

惑星放射線帯からの
シンクロトロン放射

Synchrotron Radiation from
Planetary Radiation Belts

小松 研吾

Kengo Komatsu

北海道大学理学部 地球科学科
惑星物理学研究室

2003/01/31

要旨

地球を含め、磁場を持つ惑星には放射線帯が存在し、そこからシンクロトロン放射によって高エネルギーの電磁波が放射されている。

本論文では、シンクロトロン放射の性質について調べた。地球の放射線帯では1MeV以上、木星では数10MeVの電子が存在し、このような大きなエネルギーを持った電子は光速に近い速度を持っている(1MeVで光速の87%、20MeVで光速の99.9%)。シンクロトロン放射の強度角分布を計算すると、粒子の速度方向に鋭くビーム状になる。また、シンクロトロン放射の振動数は連続的な分布をしていて、強度が極大となるのは数MHzから数GHzという高い振動数成分である。

放射線帯ではその強い放射線のために、探査機による長時間の観測は難しい。放射線帯からのシンクロトロン放射を観測することで放射線帯の構造だけでなく時間変動を明らかにし、放射線帯粒子の生成、消滅、輸送の過程を解明することができる。これによって、惑星の内部磁気圏を理解することが可能となる。

また、探査機を送ることが難しい惑星の放射線帯についても地上で観測することが可能となる。

目次

1	序論	1
1.1	惑星の磁気圏	1
1.2	放射線帯	2
2	シンクロトロン放射	6
2.1	電磁波の放射	6
2.1.1	Maxwell 方程式	6
2.1.2	点電荷による電磁場	7
2.1.3	加速された点電荷からの電磁波	14
2.1.4	(2.49)、(2.50) 第 1 項について	16
2.1.5	進行方向に加速度を受ける点電荷からの放射	16
2.1.6	円軌道を描く点電荷からの放射	17
2.2	スペクトル分解	21
2.2.1	スペクトル分解	21
2.2.2	電磁場のスペクトル分解	22
2.2.3	放射強度のスペクトル分布	24
3	地球と木星の放射線帯粒子	25
4	まとめ	27
	謝辞	28
	参考文献	29

1 序論

1.1 惑星の磁気圏

磁気圏 (magnetosphere) とは太陽風 (solar wind) に取り囲まれた惑星磁場が支配する領域である。地球の磁気圏では、磁力線は磁力線凍結 (frozen-in) によってプラズマとともに運動する [Alfven,1950] ため、太陽風起源のプラズマと地球起源のプラズマは互いに混じりあうことがない。したがって、太陽風は地球磁気圏の周囲をすり抜けていく。太陽風と地球磁場の境界は磁気圏境界面 (magnetopause) と呼ばれ、地球の昼側では太陽風の動圧と地球磁場の圧力がつりあったところに存在し、その位置はおよそ $10R_E$ (R_E は地球半径) である [Ferraro,1960]。地球から夜側へは太陽風によって引き伸ばされた磁気圏が彗星の尾のように伸びている (磁気圏尾部 (magnetotail))。このように、密度の高い太陽風プラズマの流れの中に比較的密度が低く地球磁場に支えられた「空洞」が生じていて、これが磁気圏である。

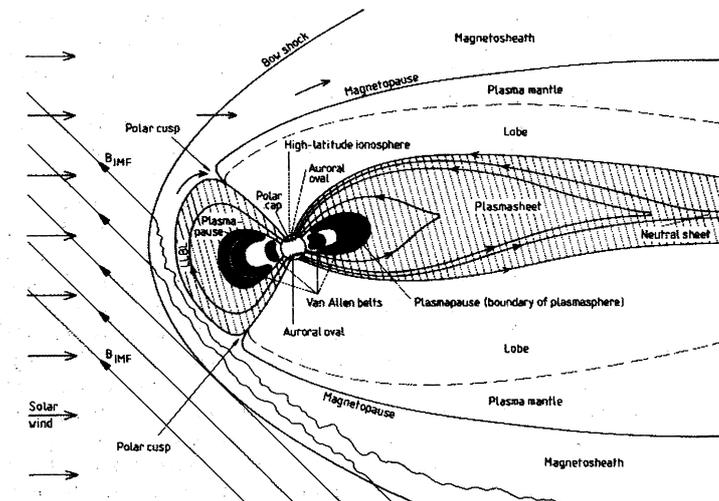


図 1.1: 地球磁気圏 [Haltqvist,1999]。

1972年と1973年に打ち上げられたパイオニア10号、11号や1977年に打ち上げられたボイジャー1号、2号によって惑星や惑星間空間に関する膨大な量の貴重なデータが得られ、それ以後、遠く離れた惑星の磁気圏についても急速に理解が深まってきた [中村,1997]。

固有磁場を持つ太陽系の惑星は水星、地球、木星、土星、天王星、海王星である。観測から磁場を持つ惑星の周りには磁気圏が形成されていることがわかっている [中村,1997]。

水星には地球の1%以下の弱い磁場があり、地球とよく似た形状の磁気圏をもっていることが知られている [恩藤,丸橋,2000]。

木星の固有磁場は非常に強力で、巨大な磁気圏を有している。木星磁気圏内には活発な火山活動を行っている衛星イオがあり、これがプラズマ源となっていて、

磁気圏内にプラズマが満ちている。このプラズマは木星の自転とともに回転している。そのため、磁気圏境界面は昼側では太陽風の動圧と磁場の圧力 + 磁気圏内のプラズマの圧力がつりあった位置に存在し、太陽風の強さによって大きく変化するが、およそ $45R_J$ から $100R_J$ (R_J は木星半径) の間に存在する [Rogers,1995]。

