の証明過程を参考にする. (B.28) は蓬田 清 (2007) の p66~67, 69 を見よ.

式 (B.27) の証明

式 (B.27)

$$(1 - 2xz + z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n$$

は以下の Rodrigues 公式から出発した証明で導くことができる.

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^n \quad (\text{B.31})$$

<sup>\*8</sup> 後藤憲一, 山本邦夫, 神吉健 (2004) 詳解 応用物理 数学演習 (共立出版) 129-130, 225-226, 358

ただし,  $-1 < x < 1, |z| < 1$

この公式内の  $(d/dx)^n(1-x^2)^n$  に対して解析関数の微分公式

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi \quad (\text{B.32})$$

を用いると  $(f(\xi))$  に  $(1-\xi^2)^n$  を代入,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left( \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{(1-\xi^2)^n}{(\xi-x)^{n+1}} d\xi \right) \\ P_n(x) &= \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_C \frac{(1-\xi^2)^n}{2^n (\xi-x)^{n+1}} d\xi \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

なお, 積分路  $C$  は次ページに示すような形となっており, 時計回りである. ここで

$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n$  に式 (B.33) を代入すると,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_C \frac{(1-\xi^2)^n}{2^n (\xi-x)^{n+1}} d\xi \right) z^n \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C d\xi \frac{1}{(\xi-x)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{(1-\xi^2)z}{2(\xi-x)} \right]^n \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

$|z|$  が十分小さい時, 式 (B.34) の和は収束する. ここで  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n = (1+A)^{-1}$

という定理を  $A = \frac{(1-\xi^2)z}{2(\xi-x)}$  として用いると, 式 (B.34) は以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n &= \frac{1}{2\pi i} \int_C d\xi \frac{1}{\xi-x} \frac{1}{1 + \frac{(1-\xi^2)z}{2(\xi-x)}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\xi}{\xi-x + \frac{(1-\xi^2)z}{2}} \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_C \frac{d\xi}{-\xi+x - \frac{(1-\xi^2)z}{2}} \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_C \frac{d\xi(2/z)}{-(2/z)\xi + (2/z)x - (1-\xi^2)} \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_C \frac{d\xi(2/z)}{(\xi^2 - \frac{2}{z}\xi + \frac{2x-z}{z})} \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_C \frac{d\xi(2/z)}{(\xi-\alpha^+)(\xi-\alpha^-)} \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

ここで,  $\alpha^{\pm} = [1 \pm (1-2xz+z^2)^{1/2}]/z$  である. さらに  $|z|$  が十分小さい時,  $\alpha^+ \approx [1 \pm (1-xz+(z^2/2))]/z$  (マクローリン展開 1 次まで) より,  $\alpha^+ \sim (z/2) - x + (2/z)$

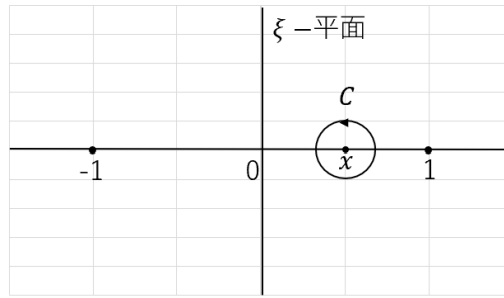


図 B.1: 式 (B.32) で考えている積分経路.

,  $\alpha^- \sim x - (z/2)$ . したがって極の 1 つ  $\xi = \alpha^-$  は  $x$  のすぐ近傍にあり, 他の 1 つ  $\xi = \alpha^+$  は  $x$  から遠方で  $C$  の外にある. ゆえに, 留数定理より式 (B.35) の積分値を求めることができる. まず以下が留数定理である.

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}f(z_k) \quad (\text{B.36})$$

さらに留数は以下のように求められる<sup>9</sup>.

$$\text{Res}f(z_k) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z - z_k)^m f(z)\} \quad (\text{B.37})$$

式 (B.37) を用いて式 (B.35) の積分の  $\xi = \alpha^-$  の留数を求める. なお, ここから式 (B.35) の積分に適用するために  $f(\xi) = \frac{(2/z)}{(\xi - \alpha^+)(\xi - \alpha^-)}$  として考える.  $\xi = \alpha^-$  の留数は

$$\begin{aligned} \text{Res}f(\alpha^-) &= \frac{1}{(1-1)!} \lim_{\xi \rightarrow \alpha^-} \frac{d^{1-1}}{d\xi^{1-1}} \{(\xi - \alpha^-)^1 f(\xi)\} \\ \text{Res}f(\alpha^-) &= \lim_{\xi \rightarrow \alpha^-} \{(\xi - \alpha^-) f(\xi)\} \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

$\alpha^-$  は一位の極なので  $m = 1$  で計算している. 続いて  $f(\xi) = \frac{(2/z)}{(\xi - \alpha^+)(\xi - \alpha^-)}$  を代入して,

$$\begin{aligned} \text{Res}f(\alpha^-) &= \lim_{\xi \rightarrow \alpha^-} \left\{ (\xi - \alpha^-) \frac{(2/z)}{(\xi - \alpha^+)(\xi - \alpha^-)} \right\} \\ \text{Res}f(\alpha^-) &= \lim_{\xi \rightarrow \alpha^-} \left\{ \frac{(2/z)}{(\xi - \alpha^+)} \right\} \\ \text{Res}f(\alpha^-) &= \frac{(2/z)}{(\alpha^- - \alpha^+)} \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

この留数を式 (B.36) に代入して

$$\int_C f(\xi)d\xi = 2\pi i \frac{(2/z)}{(\alpha^- - \alpha^+)} \quad (\text{B.40})$$

<sup>9</sup> 表実 (2018) 理工系の数学入門コース 5 複素関数 (岩波書店) 80-81

この積分結果を式 (B.35) に代入して,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n &= \frac{-1}{2\pi i} 2\pi i \frac{(2/z)}{(\alpha^- - \alpha^+)} \\
&= -\frac{(2/z)}{(\alpha^- - \alpha^+)} \\
&= -\frac{(2/z)}{[1 - (1 - 2xz + z^2)^{1/2}]/z - [1 + (1 - 2xz + z^2)^{1/2}]/z} \\
&= -\frac{2}{[1 - (1 - 2xz + z^2)^{1/2}] - [1 + (1 - 2xz + z^2)^{1/2}]} \\
&= -\frac{2}{-2(1 - 2xz + z^2)^{1/2}} \\
&= (1 - 2xz + z^2)^{-1/2} \tag{B.41}
\end{aligned}$$

よって式 (B.27) が得られた.

(B.29) の証明

$\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  を位置ベクトルとする点の極座標を  $(r, \theta, \varphi), (r', \theta', \varphi')$ ,  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  の間の角度を  $\psi$  とし,  $r$  と  $r'$  のうち大きい方を  $r_>$ , 小さい方を  $r_<$  の条件に関して成り立つ以下の式を証明する.

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_n \frac{r_<^n}{r_>^{n+1}} P_n(\cos \psi)$$

まず  $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  を変形する.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \psi + r'^2}} \\
&= \frac{1}{r'} \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{r'^2} - 2\frac{r}{r'} \cos \psi + 1}} \\
&= \frac{1}{r'} \left\{ 1 - 2\frac{r}{r'} \cos \psi + \frac{r^2}{r'^2} \right\}^{-1/2} \tag{B.42}
\end{aligned}$$

この式 (B.42) の右辺に式 (B.27) を適用する.  $r < r'$  の時,  $x = \cos \psi$ ,  $z = \frac{r}{r'} < 1$  として適用すると

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \psi) \left(\frac{r}{r'}\right)^n \tag{B.43}$$

また,  $r > r'$  ならば,  $r, r'$  を交換した式になる. そこで  $r_>, r_<$  を用いて表記すると

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_n \frac{r_<^n}{r_>^{n+1}} P_n(\cos \psi) \quad (\text{B.44})$$

これで式 (B.29) が証明された.



## 付録 C 密度多項式の係数を 5 つに減らす方法

惑星の規格化された密度分布  $\eta$  は規格化された半径  $\beta$  によって以下のように 6 次多項式で表されると仮定する。

$$\eta = k_6\beta^6 + k_5\beta^5 + k_4\beta^4 + k_3\beta^3 + k_2\beta^2 + k_1\beta + k_0 \quad (\text{C.1})$$

この式に、「 $\beta = 0$  で  $\frac{\partial\eta}{\partial\beta} = 0$  と」いう条件と、「密度を体積積分すると全質量になる」という条件を適用すると  $k_1, k_6$  を消去して以下のような形に変形できる。

$$\begin{aligned} \eta = & 3\beta^6 + k_0(1 - 3\beta^6) + k_2\beta^2 \left(1 - \frac{9}{5}\beta^4\right) + k_3\beta^3 \left(1 - \frac{3}{2}\beta^3\right) \\ & + k_4\beta^4 \left(1 - \frac{9}{7}\beta^2\right) + k_5\beta^5 \left(1 - \frac{9}{8}\beta\right) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

この過程を以下に示す。

まず式 (C.1) に「 $\beta = 0$  で  $\frac{\partial\eta}{\partial\beta} = 0$ 」という条件を適用すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\beta} (k_6\beta^6 + k_5\beta^5 + k_4\beta^4 + k_3\beta^3 + k_2\beta^2 + k_1\beta + k_0) |_{\beta=0} = 0 \\ \therefore k_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

よって  $\beta$  の 1 次の項は無くなる。次に「密度を体積積分すると全質量になる」という条件を適用すると以下ようになる。なお、 $r$  は動径、 $\rho$  は動径  $r$  での密度、 $\rho_0$  は平均密度、 $M$  は惑星全質量、 $R$  は惑星半径であり、規格化された密度と半径はそれぞれ  $\eta \equiv \frac{\rho}{\rho_0}$ ,  $\beta \equiv \frac{r}{R}$  である。

$$\begin{aligned}
\int_0^R \rho 4\pi r^2 dr &= M \\
\int_0^R \frac{\rho}{\rho_0} 4\pi \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{dr}{R} &= \frac{M}{\rho_0 R^3} \\
\int_0^1 \eta 4\pi \beta^2 d\beta &= \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0}{\rho_0 R^3} \\
\int_0^1 \eta \beta^2 d\beta &= \frac{1}{3} \\
\int_0^1 (k_6 \beta^8 + k_5 \beta^7 + k_4 \beta^6 + k_3 \beta^5 + k_2 \beta^4 + k_0 \beta^2) d\beta &= \frac{1}{3} \\
\left[ \frac{1}{9} k_6 \beta^9 + \frac{1}{8} k_5 \beta^8 + \frac{1}{7} k_4 \beta^7 + \frac{1}{6} k_3 \beta^6 + \frac{1}{5} k_2 \beta^5 + \frac{1}{3} k_0 \beta^3 \right]_0^1 &= \frac{1}{3} \\
\frac{1}{9} k_6 &= \frac{1}{3} - \left( \frac{1}{8} k_5 + \frac{1}{7} k_4 + \frac{1}{6} k_3 + \frac{1}{5} k_2 + \frac{1}{3} k_0 \right) \\
\therefore k_6 &= 3 - \left( \frac{9}{8} k_5 + \frac{9}{7} k_4 + \frac{3}{2} k_3 + \frac{9}{5} k_2 + 3k_0 \right) \tag{C.4}
\end{aligned}$$

こうして求められた  $k_1, k_6$  を式 (C.1) に代入すると,

$$\begin{aligned}
\eta &= \left( 3 - \left\{ \frac{9}{8} k_5 + \frac{9}{7} k_4 + \frac{3}{2} k_3 + \frac{9}{5} k_2 + 3k_0 \right\} \right) \beta^6 + k_5 \beta^5 + k_4 \beta^4 + k_3 \beta^3 + k_2 \beta^2 + k_0 \\
\eta &= 3\beta^6 + k_0(1 - 3\beta^6) + k_2 \beta^2 \left( 1 - \frac{9}{5} \beta^4 \right) + k_3 \beta^3 \left( 1 - \frac{3}{2} \beta^3 \right) \\
&\quad + k_4 \beta^4 \left( 1 - \frac{9}{7} \beta^2 \right) + k_5 \beta^5 \left( 1 - \frac{9}{8} \beta \right) \tag{C.5}
\end{aligned}$$

よって係数を 5 つに減らすことに完了した。

## 付録 D 静水圧平衡の式及び質量連続の式の規格化前と後の関係

静水圧平衡と質量連続の式が規格化されていて規格化前の形との関係がややわかりにくいので規格化後の形から規格化前の形への式変形を記しておく。まず静水圧平衡の式 (16) について見ていく。左辺を式変形すると

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\eta} \frac{d\xi}{d\beta} &= \frac{\rho_0}{\rho(s)} \frac{d\left(\frac{p(s)}{p_0}\right)}{d\left(\frac{s}{R}\right)} \\
 &= \frac{\rho_0}{\rho(s)} \frac{1}{p_0} \frac{dp(s)}{ds} \frac{ds}{d\left(\frac{s}{R}\right)} \\
 &= \frac{\rho_0}{\rho(s)} \frac{R}{GM\rho_0} \frac{dp(s)}{ds} \frac{1}{\frac{d\left(\frac{s}{R}\right)}{ds}} \\
 &= \frac{R}{GM\rho(s)} \frac{dp(s)}{ds} R \\
 &= \frac{R^2}{GM\rho(s)} \frac{dp(s)}{ds}
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

次に式 (17) の右辺について

$$\begin{aligned}
 -\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{2}{3}m\beta &= -\frac{\left(\frac{M(\beta)}{M}\right)}{\left(\frac{s}{R}\right)^2} + \frac{2}{3} \frac{\omega^2 R^3 s}{GM R} \\
 &= -\frac{M(\beta)R^2}{Ms^2} + \frac{2}{3} \frac{s\omega^2 R^2}{GM}
 \end{aligned} \tag{D.2}$$

さらに両辺を等号でつなぎ直すと,

$$\begin{aligned}
 \frac{R^2}{GM\rho(s)} \frac{dp(s)}{ds} &= -\frac{M(\beta)R^2}{Ms^2} + \frac{2}{3} \frac{s\omega^2 R^2}{GM} \\
 \frac{1}{\rho(s)} \frac{dp(s)}{ds} &= -\frac{GM(\beta)}{s^2} + \frac{2}{3} s\omega^2
 \end{aligned} \tag{D.3}$$

これで静水圧平衡の式  $\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -g$  の形になった。右辺第一項は距離  $s$  だけ離れた質量  $M(\beta)$  の物体と単位質量の物体の間に働く万有引力である (重力加速度)。右辺第二項は遠心力による効果である。これで静水圧平衡の式の規格化前と後の関係が確認できた。

次に質量連続の式 (17) について見ていく。静水圧平衡の式と同様に両辺を変形

していくと

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{d\beta} &= 3\eta\beta^2 \\ \frac{d\left(\frac{M(\beta)}{M}\right)}{d\left(\frac{s}{R}\right)} &= 3\frac{\rho(s)}{\rho_0}\left(\frac{s}{R}\right)^2 \\ \frac{R}{M}\frac{dM(\beta)}{ds} &= 3\frac{\rho(s)}{\rho_0}\left(\frac{s}{R}\right)^2 \\ \frac{dM(\beta)}{ds} &= 3\frac{M}{R^3}\frac{\rho(s)}{\rho_0}s^2 \\ \frac{dM(\beta)}{ds} &= 3\frac{\frac{4}{3}\rho_0\pi R^3}{R^3}\frac{\rho(s)}{\rho_0}s^2 \\ \frac{dM(\beta)}{ds} &= 4\pi\rho(s)s^2\end{aligned}\tag{D.4}$$

となり, 質量の動径方向の変化が球殻の質量を表している質量連続の式になっている. これで質量連続の式の規格化前と後の関係が確認できた.