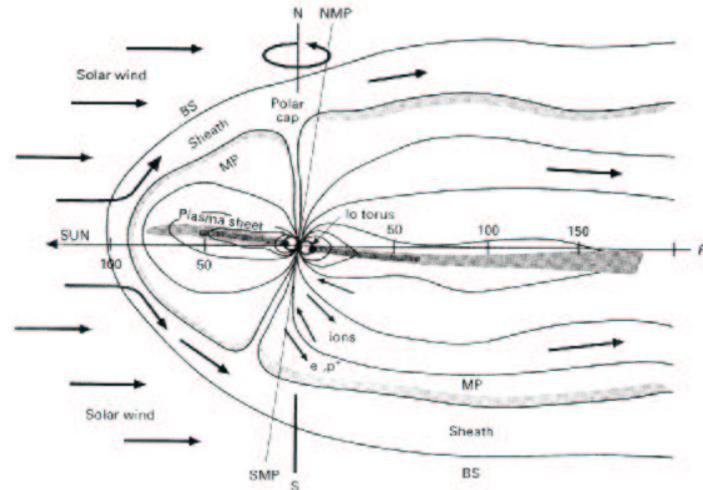


図 1.2: 木星磁気圏 [Rogers,1995]。

土星も比較的強い磁場をもった惑星である。ボイジャー 1 号と 2 号の観測によると 1 号では $22.5 \sim 24R_S$ 、2 号では $18.5R_S$ (R_S は土星半径) で磁気圏境界面を横切った。土星磁気圏における磁気圏境界面を決める条件は地球のように太陽風の動圧と惑星磁場の圧力だけで決まる場合もあれば、木星のように磁気圏内のプラズマの圧力を無視できない場合がある。ボイジャー 2 号が探査したときには土星が木星の磁気圏尾部に入っていて、磁気圏境界面を内側へ後退させ磁場の圧力と磁気圏内のプラズマの圧力で境界を支えていた可能性がある [中村,1997]。

天王星はその自転軸が大きく傾き、ほぼ公転面内にもっている。磁気軸はさらに自転軸から 60° 傾き、中心から $0.3R_U$ (R_U は天王星半径) ほどずれている。(図 1.3) そのため、太陽風と天王星の磁気圏の相互作用の様子は目まぐるしく変化すると考えられる。ボイジャー 2 号が天王星を通過したときには、 $18R_U$ (R_U は天王星半径) で磁気圏境界面を通過した [中村,1997]。

海王星も天王星と同様に磁気軸が自転軸から 47° と大きく傾いている。また、磁場は海王星の表面近くで生じていると考えられる [中村,1997]。(図 1.4)

1.2 放射線帯

放射線帯とは惑星の周囲を取り巻く、高エネルギー粒子が数多く集まった放射線帯が非常に強い領域である。地球を取り囲む放射線帯の発見は 1958 年以降 Van Allen らによる科学衛星での観測によってなされた [大林,1970]。また、パイオニア

惑星	B_S (T)	R_{PL} (km)	$R_{MP}(R_{PL})$
水星	2.6×10^{-7}	2440	1.5
地球	3.0×10^{-5}	6378	10
木星	9.6×10^{-4}	71400	55
土星	4.9×10^{-5}	60250	25
天王星	9.1×10^{-6}	25220	18
海王星	1.8×10^{-5}	24700	26