## 付録 E Helled et al. (2011) 全訳

### 天王星, 海王星の内部構造モデル

#### 概要

重力係数  $J_2, J_4$ , 惑星半径, 質量, ボイジャー固体自転周期に束縛される天王星と海王星の内部構造の (圧力対密度の) 経験的モデルを示す. 水素, ヘリウム, 氷 ( $\text{H}_2\text{O}$ ), 岩石 ( $\text{SiO}_2$ ) の物理状態方程式の観点から解釈して, 経験的圧力-密度分布モデルの物理的実現可能性を検証する. 天王星と海王星の組成はいくらか高 Z 物質の異なる分布があるものの似通っていると判明した. この 2 惑星の大きな違いは天王星は太陽組成の外層が最も適合する一方で海王星は太陽的でない外層が必要とされることである. 我々の分析はより天王星と海王星両方の内部のより重い元素は惑星中心に向かって徐々に増加するかもしれないことを示唆している. 実際のところ急激な組成遷移が無くとも重力モーメントに適合する可能性はある. キーワード:惑星と衛星:組成-惑星と衛星:(特定の) 惑星 (天王星, 海王星) -惑星と衛星:内部構造

#### 1. イントロダクション

巨大氷惑星の天王星と海王星は太陽系の中で最も遠くに位置する惑星であり, それぞれ 14.536, 17.147 地球質量 ( $M_\oplus$ ) を持つ. これらの内部構造の理解は不十分であるが, 質量, 半径, ボイジャー 2 号 (Smith et al. 1986, 1989) によって測定された重力場を基礎としていくつかの推論を立てられる. そのデータはこれらの巨大氷惑星は水素とヘリウムを大気を含んでいるが, 巨大ガス惑星とは異なり, 水素/ヘリウム質量比が小さいということを示している. 大気層より深層の組成は不明であるが一般的に岩石と氷の混合物であるとされている (Hubbard et al. 1991; Podolak et al. 1995).

木星と土星のモデルと天王星と海王星のモデルの間にはある根本的な違いがある. 前者は大規模なガス外層と比較的小さいコアを持つ. 「コア」というのは惑星の中心にある重元素の領域であり, 覆っている外層とは組成が異なり密度の不連続によって隔てられている. 実は木星コアは 0 ~ 6 地球質量を持つことを最近の内部構造モデルは示しているので, 木星はコアを全く持っていないかもしれないのである (Saumon & Guillot 2004). 内部構造モデルは土星のコアでさえ質量は非常に小さく 0 ということもあり得るということを示したのである (Guillot 1999).

木星や土星について, 重力モーメントはコアの存在に対する感度が低い. そのため, コアの質量と組成はあまりよく制約されていない (Podolak & Hubbard 1998; Saumon & Guillot 2004). しかし天王星と海王星については, より重い元素が惑星の質量においてより高い存在比を示す上に, 内部領域は重力的四重極

モーメントである  $J_2$  を用いてよりよく調べられている. 図 1 は木星, 土星の重力モーメントの正規化された積分値 (寄与関数) を示している. その関数は惑星内部のそれぞれの層がどのように惑星の総質量と重力モーメントに寄与しているか描写している (Zharkov & Trubitsyn 1974; Guillot & Gautier 2007). 木星のコア領域は中心から半径の最大 15% まで広がる可能性があるが重力モーメントを用いてのサンプルはあまりされていない. 一方海王星はコア領域が中心から半径の 70% まで広がる可能性があり, 重力調和関数 (gravitational harmonics) によってしっかりサンプルされている. 海王星のコア領域が木星のものに比べて大きいことに加えて, 寄与関数のピークが海王星のかなりの深部で生じているが, これは海王星的な惑星は調和関数が内部構造に対する感度が良いことを示している. 図 1 で示された寄与関数は 6 次の多項式で表された密度分布を用いて計算したものであり, もし異なる内部構造モデルを用いると少しだけ変化しうる図 1 で木星と海王星の場合の結果しか示さなかったが, 同様に土星と天王星にもこの図は適用できる.

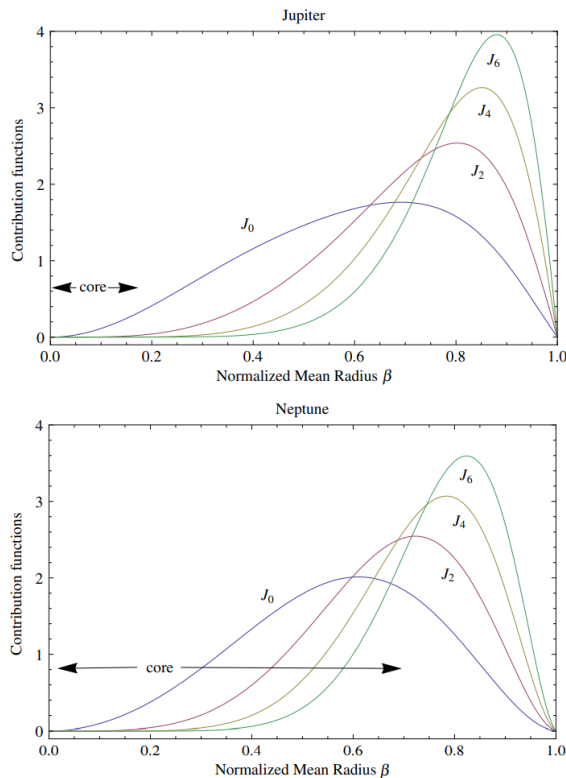


図 1: 正規化された木星 (上), 海王星 (下) の重力モーメントの被積分関数 (寄与関数). 値は各曲線の下領域を 1 に等しくするために規格化されている.  $J_0$  は惑星質量に等しい. コアの大きさとして可能性のある領域が示されている. コアは H/He 外層の下にある重元素領域のことである. 海王星 (天王星) の内部は木星 (土星) に比べて重力調和関数によってよりサンプルされていることは明らかである. (この図のカラー版はオンライン誌でのみ利用可能.)

天王星と海王星の内部構造モデルの入手できる制約は限られている. これらの

惑星の重力調和関数はまだ 4 次までしか計測されておらず ( $J_2, J_4$ ), 惑星の形と自転周期はあまりわかっていない (Helled et al. 2010). これらの惑星の熱構造も難しさを呈している. Hubbard(1968) は, 木星の熱放出が厚い対流的な外層とほぼ断熱的な熱勾配を示唆していることを示した. また, 土星と海王星は熱流量が高く, 断熱的な熱勾配はこれらの天体においても同様に良い近似かもしれない. しかし, 天王星の熱放出はほぼゼロであるため (Pearl et al. 1990), 天王星の熱勾配は非断熱的であり内部構造のかなりの部分は非対流である可能性がある. 天王星と海王星の磁場は内部構造についてさらなる情報をもたらしてくれる (Ness et al. 1986, 1989; Stanley & Bloxham 2004, 2006). 多極性の磁場の性質を説明するためには非常に電気伝導率が高く, おそらく水が主成分の比較的浅部に位置している流体の領域が必要である.

天王星と海王星をモデリングするために主に 2 つの方法が用いられている. 最初の方法ではこれらの惑星が 3 層で構成されていることを仮定しており, その 3 層とはそれぞれ「岩石」(ケイ素, 鉄) の核, 「氷」の殻 ( $H_2O, CH_4, NH_3, H_2S$ ), ガス状の外層 ( $H_2, He$  と少量の重めの元素) である. この手法は仮定した物質に対する物理状態方程式 (EOS) を用いて, 測定された重力係数と最もよく合う密度の分布 (全圧と温度も) を導く. 質量, 赤道半径のようなこれらの天体の物理量は追加の束縛条件として用いられる. 3 層における質量, 組成は測定された重力係数にモデルが合うまで修正される. これらのモデルは概して 1 bar の気圧レベルで測定された温度に合わせた断熱曲線で表される断熱構造を仮定としている (Hubbard et al. 1991; Podolak et al. 1995). この手法は海王星の  $J_2$  と  $J_4$  両方に合うモデルを見つけることに成功したが, この種類のモデルで天王星の  $J_2$  と  $J_4$  に合うものは見つかっていない. 例えば, Podolak et al. (1995) は天王星で観測された値に合わせるためには, その当時の EOS から得られるものより 10% 小さい氷殻の密度が必要であることを示した. 加えてこのモデルでの氷と岩石の比は質量では 30, 太陽の比の約 10 倍である. Podolak et al. (1995) は惑星が完全に断熱的でない場合に, 天王星のより低い密度はより高い惑星内部温度によって説明できると指摘している. 天王星の非断熱的な構造は, 完全に対流的ではない内部構造という視点で惑星の低い熱流量に説明を与える魅力的な考えである.

天王星と海王星の内部構造をモデル化する 2 つ目のアプローチは, 惑星の構造と組成という点ではアプリアリな仮定をしない. 測定された重力場と合う天王星と海王星の半径方向の密度分布は Monte Carlo 探査を用いて得られる (Marley et al. 1995; Podolak et al. 2000). この手法は惑星の構造と組成について予想されていた考えから離れ, 前提としていた物質の EOS に制限されない. 一度重力係数に合う密度分布が見つかり, これらの天体にあり得る組成についての結論は EOS を用いて推論できる (Marley et al. 1995).

この論文では, 我々の以前の土星のモデル (Anderson & Schubert 2007; Helled et al. 2009a) で用いた手法を天王星と海王星の質量, 半径, 重力モーメントに合う

連続的な半径方向の密度と圧力の分布を得るために適用する。不連続を持たない密度に対してなめらかな関数を用いることによって、天王星と海王星が内部に密度と組成に不連続を持たないかどうかテストできる。第2節ではモデルと結果を要約して述べる。第3節では物理状態方程式の表を使い、密度分布が示唆する天王星と海王星の内部組成について推察する。第4節は結論である。

## 2. 内部構造モデル:密度と圧力の半径方向の分布

内部構造モデルを得るための手順は Anderson & Schubert (2007) and Helled et al. (2009a) に詳細にまとめられている。その手法を以下に手短かにまとめる。自転する惑星の重力場は

$$U = \frac{GM}{r} \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{2n} J_{2n} P_{2n}(\cos \theta) \right) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (1)$$

で与えられる。 $(r, \theta, \phi)$  が表す点は3次元極座標であり、 $G$  は万有引力定数、 $M$  は惑星の総質量、 $\omega$  は自転角速度である。これらの天体はボイジャーによって計測された自転周期 (表1) で固体として自転していると想定しているが、天王星と海王星の内部の自転情報は実際はあまりわかっておらずより複雑である可能性があるためこの想定は単純化されたものである (Helled et al. 2010)。ポテンシャル  $U$  は偶数のルジャンドル多項式  $P_{2n}$  の展開式として表現されている (Kaula 1968; Zharkov & Trubitsyn 1978)。惑星は総質量、1 bar 気圧レベルの赤道半径  $a$ 、調和係数  $J_{2n}$  によって特徴づけられ、 $J_{2n}$  は探査機の惑星接近時のドップラートラッキングのデータから推察される。

表1: メモ. <http://ssd.jpl.nasa.gov>, Jacobson (2003), Jacobson et al. (2006)。 $R_{\text{ref}}$  は計測された重力調和関数  $J_2, J_4$  として報告された値に対応する任意の基準赤道半径である。 $a$  は1 bar レベルでの赤道半径である。 $\bar{J}_2, \bar{J}_4$  は  $R_{\text{ref}}$  の代わりに  $a$  を用いた場合に得られた重力係数である。 $q, \rho_0, p_0$  はそれぞれ本文中で定義された微小変数, 特徴的密度, 圧力である。

| Parameter                            | Uranus             | Neptune             |
|--------------------------------------|--------------------|---------------------|
| $P$ (rotation period)                | 17.24 hr           | 16.11 hr            |
| $GM$ ( $\text{km}^3 \text{s}^{-2}$ ) | $5,793,964 \pm 6$  | $6,835,100. \pm 10$ |
| $R_{\text{ref}}$ (km)                | 26,200             | 25,225              |
| $J_2$ ( $\times 10^6$ )              | $3341.29 \pm 0.72$ | $3408.43 \pm 4.50$  |
| $J_4$ ( $\times 10^6$ )              | $-30.44 \pm 1.02$  | $-33.40 \pm 2.90$   |
| $a$ (km)                             | $25,559 \pm 4$     | $24,764 \pm 15$     |
| $\bar{J}_2$ ( $\times 10^6$ )        | $3510.99 \pm 0.72$ | $3536.51 \pm 4.50$  |
| $\bar{J}_4$ ( $\times 10^6$ )        | $-33.61 \pm 1.02$  | $-35.95 \pm 2.90$   |
| $q$                                  | 0.0295349          | 0.0260784           |
| $\rho_0$ ( $\text{kg m}^{-3}$ )      | 1266.46            | 1630.53             |
| $p_0$ ( $M$ bar)                     | 2.89025            | 4.51959             |



測定された天王星と海王星の重力定数は表 1 に記載されている。観測された重力係数  $J_2, J_4$  はそれぞれ天王星は 26,200 km, 海王星では 25,225 km で与えた任意の基準の赤道半径  $R_{\text{ref}}$  と対応する (Jacobson et al. 2006; Table 1)。もう 1 つの内部構造モデルに用いられる物理的性質は赤道半径である。天王星については、ボイジャー 2 号の電波掩蔽によって掩蔽の始まりと終わりで 2 つの半径がもたらされた。これらはほぼ赤道での掩蔽であり、要するに天王星の赤道半径の直接的な測定をもたらしたのである。天王星の赤道半径は  $25,559 \pm 4$  km であるとわかった。海王星の掩蔽の位置は赤道にはない。ボイジャー 2 号の電波掩蔽測定の幾何学は掩蔽の終わりのデータがより解釈しにくく、信頼できる南緯 42.26 度での掩蔽の終わりで惑星中心からの半径測定をする結果となった<sup>\*10</sup> (Tyler et al. 1989; Lindal 1992, Figure 7)。この緯度での半径は  $24,601 \pm 4$  km であるとわかった。Lindal (1992) は  $24,766 \pm 15$  km という海王星の 1 bar 等圧面の半径を風速 (Smith et al. 1989) を用いて導き、誤差は赤道から極までの電波掩蔽における値の外挿の不確定性を反映している。 $\mu$  bar の圧力レベルでの星の掩蔽計測と Lindal (1992, 図 3 と 4) が示したような大気モデルとの組み合わせ (例 Hubbard et al. 1987) は 1 bar 気圧レベルでの惑星の形状を明らかにするために用いることができる。海王星において、そのような外挿は Lindal が報告した赤道半径と非常によく合致する結果となる。しかし  $1\mu$  bar から 1 bar の外挿は静水圧平衡にある大気を前提としており、これら大気中の圧力レベルにおける風系を考慮していなかった。Helled et al. (2010) に従い、我々は海王星の赤道半径に  $24,764 \pm 15$  km を採用するが、この赤道半径は Tyler et al. (1989) が報告したものに似ており、2 km だけ Lindal (1992) が得たものよりも小さい。Lindal の半径を用いて得られる惑星の形 (平均半径) は我々のモデルから得られるものとは異なる。この差異は我々がボイジャーの計測した固体自転周期だけで定義される天王星、海王星の遠心ポテンシャルで惑星の形を得ているという事が原因である一方で、Lindal は両天体の風によるゆがみを含んだ 1 bar 気圧レベルでの惑星の形状を得たのである (詳細は Helled et al. 2009b, 2010 の論文を参照)。

我々は微小パラメータ  $m$  (以下の表 2 で定義されている) を用いてジオイド半径を 5 次で計算し  $J_2$  と  $J_4$  さらに  $J_6, J_8, J_{10}$  の値さえもジオイドの計算が確実に  $\pm 1.0$  km より精度よくなるようにするために  $\log(J_{2i}) - \log(2i)$  の線形関数として外挿する (Helled et al. 2010)。惑星の平均密度  $\rho_0$  は 5 次の標準ジオイドの体積で割られた総質量として定義される。微小パラメータ  $m = \omega^2 R^3 / GM$  の定義に従い、惑星平均半径  $R$  は惑星平均密度の等値球面である (Zharkov & Trubitsyn 1978)。似たような微小パラメータ  $q$  は  $\omega^2 a^3 / GM$  で与えられ、標準ジオイドの計算に用いられる。内部の特徴的圧力は  $p_0 = GM\rho_0/R$  で与えられる (Zharkov & Trubitsyn 1978)。表 1, 2 で与えられる変数について、正規化した平均半径  $\beta$  は