表 1: 各惑星の磁場の大きさ (B_S)、惑星半径 (R_{PL})、磁気圏境界面までの距離 (R_{MP}) [Möbius,1994]。

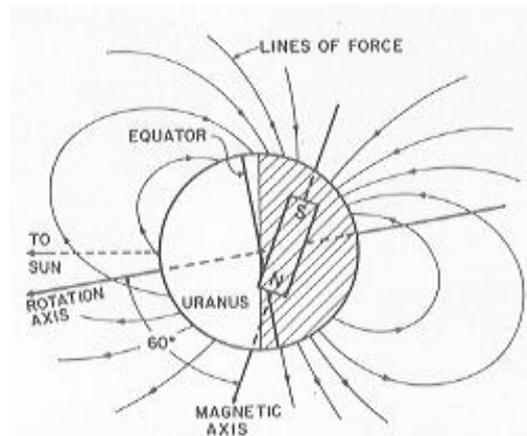


図 1.3: 天王星の磁場。自転軸が横倒しになっている上に磁気軸が自転軸から大きく傾いている [Ness et al,1991]。

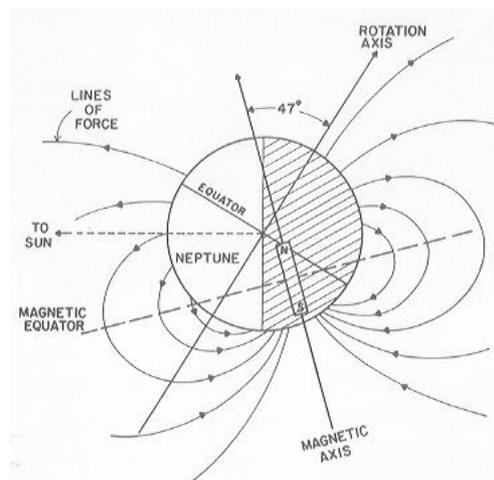


図 1.4: 海王星の磁場。海王星も天王星のように磁気軸が自転軸と大きくずれている [Ness et al,1995]。

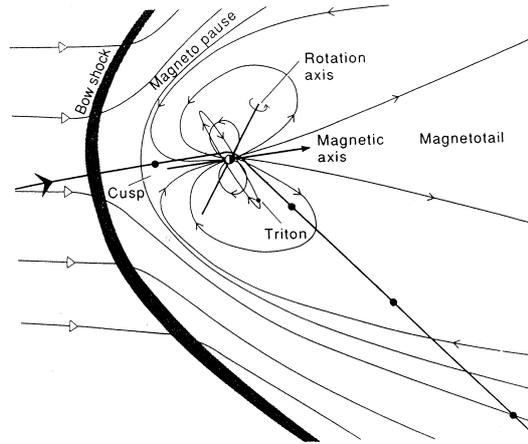


図 1.5: 海王星の磁気圏 [Schulz et al,1995]。

1号、3号、4号(1958年10月、12月、1959年3月)、スプートニク3号(1958年5月)などが打ち上げられてから放射線帯が50000 km以上の距離にわたって地球をとりまく巨大なドーナツ状のベルトであることがわかってきた[大林,1970]。地球の放射線帯は二重構造をしていて、地球に近い領域は内帯と呼ばれ、20 MeV以上の陽子が主成分である。一方、外帯は1 MeV以上の電子が主成分となっている。1 MeV以上の電子は内帯にも存在しているが、内帯と外帯の間には明確に密度の低いすき間がある(図1.6)。内帯では電子密度のピークは $1.5R_E$ 、外帯では $4R_E$ 付近にある。外帯電子は $10R_E$ 程度まで広がっている[恩藤,丸橋,2000]。

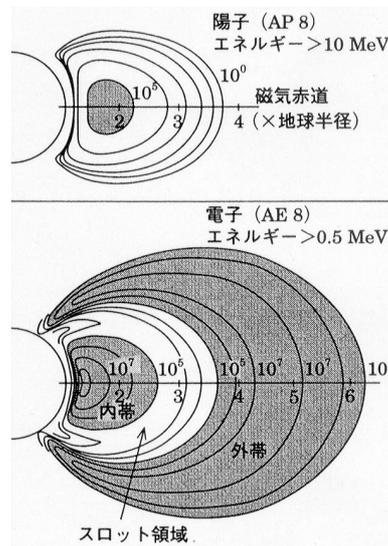


図 1.6: NASA のモデルによる、10 MeV 以上の放射線帯陽子分布および 0.5 MeV 以上の電子分布。磁気赤道上の数値は地球からの距離で、単位は地球半径。フラックスの単位は $[\text{個}/\text{cm}^2 \text{ s}^{-1}]$ [恩藤,丸橋,2000]。

磁気圏を持つ惑星には放射線帯も存在し、ボイジャーなどの探査機によっても確認されている。木星では 21 MeV 以上の電子と 30 MeV 以上のイオン (主に H、

O、S) の数密度のピークは $1.9R_J$ のあたりで、ちょうどダストリングの外側である。イオンのフラックスは 10^7 [個/ $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$] である [Rogers,1995]。

放射線帯は太陽活動の影響を受けてその大きさや粒子エネルギーが大きく変動する [恩藤, 丸橋,2000]。粒子の消滅、生成、輸送などの機構については放射線帯外部からの侵入や内部での生成などが考えられるが、あまりよくわかっていない。放射線帯粒子の外部からの流入や内部での加速と消滅および輸送の機構など統一的に理解することが課題となっている。

放射線帯を調べる際に様々な惑星について比較することは重要である。各惑星の環境の違いによって放射線帯の形状や物理的な機構にも違いがあるに違いない。その違いや共通点から各惑星の放射線帯の構造、内部磁気圏の構造、磁場構造について知ることができる。

磁場内に存在する荷電粒子は磁力線の周りを円運動する。これをサイクロトロン運動という。つまり、放射線帯粒子はサイクロトロン運動をしている。荷電粒子が加速度運動すると電磁波が生じ、粒子の速度が光速に近い場合には電磁波は速度方向に鋭くビーム状に放射される。これをシンクロトロン放射と呼ぶ。

探査機による放射線帯の長時間の直接観測は難しいが、地上からのシンクロトロン放射の観測からその場へ行くことなく、惑星周囲の磁場、粒子密度分布、粒子エネルギーなどを知ることができる。また、放射線帯の全体的構造を視覚的に得ることができる。

2 シンクロトロン放射

2.1 電磁波の放射

2.1.1 Maxwell 方程式

真空中の電磁場の基本方程式は

$$\text{rot}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0, \quad (2.1)$$

$$\text{div}\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$\text{rot}\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{i}_e(\mathbf{x}, t), \quad (2.3)$$

$$\text{div}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_e(\mathbf{x}, t) \quad (2.4)$$

これらの式を、Lorentz ゲージにおける電磁ポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ と $\phi(\mathbf{x}, t)$ を用いて整理すると

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \text{grad}\phi(\mathbf{x}, t), \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \quad (2.6)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = -\mu_0 \mathbf{i}_e(\mathbf{x}, t), \quad (2.7)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho_e(\mathbf{x}, t), \quad (2.8)$$

$$\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.9)$$

(2.7) と (2.8) を解くと

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t - t' \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rho_e(\mathbf{x}', t'), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t - t' \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{i}_e(\mathbf{x}', t') \quad (2.11)$$

を得る。ここで、複号のうち - のものは遅延ポテンシャル、+ のものは先進ポテンシャルという。遅延ポテンシャルの物理的意味は、 x' なる場所にあるアンテナが時刻 t' に発した電磁波を x なる点で受信するとき、その受信時刻が $t = t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}$ である、ということである。先進ポテンシャルは、 x' なる場所にあるアンテナに時刻 t' に強度 $i_e(\mathbf{x}', t')$ の電流を発生させるためには x なる点で t より前の時刻 $t = t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}$ に強度 $A(\mathbf{x}, t)$ の電磁波を発生させればよい、ということである。

また、これらは (2.9) の Lorentz の条件をみたす。

これより先の議論では遅延ポテンシャルを考えることとする。

2.1.2 点電荷による電磁場

いま、点電荷が与えられた軌道 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ を描いて運動しているものとする。このとき、点電荷の全電荷を e とすると、電荷密度と電流密度はそれぞれ

$$\rho_e(\mathbf{x}, t) = e\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)), \quad (2.12)$$

$$\mathbf{i}_e(\mathbf{x}, t) = e\dot{\mathbf{r}}(t)\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)) \quad (2.13)$$