<sup>\*10</sup> Lindal 1992 によるとこの時地球から南極が見えていたためデータがわかりにくいのは掩蔽開始の方である。よって原文の誤りであると考えられる。

表 2: メモ.  $\bar{J}_{2n}$  は 1 bar での赤道半径で正規化された重力モーメントに整合する一方で,  $J_{2n}$  は基準半径  $R_{ref}$  に整合する重力モーメントである. 値を表 1 で与えられた測定値と比較して見ていただきたい.

| Parameter                 | Uranus  | Neptune |
|---------------------------|---------|---------|
| $J_2 (\times 10^6)$       | 3341.31 | 3408.65 |
| $J_4 (\times 10^6)$       | -30.66  | -30.97  |
| $J_6 (\times 10^6)$       | 0.4437  | 0.4329  |
| $\bar{J}_2 (\times 10^6)$ | 3511.01 | 3536.74 |
| $\bar{J}_4 (\times 10^6)$ | -33.85  | -33.34  |
| $\bar{J}_6 (\times 10^6)$ | 0.5148  | 0.4836  |

内部基準の表面に対する平均半径  $s$  を用いて  $s/R$  で定義され, 正規化された平均密度  $\eta(\beta)$  は  $\rho(s)/\rho_0$ , 正規化された圧力  $\xi(\beta)$  は  $p(s)/p_0$  である. 天王星と海王星の平均半径はそれぞれ 25388.2 km, 24659.0 km であるとわかっている.

与えられた微小パラメータ値  $m$  と密度分布  $\eta(\beta)$  について, 等内部ポテンシャルの水準面と水準面での調和係数は以下の体積  $\tau$  で実行される積分方程式に対する  $m$  の級数近似で算出できる (Zharkov & Trubitsyn 1978).

$$Ma^n J_n = - \int_{\tau} \rho(r) r^n P_n(\cos \theta) d\tau, \quad (2)$$

我々は内部の密度分布を惑星中心での密度の微分係数が 0 になるように 1 次の項を除いた 6 次多項式で表現した. 内部構造モデルを満たすそのデータは重力係数の  $J_2, J_4$  と計測された惑星の質量と平均半径から成る. 我々は  $\eta(\beta)$  をまず置き, 内部の水準面を算出し,  $\beta = 1$  における水準面での重力係数  $J_2, J_4, J_6$  を求める. 計算によって求められた係数と計測された値の違いは密度関数の修正に用いられ, その過程は結果が一致するまで繰り返される. 内部多項式のよりよい一致を大気に当てはめるために, Lodders & Fegley (1998) の表 10.2, 11.2 の大気モデルを使い, 多項式係数 (詳細は Helled et al. 2009a 参照) に対する最小 2 乗の正規方程式を得る. 一度観測された重力係数と合う密度分布見つかり, 内部の圧力は静水圧平衡方程式と質量の連続の式の積分から得られる.

我々は 3 次水準面の理論を用いて想定されている密度分布  $\eta(\beta)$  に対する重力係数  $J_2, J_4, J_6$  を求める. 我々は重力係数と大気データに最もよく合うものが得られるまで, 多項式係数を逐次計算する. 大気との適合と, 重力係数との適合はトレードオフの関係にあるため, 計測された重力係数との適合は完璧ではない. モデルの結果は表 2 に載せてある. その 2 つのデータがそれぞれの標準誤差の範囲内で満たされるという事実は内部の密度分布に信頼性をもたらす.

図 2 は内部構造モデルから得られた半径方向の密度分布を天王星 (灰色の曲線), 海王星 (黒色の曲線) について表している. 先行研究のモデルと同じく海王星の密度は天王星のものよりも高いということが判明した. このより高い密度は海王星のより強い圧密 (より高い質量) によるもので組成の違いによるものではない

ということが示唆される (Hubbard et al. 1991; Marley et al. 1995; Podolak et al. 1995). 図3は天王星と海王星の半径方向の圧力分布を示している. 灰色の線と黒色の線はそれぞれ天王星, 海王星のものである. 図4は天王星と海王星の圧力-密度関係を示す以前の図の結果に今回の結果を結合したものである. 圧力-密度データは経験的 EOS とみなすことができ, この2つの惑星の経験的 EOS は似ている.

以下では我々は得られた圧力-密度データを用いて水素, ヘリウム, 岩石 ( $\text{SiO}_2$ ), 氷 ( $\text{H}_2\text{O}$ ) に対する物理状態方程式を使った惑星の組成構造として考えられるものの調査をする.

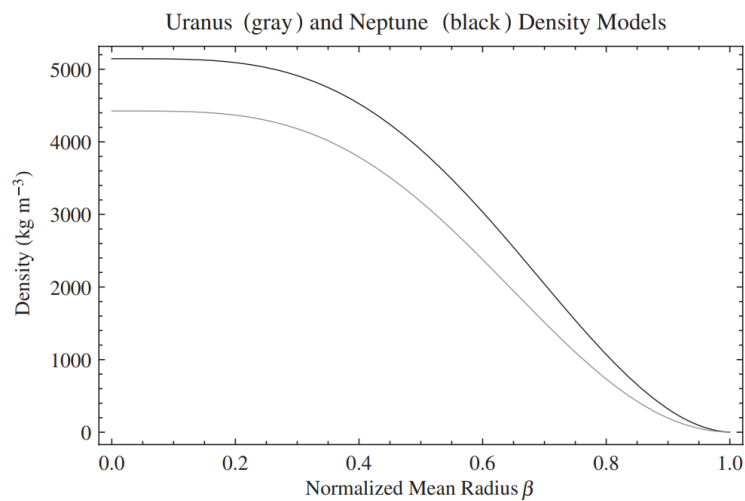


図2: 規格化された半径についての関数としての天王星と海王星の密度分布.

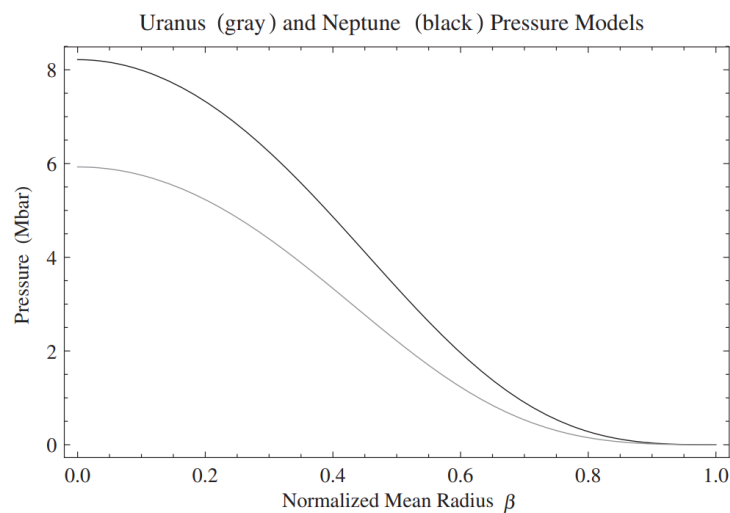


図3: 規格化された半径についての関数としての天王星と海王星の圧力分布.

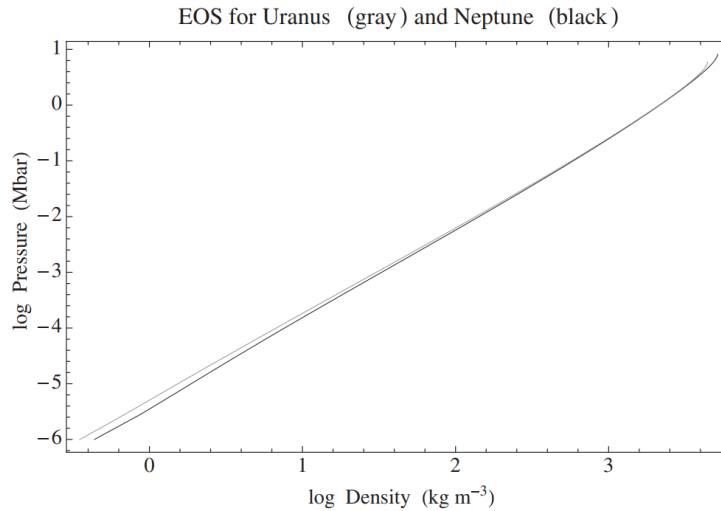


図 4: 天王星と海王星の経験的  $\rho(p)$  関係.