で与えられる。これらを (2.10), (2.11) に代入すると

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')), \quad (2.14)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \int_V d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \dot{\mathbf{r}}(t') \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')) \quad (2.15)$$

を得る。スカラーポテンシャル (2.14) を空間積分すると

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} \quad (2.16)$$

と書ける。

t' に関する積分は $\mathbf{r}(t')$ の中の t' に注意する必要がある。

$$f(t') \equiv t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|}{c} \quad (2.17)$$

とおくと、(2.16) は

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t') \delta(t - f(t')) dt' \quad (2.18)$$

のような形になる。ここで、積分変数を書き換えるために

$$y = f(t') \quad (2.19)$$

とおく。また、これを t' について解くと

$$t' = h(y) \quad (2.20)$$

のように書くことができる。よって

$$dt' = \frac{dh(y)}{dy} dy \quad (2.21)$$

となるから (2.18) は

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(h(y)) \delta(t - y) \frac{dh(y)}{dy} dy = g(h(t)) \frac{dh(t)}{dt} \quad (2.22)$$

となる。いま特に (2.19) で $y = t$ としたときの t' の値を t'_0 と書くと

$$t = f(t'_0) = t'_0 + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)|}{c} \quad (2.23)$$

$$t'_0 = h(t) \quad (2.24)$$

であるので

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dt'_0} &= \frac{df(t'_0)}{dt'_0} \\ &= 1 - \frac{1}{c} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)|} \cdot \frac{d\mathbf{r}(t'_0)}{dt'_0} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\frac{dt'_0}{dt} = \frac{dh(t)}{dt} \quad (2.26)$$

したがって

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(t'_0) &\equiv \left[\frac{df(t'_0)}{dt'_0} \right]^{-1} = \frac{dh(t)}{dt} \\ &= \left[1 - \frac{1}{c} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)|} \cdot \frac{d\mathbf{r}(t'_0)}{dt'_0} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.27)$$

であるから (2.22) は

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t') \delta(t - f(t')) dt' = g(t'_0) \left[\frac{df(t'_0)}{dt'_0} \right]^{-1} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)|} \left[\frac{df(t'_0)}{dt'_0} \right]^{-1} \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)| - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}}(t'_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0))} \end{aligned} \quad (2.29)$$

となる。まったく同様にして、ベクトルポテンシャル (2.15) は

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{r}}(t'_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)| - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}}(t'_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0))} \quad (2.30)$$

となる。ただし、ここで t'_0 は

$$t = t'_0 + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)|}{c} \quad (2.31)$$

の解として与えられる電磁波の発信時刻である。¹

¹時刻 (時間) t, t', t'_0 についてまとめると

t : 観測点での任意の時刻

t' : 点電荷がある位置 $\mathbf{r}(t')$ にいるときの時刻

t'_0 : 点電荷が電磁波を発信した時刻 (\because (2.31))

時刻 $t = t'$ のとき点電荷は $\mathbf{r}(t')$ にいる。時刻 $t = t'_0$ に $\mathbf{r}(t'_0)$ を出発した電磁波は時刻 $t = t'_0 + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)|}{c}$ に観測点 \mathbf{x} に届く。

(2.29) と (2.30) が運動する点電荷によって生じる電磁ポテンシャルであり、これを Liénard-Wiechert のポテンシャルという。

これらを (2.5)、(2.6) に代入することで電場 $E(x, t)$ と磁場 $B(x, t)$ を得られる。しかし、 x に関する微分をとるとき、 t'_0 の中にある x についても微分しなければならず、計算が非常に面倒である。そこで、(2.14)、(2.15) に戻ってみるとこれらの式の中にある t' は独立変数であり、なまに現れている x についてのみ微分すればよいことがわかる。また、それはすべて $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ を通して行えばよい。したがって

$$\begin{aligned}\text{grad}_x &= (\text{grad}_x R) \frac{\partial}{\partial R} \\ &= \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{R} \frac{\partial}{\partial R} = \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial R}\end{aligned}\quad (2.32)$$

と書くことができる。ただし、

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}' \quad (2.33)$$

で、 \mathbf{x}' は空間の任意の場所を表す位置ベクトルである。よって、スカラーポテンシャル (2.14) は

$$\begin{aligned}\text{grad}_x \phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')) \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\delta\left(t - t' - \frac{R}{c}\right)}{R} \right) \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{n}(t') \frac{\partial}{\partial R(t')} \left(\frac{\delta\left(t - t' - \frac{R(t')}{c}\right)}{R(t')} \right) \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{n}(t') \left[-\frac{1}{R^2(t')} \delta\left(t - t' - \frac{R(t')}{c}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R(t')} \frac{\partial}{\partial R(t')} \delta\left(t - t' - \frac{R(t')}{c}\right) \right] \quad (2.34)\end{aligned}$$

となる。ただし

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(t') &= \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|}, & \mathbf{R}(t') &= \mathbf{x} - \mathbf{r}(t'), \\ & & R(t') &= |\mathbf{R}(t')|\end{aligned}$$

とおいた。 $\mathbf{r}(t')$ は任意の時刻 t' における点電荷の位置を示し、 $\mathbf{n}(t')$ はその位置から観測点 \mathbf{x} に向く単位ベクトルである。同様にして、ベクトルポテンシャル (2.15) の時間微分は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{\mu_0 e}{4\pi} \int_V d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\dot{\mathbf{r}}(t') \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial}{\partial t} \delta\left(t - t' - \frac{R}{c}\right) \\ &= \frac{\mu_0 e}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\dot{\mathbf{r}}(t')}{R(t')} \frac{\partial}{\partial t} \delta\left(t - t' - \frac{R(t')}{c}\right) \quad (2.35)\end{aligned}$$