### 3. 組成と構造

このセクションでは我々は経験的  $\rho - p$  関係を組成解釈に用いる. 天王星と海王星は氷惑星として知られているものの, これらが確実に大部分が氷で構成されているという直接的な証拠は無い. 我々は 2 つの異なる組成の可能性を検討する. 1 つ目は水素とヘリウムの混合物 (太陽と同じ比) と岩石 ( $\text{SiO}_2$  で代表される) の混合物であり, 2 つ目は太陽組成の水素, ヘリウムと氷 ( $\text{H}_2\text{O}$ ) の混合物である. 実際は岩石と氷は共存しそうであるが, 両方の物質を考えるとモデルにおける自由変数をさらにもう 1 つ増やしてしまう. 簡単のため, そして自由変数の数を最小化するために我々はこの 2 つの場合を分ける. 水素とヘリウムについて, 我々は SCVHEOS を用いる (Saumon et al. 1995). この EOS は自由エネルギー最小化に基づいており, 天体物理学の適用<sup>41</sup> に現在最もよく使われている. 内部構造モデルにおける重元素を記述するために, 我々は D. Young (Young & Corey 1995; More et al. 1988) が親切なことに提供してくれた表を元にした二酸化ケイ素 ( $\text{SiO}_2$ ) と水 ( $\text{H}_2\text{O}$ ) の状態方程式を用いる. 混合物の密度は” additive-volume rule” に基づき計算され (Saumon et al. 1995),

$$\frac{1}{\rho(P, T)} = \frac{X}{\rho_{\text{H}}} + \frac{Y}{\rho_{\text{He}}} + \frac{Z}{\rho_{\text{Z}}}, \quad (3)$$

$X$  は水素の質量分率,  $Y$  は  $Y=1-X-Z$  で定義されるヘリウムの質量分率,  $Z$  は高  $Z$  物質の質量分率,  $\rho_i$  はそれぞれの成分の密度である. この混合物のエントロピーは

$$S(P, T) = XS_{\text{H}}(P, T) + YS_{\text{He}}(P, T) + ZS_{\text{Z}}(P, T) + S_{\text{mix}}(P, T) \quad (4)$$

<sup>41</sup> 任意に与えられた独立変数に対応する関数の値を決定する過程

で与えられ,  $S_H, S_{He}, S_Z$  はそれぞれ水素, ヘリウム二酸化ケイ素のエントロピーである.  $S_{mix}$  は  $S_{mix} = k_B (N \ln N - \sum N_i \ln N_i)$ , で与えられる混合物のエントロピーで  $N$  は全粒子数 (自由電子を含む),  $N_i$  は成分  $i$  の全粒子数 (原子核と電子の数),  $k_B$  はボルツマン定数である. 我々のモデルで混合物を計算するとき, それぞれ個別の物質の EOS を使い, その後 additive-volume rule を用いてそれらを結合し総密度とエネルギーを方程式 (4) のエントロピーを使い計算する.

### 3.1 天王星

1 bar 気圧にて, 我々の天王星モデルは  $3.5 \times 10^{-4} \text{ gcm}^{-3}$  の密度を持つ. これらの条件下で 75 K の温度の理想気体の平均分子質量は 2.2 で, これは太陽での水素とヘリウムの混合物に非常に近い値となる. 我々はこれを出発点とした. 温度は惑星の中心に向かって増加しなくてはならない. デバイ模型での断熱過程では温度と密度は

$$T = C\rho^\gamma, \quad (5)$$

の関係にあり,  $C$  と  $\gamma$  は組成に依存する (他の要素もある中で) 定数である. 天王星の温度勾配は断熱的である必要は無いと先ほど記述したが, それでも内部の熱状態の単純かつ代表的な表式として方程式 (5) を用いる.

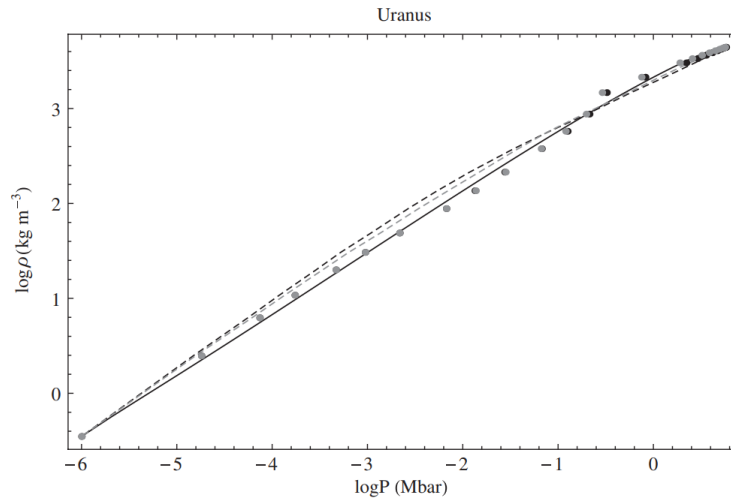


図 5: 天王星モデルについての圧力-密度関係. 黒い曲線は重力データに合う多項式である. 黒と灰色の破線状の曲線はそれぞれ文章中で記述された高 Z 物質として  $\text{SiO}_2$  と  $\text{H}_2\text{O}$  を取った組成モデルである (case I). 黒と灰色の点は case II についてのものでそれぞれ岩石と氷についてのものである.

天王星モデルにおける中心圧力は 5.93 Mbar であり, この時中心温度が  $10^4 \text{ K}$  より著しく高くない限り, ( $\text{SiO}_2$  の) 密度が  $7 \text{ gcm}^{-3}$  に非常に近くなる. モデルの密度は  $4.42 \text{ gcm}^{-3}$  であるため惑星の中心は純粋な  $\text{SiO}_2$  ではないが, より軽い物

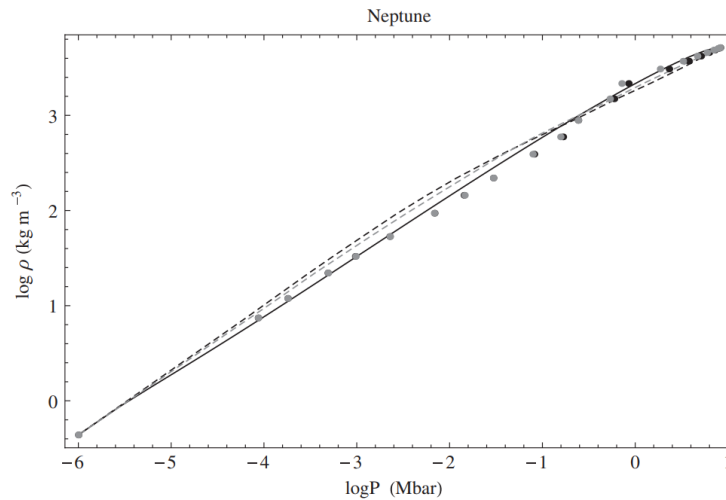


図 6: 海王星モデルについての圧力-密度関係. 黒い曲線は重力データに合う多項式である. 黒と灰色の破線状の曲線はそれぞれ文章中で記述された高 Z 物質として  $\text{SiO}_2$  と  $\text{H}_2\text{O}$  を取った組成モデルである (case I). 黒と灰色の点は case II についてのものでそれぞれ岩石と氷についてのものである.

質の混合物を含んでいなければならない. 中心密度と圧力は  $T = 10^4 \text{ K}$  での  $\text{H}$ ,  $\text{He}$ ,  $\text{SiO}_2$  とフィットさせることができ, この時  $\text{H}$  と  $\text{He}$  は太陽組成と同じ比率 ( $X=0.112$ ,  $Y=0.038$ ) で  $\text{SiO}_2$  は  $Z=0.85$  の質量分率を持つ. 方程式 (5) を用いた温度を推定するより念入りの計算からもまた  $Z=0.85$  が得られる. もちろん, どちらのコアも確かに岩石と氷の混合物である可能性はより高いが, Podolak et al. (1991, 表 1) が示したように水素, ヘリウム, 岩石の混合物は氷の圧力-密度関係と似た振る舞いをする.

表層付近での圧力-密度関係は太陽組成の水素, ヘリウム混合物によく一致するので我々は組成モデルを考え,  $\text{SiO}_2$  の質量分率  $Z$  を表面付近の 0 から中心に向かって増やした. この増加関数的な形の手本が無いため, 我々は  $\log \rho$  に対して  $Z$  の線形的な増加を仮定する. 具体的には  $\log \rho = -0.455$  の時に  $Z = 0$  から  $\log \rho = 3.646$  の時に  $Z=0.85$  とした. 温度を推定するために我々は方程式 (5) を高圧下での漸近値である  $\gamma = 0.5$  をあてはめて使用する. より低圧下では  $\gamma$  はより高くなるはずである. 結果として, 我々の手順は惑星の低圧領域での温度を過小評価しているが, 提案した組成モデルは意味のあるものか手応えを得ることができる. 我々はこれを case I モデルと呼ぶ.

我々は上述した計算を高  $Z$  値を代表する物質の  $\text{H}_2\text{O}$  について繰り返した. 図 5 は全ての重力的データと合う (黒い曲線) 6 次多項式と上述した岩石 (黒い破線状の曲線) と氷 (灰色の破線状の曲線) の組成モデルを比較して示している. 図から読み取れるように, 水素とヘリウムと氷との混合物を表した曲線がわずかに経験的  $\rho - p$  関係の曲線により近いが, 計算された EOS 曲線の振る舞いはかなり互いに似通っている. 含まれる近似の粗さを考慮すると, 非常によく合っている.

中間部の圧力における密度が高すぎることは驚くべきことではない。これはその領域での温度推定を過小評価が原因で最も起こりうることである。確かに温度勾配と組成勾配の詳細をより良く合うように調整することは可能である。いずれにせよ、断熱的溫度勾配が成り立ち、中心に向かって Z 値が連続的に増加する天王星モデルによって観測されたパラメータを合わせることができるといことがわかる。

我々は次に異なる組成配置の可能性について調査した。我々は3層モデルを考え、一番外側の層は一定の Z を持ちそれは表面での値に等しい。最も内側の層は一定の Z を持ちそれは中心での値に等しく、真ん中の層は  $\log \rho$  に対して表面の値から中心の値まで線形的に変化する Z を持つ。遷移領域の始まりと終わりは経験的に決められた EOS によく合うものをもとに決められる。我々はこのモデルを case II と呼ぶ。このモデルは意外にも経験的曲線によく合い、黒(岩石)、灰色(氷)の点で表されている。驚くべきことに遷移領域は約 1500 K で始まり、この温度領域ではちょうどケイ酸塩が蒸発し始めるのである。天王星の全体的な組成は基本的に case I でも case II でも同じである。

### 3.2 海王星

最もよく合う多項式は海王星の密度を 1 bar で  $4.38 \times 10^{-4} \text{ gcm}^{-3}$  と与える。この圧力と 75 K での理想気体では、平均分子量は 2.7 である。これは太陽での水素とヘリウムの混合物に適した値である 2.3 よりも相当高い。この温度での  $\text{SiO}_2$  の蒸気圧はかなり低いだが、この比較の目的として、我々は  $\text{SiO}_2$  の蒸気が追加の分子量をもたらしていると仮定する。この時、1 気圧レベルでの質量分率は  $Z=0.0073$  にならなくてはならない。再び、方程式 (5) で温度が与えられると仮定すると、中心温度が  $8.1 \times 10^3 \text{ K}$  になる。多項式が合うように決定づけられたこの温度と、8.22 Mbar の中心圧力における中心密度  $5.15 \text{ gcm}^{-3}$  は  $Z=0.82$  と合う。これは天王星にて決定された値と非常に似ている。

Z が前述 (case I) のように  $\log \rho$  に対して線形的に増加すると仮定すれば、図 6 にて破線で与えられる圧力-密度関係が得られる。これは海王星の観測されたパラメータに対する多項式フィットにより決定された圧力-密度関係 (図 6 の実線) に非常に近い。海王星の case II モデルは似たような結果を与える。このモデルではやや低い約 1400 K の温度で遷移領域が始まる。

天王星と海王星両方について、多項式の適合と提案された組成モデルは同じ様に異なる。case I について天王星と海王星の両方とも中間の圧力で高すぎる密度を持っており、これは仮定した温度が低すぎるか、Z が高すぎることを示している。中心付近では、密度が両方の惑星についてやや低過ぎる。この領域では、圧力の温度依存性は小さいため、線形よりやや速い Z の増加が示されていると考えて良さそうである。どの case においても、基本的に同じ組成のモデルが天王星と海王星両方をうまく説明する。case II について、両方の惑星は全体として同じ構造

を示す。遷移領域は両方の惑星について約 1500 K で始まる。この 2 惑星間の大きな違いは海王星は太陽組成ではない外層が求められる一方で、天王星は太陽組成の外層が最もよく合うことである。似たような結果が Podolak et al. (1995) によって発見されたが、どれくらいこの違いが内部構造と温度分布の仮定の詳細によるものなのか明確ではない。我々は性質的に似ている結果を観測された重力場との多項式フィットから単純に発見した。最後に我々は  $\text{H}_2\text{O}$  と  $\text{SiO}_2$  の両方が同じようによく多項式フィットに合うことを注意しておく。

このモデルフィットは各成分 (質量比) の相対存在量得るために用いることができる。case I の場合,  $\text{SiO}_2$  を用いると、天王星の内部は 18.1% が水素, 6.2% がヘリウム, 75.7% が岩石で構成されることがわかる。海王星の組成は 18.1% が水素, 6.2% がヘリウム, 75.8% が岩石であるということがわかる。 $\text{H}_2\text{O}$  を用いると、天王星の内部はそれぞれ 8.48%, 2.88% の水素とヘリウム, 88.6% の氷から構成されることが判明した。海王星の組成は 8.0% の水素, 2.7% のヘリウム, 89.3% の氷から成ることがわかる。case II の場合, 天王星は 16.4% の水素, 5.56% ヘリウム, 78.1% が岩石から成る。 $\text{H}_2\text{O}$  を用いると、天王星の内部はそれぞれ 6.41%, 2.18% の水素とヘリウム, 91.4% の氷から成る。海王星の組成は 17.5% の水素, 6.94% のヘリウム, 76.6% の岩石から成る。水を高 Z 物質を表すために用いると、海王星の内部はそれぞれ 7.19%, 2.44% の水素とヘリウム, 90.4% の氷から成る。この結果は表 3 に要約されている。これらの惑星の組成は似通っていること、そして予測されているように軽い物質 ( $\text{H}_2\text{O}$ ) を重元素を表すために用いると、高 Z 物質の質量分率が増加することは明らかである。

上に列挙された組成は実際の天王星と海王星のものを表すものになっているわけではなく、我々の単純な多項式フィットの解釈の下で得られる組成である。加えて、我々が最初に述べたようにこれらの惑星は氷と岩石の両方の混合物から構成されているように思える。明らかにより詳細な理論モデルが必要である。

表 3: 得られた天王星と海王星の惑星組成 (質量分率)。メモ。2 つの異なる縦列は重元素 ( $\text{SiO}_2$  と  $\text{H}_2\text{O}$ ) を代表する物質に対応している。水素とヘリウム比 ( $X/Y$ ) は原始太陽の値に設定されている。case I は表面から惑星中心までの Z の線形増加で推定されるモデルに対応する。case II は一定組成の中心領域 (コア), 大気と Z が中心に向かって増加する (文章の詳細を参照) 中間の「遷移領域」の 3 層内部構造に対応する。数の丸めにより質量比の総和は 1 にならない。

|                  | $\text{SiO}_2$                     | $\text{H}_2\text{O}$                |
|------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| Case I: Uranus   | $X = 0.181; Y = 0.0616; Z = 0.757$ | $X = 0.0848; Y = 0.0288; Z = 0.886$ |
| Case I: Neptune  | $X = 0.181; Y = 0.0615; Z = 0.758$ | $X = 0.0795; Y = 0.027; Z = 0.893$  |
| Case II: Uranus  | $X = 0.164; Y = 0.0556; Z = 0.781$ | $X = 0.0641; Y = 0.0218; Z = 0.914$ |
| Case II: Neptune | $X = 0.175; Y = 0.0694; Z = 0.766$ | $X = 0.0719; Y = 0.0244; Z = 0.904$ |