となるが、ここで $t - t' - \frac{R(t')}{c} = X$ とおくと

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial R(t')}{\partial X} \frac{\partial}{\partial R(t')} = -c \frac{\partial}{\partial R(t')}$$

であるから、(2.35) は

$$= -\frac{\mu_0 e c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\dot{\mathbf{r}}(t')}{R(t')} \frac{\partial}{\partial R(t')} \delta \left(t - t' - \frac{R(t')}{c} \right) \quad (2.36)$$

となる。したがって、これらより電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \text{grad} \phi(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left[\frac{\mathbf{n}(t')}{R^2(t')} \delta \left(t - t' - \frac{R(t')}{c} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{n}(t') - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}}(t')}{R(t')} \frac{\partial}{\partial R(t')} \delta \left(t - t' - \frac{R(t')}{c} \right) \right] \quad (2.37) \end{aligned}$$

となる。残っている時間積分は (2.28) の規則によると積分後の値は被積分関数の時刻 t' を t'_0 に置き換え、 $\alpha^{-1}(t'_0)$ をかけたものとなる。よって、(2.37) の第 1 項は

$$\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n}(t'_0)}{R^2(t'_0)\alpha(t'_0)} \quad (2.38)$$

となる。第 2 項は (2.16) のときと同様にして、積分変数を $y = f(t') = t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|}{c}$ に変えると

$$\begin{aligned} &-\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\mathbf{n}(t') - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}}(t')}{R(t')} \frac{\partial}{\partial R(t')} \delta \left(t - t' - \frac{R(t')}{c} \right) \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{dh(y)}{dy} \frac{\mathbf{n}(t') - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}}(t')}{R(t')} \frac{\partial \delta(t - y)}{\partial y} \\ &\quad \left(\because \frac{\partial}{\partial R(t')} = \frac{\partial y}{\partial R(t')} \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{dh(y)}{dy} \frac{\mathbf{n}(t') - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}}(t')}{R(t')} \right) \delta(t - y) \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dh(t)}{dt} \frac{\mathbf{n}(t'_0) - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}}(t'_0)}{R(t'_0)} \right) \quad (2.39) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'_0}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'_0} = \frac{1}{\alpha(t'_0)} \frac{\partial}{\partial t'_0}$$

であるから、(2.39) は結局

$$= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\alpha(t'_0)} \frac{\partial}{\partial t'_0} \left(\frac{\mathbf{n}(t'_0) - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}}(t'_0)}{\alpha(t'_0) R(t'_0)} \right) \quad (2.40)$$

となる。したがって、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ は

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}(t'_0)}{R^2(t'_0)\alpha(t'_0)} + \frac{1}{c} \frac{1}{\alpha(t'_0)} \frac{\partial}{\partial t'_0} \left(\frac{\mathbf{n}(t'_0) - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}}(t'_0)}{\alpha(t'_0) R(t'_0)} \right) \right] \quad (2.41)$$

となる。

次に磁場を求める。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \text{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{\mu_0 e}{4\pi} \int_V d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')) (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}}(t')) \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\delta(t - t' - \frac{R}{c})}{R} \right) \\ &= \frac{\mu_0 e}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' (\mathbf{n}(t') \times \dot{\mathbf{r}}(t')) \frac{\partial}{\partial R(t')} \left(\frac{\delta(t - t' - \frac{R(t')}{c})}{R(t')} \right) \\ &= \frac{\mu_0 e}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' (\mathbf{n}(t') \times \dot{\mathbf{r}}(t')) \left(- \frac{\delta(t - t' - \frac{R(t')}{c})}{R^2(t')} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R(t')} \frac{\partial}{\partial R(t')} \delta(t - t' - \frac{R(t')}{c}) \right) \end{aligned}$$

ここで、時間微分は電場のと看とまったく同様にして行うことができ

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}(t'_0) \times \mathbf{n}(t'_0)}{R^2(t'_0)\alpha(t'_0)} + \frac{1}{c\alpha(t'_0)} \frac{\partial}{\partial t'_0} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}(t'_0) \times \mathbf{n}(t'_0)}{\alpha(t'_0) R(t'_0)} \right) \right] \quad (2.42)$$

電磁場 (2.41)、(2.42) の右辺に含まれている時間微分を実行しなくてはならない

が、 $\mathbf{n}(t')$ の時間微分だけ先にやっておく。

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{n}(t'_0)}{dt'_0} &= \frac{d}{dt'_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)}{R(t'_0)} \\
&= -\dot{\mathbf{r}}(t'_0) \frac{1}{R(t'_0)} + (\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)) \frac{d}{dR(t'_0)} \left(\frac{1}{R(t'_0)} \right) \frac{dR(t'_0)}{dt'_0} \\
&= -\frac{\dot{\mathbf{r}}(t'_0)}{R(t'_0)} + (\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)) \left(-\frac{1}{R^2(t'_0)} \right) \left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t'_0)}{R(t'_0)} \right) \\
&= \frac{1}{R(t'_0)} \left(-\dot{\mathbf{r}}(t'_0) + \mathbf{n}(t'_0) (\mathbf{n}(t'_0) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t'_0)) \right) \\
&= \frac{\mathbf{n}(t'_0) \times (\mathbf{n}(t'_0) \times \dot{\mathbf{r}}(t'_0))}{R(t'_0)} \tag{2.43}
\end{aligned}$$

これより電場 (2.41) は

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}(t'_0)}{\alpha(t'_0)R^2(t'_0)} + \frac{\mathbf{n}(t'_0) \times (\mathbf{n}(t'_0) \times \dot{\mathbf{r}}(t'_0))}{c\alpha^2(t'_0)R^2(t'_0)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathbf{n}(t'_0)}{c\alpha(t'_0)} \frac{\partial}{\partial t'_0} \left(\frac{1}{\alpha(t'_0)R(t'_0)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{c^2\alpha(t'_0)} \frac{\partial}{\partial t'_0} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}(t'_0)}{\alpha(t'_0)R(t'_0)} \right) \right] \tag{2.44}
\end{aligned}$$