## 4. 議論と結論

我々は天王星と海王星の現象論的な圧力-密度データを示した。これらのモデルは天王星と海王星両方の重力場 ( $J_2, J_4$ ) が連続的な半径方向の密度分布 (密度ジャンプが無い) によって再現されることを示している。加えて、これらの惑星の内部構造は似通っていると判明した。組成構造の観点から経験的 EOS を解釈するために水素とヘリウムそして高  $Z$  物質の EOS を用いた。我々の分析は天王星と海王星は似通った組成、構造を持ち得ることを示している。両方の惑星についての経験的 EOS は水素とヘリウムが太陽組成比を保ちつつ、より重い物質が中心に向かってゆるやかに増加することを仮定することでフィットできることを明らかにした。case I の場合、 $\text{SiO}_2$  (岩石) を内部での高  $Z$  物質を代表するために用いると、重元素の質量は天王星と海王星ではそれぞれ 10.9, 12.9 地球質量 ( $M_\oplus$ ) である。天王星と海王星両方の最も内側の領域は純粋な岩石の経験的 EOS にフィットできないが、質量にして約 82% の岩石と残りが太陽組成比の水素とヘリウムの混合物になっている場合はフィットできる。

岩石に比べて水の密度が小さいため、 $\text{H}_2\text{O}$  が高  $Z$  物質を代表するために用いると重元素質量はより高くなるとわかる。天王星と海王星について重元素はそれぞれ  $\sim 12.8, \sim 15.2$  地球質量 ( $M_\oplus$ ) である。水が用いられている場合でさえ、惑星の中心は高  $Z$  物質に加えてガスを含むと判明している、ただし惑星中心の  $Z$  の質量分率は両惑星において 90% 以上である。この結果もまた、天王星と海王星の内部で高  $Z$  物質の濃度が中心に向かって徐々に増加し得ることを示唆している。似たような状況が巨大ガス惑星の木星と土星でも起こる可能性があり、我々は巨大惑星の内部をモデリングする際に、重元素のゆるやかな増加を考慮するべきだと考える。case II の場合、天王星と海王星の  $\text{SiO}_2$  の含有量はそれぞれ 11.3 と 13.1 地球質量 ( $M_\oplus$ ) である一方で  $\text{H}_2\text{O}$  の含有量は 13.2 と 15.4 地球質量 ( $M_\oplus$ ) である。

天王星と海王星の内部構造はほとんどわかっておらず、内部は「伝統的な 3 層」モデルとはかなり異なるかもしれない。3 層モデルは太陽系外の天王星、海王星の惑星の内部構造モデルによく用いられるが、本当の天王星と海王星の内部構造は 3 層モデル構造とはかなり違う可能性がある。我々はそれゆえ太陽系外惑星の内部をモデリングする際により柔軟性がある内部構造を考慮するべきだと考える。

(引用文献は省略)

## 参考文献

- Allison, M., Beebe, R. F., Conrath, B. J., Hinson, D. P., & Ingersoll, A. P. (1991). Uranus atmospheric dynamics and circulation. Uranus, University of Arizona Press, J. Bergstralh and E. Miner, 253-295.
- Altwegg, K., Balsiger, H., Bar-Nun, A., Berthelier, J. J., Bieler, A., Bochsler, P., Briois, C., Calmonte, U., Combi, M., De Keyser, J., Eberhardt, P., Fiethe,

- B., Fuselier, S., Gasc, S., Gombosi, T. I., Hansen, K. C., Hässig, M., Jäckel, A., Kopp, E., Korth, A., LeRoy, L., Mall, U., Marty, B., Mousis, O., Neefs, E., Owen, T., Rème, H., Rubin, M., Sémon, T., Tzou, C.-Y., Waite, H., & Wurz, P. (2015). 67P/Churyumov-Gerasimenko, a Jupiter family comet with a high D/H ratio. *Science*, 347, 1261952.
- Anderson, J. D., & Schubert, G. (2007). Saturn's gravitational field, internal rotation, and interior structure. *Science*, 317, 1384-1387.
  - Cameron, A. G. (1973). Abundances of the elements in the solar system. *Space Science Reviews*, 15, 121-146.
  - Fischer, D.A., Howard, A.W., Laughlin, G. P., Macintosh, B., Mahadevan, S., Sahlmann, J., & Yee, J. C. (2014). Exoplanet detection techniques. in "Protostars and Planets VI", Eds.: Beuther, H., Klessen, R. S., Dullemond, C. P. & Henning, T., University of Arizona Press, p.715-737.
  - Hubbard, W. B., Nellis, W. J., Mitchell, A. C., Holmes, N. C., Limaye, S. S., & McCandless, P. C. (1991). Interior structure of Neptune: comparison with Uranus. *Science*, 253, 648-651.
  - Helled, R., Anderson, J. D., Podolak, M., & Schubert, G. (2010). Interior models of Uranus and Neptune. *The Astrophysical Journal*, 726, 15, (7pp).
  - Helled, R., Schubert, G., & Anderson, J. D. (2009). Empirical models of pressure and density in Saturn's interior: Implications for the helium concentration, its depth dependence, and Saturn's precession rate. *Icarus*, 199, 368-377.
  - Jacobson, R. A. (2003). JUP230 orbit solution. NASA Tech. Memorandum.
  - Jacobson, R. A., Antreasian, P. G., Bordi, J. J., Criddle, K. E., Ionasescu, R., Jones, J. B., Mackenzie, R. A., Meek, M. C., Parcher, D., Pelletier, F. J., Owen, W. M., Jr, Roth, D. C., Roundhill, I. M., & Stauch, J. R. (2006). The gravity field of the saturnian system from satellite observations and spacecraft tracking data. *The Astronomical Journal*, 132, 2520-2526.
  - Lindal, G. F. (1992). The atmosphere of Neptune-an analysis of radio occultation data acquired with Voyager 2. *The Astronomical Journal*, 103, 967-982.
  - Lodders, K., & Fegley, B., Jr. (1998), *The Planetary Scientists Companion* (Oxford: Oxford Univ. Press)
  - Marley, M. S., GÃşmez, P., & Podolak, M. (1995). Monte Carlo interior models for Uranus and Neptune. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 100, 23349-23353.
  - More, R. M., Warren, K. H., Young, D. A., & Zimmerman, G. B. (1988).

- A new quotidian equation of state (QEOS) for hot dense matter. *The Physics of fluids*, 31, 3059-3078.
- Pearl, J. C., Conrath, B. J., Hanel, R. A., Pirraglia, J. A., & Coustenis, A. (1990). The albedo, effective temperature, and energy balance of Uranus, as determined from Voyager IRIS data. *Icarus*, 84, 12-28.
  - Podolak, M., Weizman, A., & Marley, M. (1995). Comparative models of Uranus and Neptune. *Planetary and Space Science*, 43, 1517-1522.
  - Reinhardt, C., Chau, A., Stadel, J., & Helled, R. (2020). Bifurcation in the history of Uranus and Neptune: the role of giant impacts. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 492, 5336-5353.
  - Saumon, D., Chabrier, G., & van Horn, H. M. (1995). An equation of state for low-mass stars and giant planets. *The astrophysical Journal supplement series*, 99, 713-741.
  - Tyler, G. L., Sweetnam, D. N., Anderson, J. D., Borutzki, S. E., Campbell, J. K., Eshleman, V. R., Gresh, D. L., Gurrola, E. M., Hinson, D. P., Kawashima, N., Kursinski, E. R., Levy, G. S., Lindal, G. F., Lyons, J. R., Marouf, E. A., Rosen, P. A., Simpson, R. A., & Wood, G. E. (1989). Voyager radio science observations of Neptune and Triton. *Science*, 246, 1466-1473.
  - Young, D. A., & Corey, E. M. (1995). A new global equation of state model for hot, dense matter. *Journal of applied physics*, 78, 3748-3755.