ここで、右辺第 1 項と第 2 項をまとめると

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{n}\alpha}{R^2\alpha^2} + \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}})}{c\alpha^2 R^2} \\
&= \frac{\mathbf{n}}{\alpha^2 R^2} - \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{c\alpha^2 R^2} + \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}})}{c\alpha^2 R^2} \\
&\quad \left(\because \alpha = 1 - \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{r}} \right) \\
&= \frac{\mathbf{n}}{\alpha^2 R^2} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c\alpha^2 R^2}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}(t'_0)}{\alpha^2(t'_0)R^2(t'_0)} + \frac{\mathbf{n}(t'_0)}{c\alpha(t'_0)} \frac{\partial}{\partial t'_0} \left(\frac{1}{\alpha(t'_0)R(t'_0)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\dot{\mathbf{r}}(t'_0)}{c\alpha^2(t'_0)R^2(t'_0)} - \frac{1}{c^2\alpha(t'_0)} \frac{\partial}{\partial t'_0} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}(t'_0)}{\alpha(t'_0)R(t'_0)} \right) \right] \tag{2.45}
\end{aligned}$$

を得る。

磁場の場合も同様にして (2.42) より

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}(t'_0)}{\alpha^2(t'_0)R^2(t'_0)} + \frac{1}{c\alpha(t'_0)} \frac{\partial}{\partial t'_0} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}(t'_0)}{\alpha(t'_0)R(t'_0)} \right) \right] \times \mathbf{n}(t'_0) \tag{2.46}$$

を得る。これらと比較すると

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \mathbf{n}(t'_0) \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (2.47)$$

という関係があることがわかる。

(2.45) に残っている時間微分を実行する。そのために、次の微分を実行しておく。

$$\frac{d}{dt'_0} \dot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'_0}(\alpha R) &= \frac{d\alpha}{dt'_0} R + \alpha \frac{dR}{dt'_0} \\ &= \left\{ \frac{d}{dt'_0} \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{c} \right) \right\} R - \alpha (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \\ &= -\frac{1}{c} \left(\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}})}{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \right) R - \left(1 - \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{r}} \right) (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \\ &= -\frac{1}{c} \left(\frac{\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \right) R - \left(1 - \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{r}} \right) (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \\ &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}}^2 - (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \frac{R}{c} (\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (2.48)$$

これらの関係を使うと (2.45) は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\mathbf{n}(t'_0) - \boldsymbol{\beta}(t'_0))(1 - \beta^2(t'_0))}{\alpha^3(t'_0)R^2(t'_0)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{n}(t'_0) \times \{(\mathbf{n}(t'_0) - \boldsymbol{\beta}(t'_0)) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'_0)\}}{c\alpha^3(t'_0)R(t'_0)} \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

また (2.47) から

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{(\boldsymbol{\beta}(t'_0) \times \mathbf{n}(t'_0))(1 - \beta^2(t'_0))}{\alpha^3(t'_0)R^2(t'_0)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\boldsymbol{\beta}(t'_0) \times \mathbf{n}(t'_0))(\mathbf{n}(t'_0) \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'_0)) + \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'_0) \times \mathbf{n}(t'_0)(1 - \mathbf{n}(t'_0) \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'_0))}{c\alpha^3(t'_0)R(t'_0)} \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

これらが点電荷の運動によって真空中に生じる電磁場である。ただし、

$$\mathbf{n}(t'_0) = \frac{\mathbf{R}(t'_0)}{R(t'_0)} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)|}, \quad (2.51)$$

$$\boldsymbol{\beta}(t'_0) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t'_0)}{c}, \quad (2.52)$$

$$\alpha(t'_0) = 1 - \mathbf{n}(t'_0) \cdot \boldsymbol{\beta}(t'_0) \quad (2.53)$$

である。

これらの右辺第 1 項は粒子の速度 $\dot{\mathbf{r}}(t'_0)$ のみを含み加速度 $\ddot{\mathbf{r}}(t'_0)$ を含まない。また、距離とともに $R^{-2}(t'_0)$ の程度で小さくなるので、エネルギーの放射に関係しない。右辺第 2 項は粒子の加速度を含み、距離とともに $R^{-1}(t'_0)$ の程度で小さくなるので、この項が放射に関係する。(次項 (2.49),(2.50) 第 1 項について 参照)

2.1.3 加速された点電荷からの電磁波

点電荷が加速されることによって電磁波を放射する現象を 制動放射 という。電磁波の放射を考えると、前項 (2.49)、(2.50) の第 2 項だけを考えればよい。よって電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n}(t'_0) \times \{(\mathbf{n}(t'_0) - \boldsymbol{\beta}(t'_0)) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'_0)\}}{c\alpha^3(t'_0)R(t'_0)} \quad (2.54)$$

で与えられ、磁場は

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \mathbf{n}(t'_0) \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (2.55)$$

で与えられる。

これらを用いて Poynting ベクトルを求めると時刻 t'_0 に点電荷から放射された電磁波が時刻 t に観測点 \mathbf{x} で測定される、単位時間、単位面積あたりのエネルギー量が得られる。

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times (\mathbf{n}(t'_0) \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \{ \mathbf{n}(t'_0) (\mathbf{E}(\mathbf{x}, t))^2 - \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) (\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(t'_0)) \} \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} (\mathbf{E}(\mathbf{x}, t))^2 \mathbf{n}(t'_0) \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\mathbf{n}(t'_0)}{c^2 \alpha^6(t'_0) R^2(t'_0)} \left(\mathbf{n}(t'_0) \times \{(\mathbf{n}(t'_0) - \boldsymbol{\beta}(t'_0)) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'_0)\} \right)^2 \quad (2.58)$$

ここで、点電荷は運動しているから、点電荷が時刻 $t'_0 = T_1$ から時刻 $t'_0 = T_2$ までの時間 $(T_2 - T_1)$ に加速されたとすると、この時間に放射される電磁波は観測点 \mathbf{x} では (2.31) より、時刻 $t = T_1 + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(T_1)|}{c}$ から時刻 $t = T_2 + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(T_2)|}{c}$ までの間に観測される。つまり、観測点 \mathbf{x} で電磁波を受ける時間 $\left[\left(T_2 + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(T_2)|}{c} \right) - \left(T_1 + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(T_1)|}{c} \right) \right]$ は一般に点電荷の加速時間 $(T_2 - T_1)$ と異なっている。いま求めたいのは、電磁波の源である点電荷がどれだけの時間加速されたとき、どれだけの量のエネルギー

が放射されるかということであるから以下の計算で積分変数 t を t'_0 に変換することを考える。

点電荷が加速された時間 ($T_2 - T_1$) の間に放射した電磁波を \boldsymbol{x} で観測するとき、そこで受け取るエネルギー量 E は

$$E = \int_{t=T_1+\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(T_1)|}{c}}^{t=T_2+\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(T_2)|}{c}} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(t'_0) dt \quad (2.59)$$

で与えられる。

$$E = \int_{t'_0=T_1}^{t'_0=T_2} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(t'_0) \frac{dt}{dt'_0} dt'_0 \quad (2.60)$$

となる。これより、点電荷が単位時間加速されたときに放射するエネルギー量は

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt'_0} &= (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(t'_0)) \frac{dt}{dt'_0} \\ &= (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(t'_0)) \alpha(t'_0) \end{aligned} \quad (2.61)$$

となる。点電荷が単位時間加速されたときに放射する全エネルギー I は半径 $R(t'_0)$ の球面上で積分して

$$I = \int \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(t'_0) \alpha(t'_0) R^2(t'_0) d\Omega \quad (2.62)$$

であたえられる。ここで、 $d\Omega$ は \boldsymbol{x} 点の面積要素を点電荷からみた立体角である。この式に (2.58) を代入すると

$$I = \frac{1}{\mu_0 c^3} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int d\Omega \frac{[\boldsymbol{n}(t'_0) \times \{(\boldsymbol{n}(t'_0) - \boldsymbol{\beta}(t'_0)) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'_0)\}]^2}{(1 - \boldsymbol{n}(t'_0) \cdot \boldsymbol{\beta}(t'_0))^5} \quad (2.63)$$

が得られる。

単位立体角内へ点電荷が放射するエネルギー $\frac{dI}{d\Omega}$ は (2.62) より

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\Omega} &= \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(t'_0) \alpha(t'_0) R^2(t'_0) \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t))^2 \alpha(t'_0) R^2(t'_0) \\ &= \frac{c}{\mu_0} (\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t))^2 \alpha(t'_0) R^2(t'_0) \end{aligned} \quad (2.64)$$

2.1.4 (2.49)、(2.50) 第 1 項について

Poynting ベクトル (2.56) に 電場の式 (2.49) 第 1 項を代入すると

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\mu_0 c} (\mathbf{E}(\mathbf{x}, t))^2 \mathbf{n}(t'_0) \\
 &= \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \mathbf{n} \left[\frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2)}{\alpha^3 R^2} \right]^2 \\
 &= \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\mathbf{n}}{\alpha^6 R^4} (1 - \beta^2)^2 (1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2) \\
 &= \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\mathbf{n}}{\alpha^6 R^4} (1 - \beta^2)^2 \{ (1 + \beta^2) - 2\beta \cos \theta \} \quad (2.65)
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 θ は \mathbf{n} と $\boldsymbol{\beta}$ のなす角である。これを全エネルギーの式 (2.62) に代入すると

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 (1 - \beta^2)^2 \frac{2\pi}{R^2} \left\{ (1 + \beta^2) \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} d\theta \right. \\
 &\quad \left. - 2\beta \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} d\theta \right\} \\
 &= \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 (1 - \beta^2)^2 \frac{2\pi}{R^2} \left\{ \frac{1 + \beta^2}{\beta} \int_{1-\beta}^{1+\beta} \frac{d\xi}{\xi^5} - 2 \int_{1-\beta}^{1+\beta} \left(\frac{1 - \xi}{\beta} \right) \frac{d\xi}{\xi^5} \right\} \\
 &= \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 (1 - \beta^2)^2 \frac{2\pi}{R^2} \left\{ \frac{2(1 + \beta^2)^2}{(1 - \beta^2)^4} - \frac{2\beta^2(10 + 2\beta^2)}{3(1 - \beta^2)^4} \right\} \\
 &= \frac{e^2 c}{12\pi\epsilon} \frac{(\beta^2 - 2)(\beta^2 - 3)}{(1 - \beta^2)^2} \frac{1}{R^2} \quad (2.66)
 \end{aligned}$$

を得る。ここで ξ を

$$\xi = 1 - \beta \cos \theta, \quad \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{1}{\beta \sin \theta} \quad (2.67)$$

とおいた。よって、全放射エネルギーは距離とともに R^{-2} で減少する。一方、(2.62) は距離によらない。したがって、電磁波の放射を考えるときには、(2.49)、(2.50) の第 2 項だけを考えればよいことがわかる。

2.1.5 進行方向に加速度を受ける点電荷からの放射

$\boldsymbol{\beta}$ と $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ が平行であるとき

$$\mathbf{n} \times \{ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \} = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \quad (2.68)$$

となるので、(2.63) より、放射波の角分布は

$$\begin{aligned}\frac{dI}{d\Omega} &= \frac{1}{\mu_0 c^3} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{[\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \\ &= \frac{e^2 \dot{v}^2(t'_0)}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}\end{aligned}\quad (2.69)$$

となる。ここで θ は \mathbf{n} と $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ のなす角である。これより、 $\beta = v/c \rightarrow 0$ つまり、点電荷の速度が光速に近づくにつれて、角分布が点電荷の進行方向に鋭く傾いてくることがわかる。(図 2.7)

2.1.6 円軌道を描く点電荷からの放射

点電荷が円軌道を描き、その速度 $\boldsymbol{\beta}$ が加速度 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ と直交しているときを考える。いま、点電荷は $x-z$ 平面内を円運動しているとする。ある時刻 t'_0 における点電荷の速度方向を z 軸に選び、加速度方向を x 軸とする。このとき、点電荷から観測点 P に向く単位ベクトル \mathbf{n} の成分は $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ であり、速度は $\boldsymbol{\beta} = (0, 0, \beta)$ 、 $\boldsymbol{\beta}$ に直交する加速度 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ の大きさを α/c と書くと $\dot{\boldsymbol{\beta}} = (\alpha/c, 0, 0)$ と書ける。さらに、 $\mathbf{s} = \mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}$ とおくと (2.63) の右辺の分子は

$$\begin{aligned}[\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}]^2 &= [\mathbf{n} \times (\mathbf{s} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]^2 = [\mathbf{s}(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{s})]^2 \\ &= s^2(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 - 2(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{s} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}) + \dot{\boldsymbol{\beta}}^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{s})^2\end{aligned}\quad (2.70)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}s^2 &= \mathbf{n}^2 - 2\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^2 = 1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2, \\ (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) &= \beta \cos \theta, (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) = (\alpha/c) \sin \theta \cdot \cos \phi, (\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) = 1 - \beta \cos \theta, \\ (\mathbf{s} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) &= (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) = (\alpha/c) \sin \theta \cdot \cos \phi\end{aligned}$$

を代入すると

$$\begin{aligned}[\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}]^2 &= \frac{\alpha^2}{c^2} [(1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2) \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \phi \\ &\quad - 2 \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \phi (1 - \beta \cos \theta) + (1 - \beta \cos \theta)^2] \\ &= \frac{\alpha^2}{c^2} [(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \phi]\end{aligned}$$

となるので、放射波の角分布は

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{\mu_0 c^3} \cdot \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{(1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{(1 - \beta \cos \theta)^2} \right]\quad (2.71)$$

となり、 z 軸の方向、つまり点電荷の進行方向に鋭いピークを持つ (図 2.8)。(放射光) また、(2.71) を角積分すると

$$I = \frac{e^2 \alpha^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2} \quad (2.72)$$

を得る。

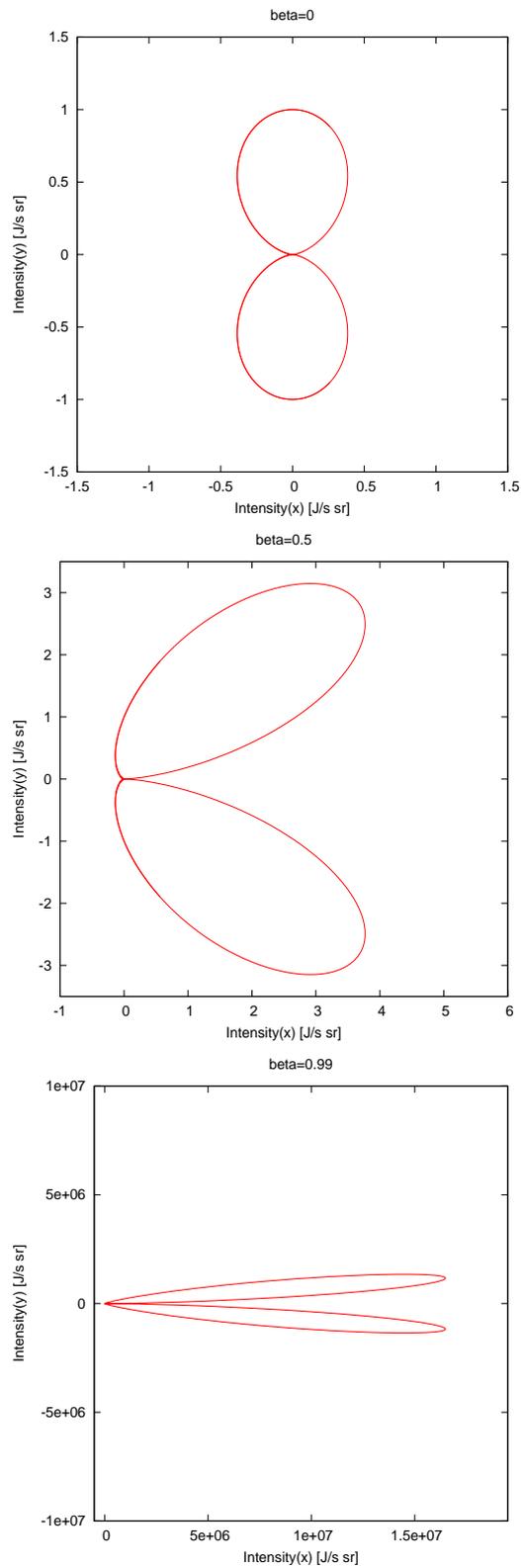


図 2.7: β と $\dot{\beta}$ が並行なときの放射強度の角分布 ((2.69) より。ただし係数は無視した)。上段は $\beta \simeq 0$ 、中段は $\beta = 0.5$ 、下段は $\beta = 0.99$ のときの分布。点電荷の速度が光速に近づくほど放射が進行方向へ傾くことがわかる。

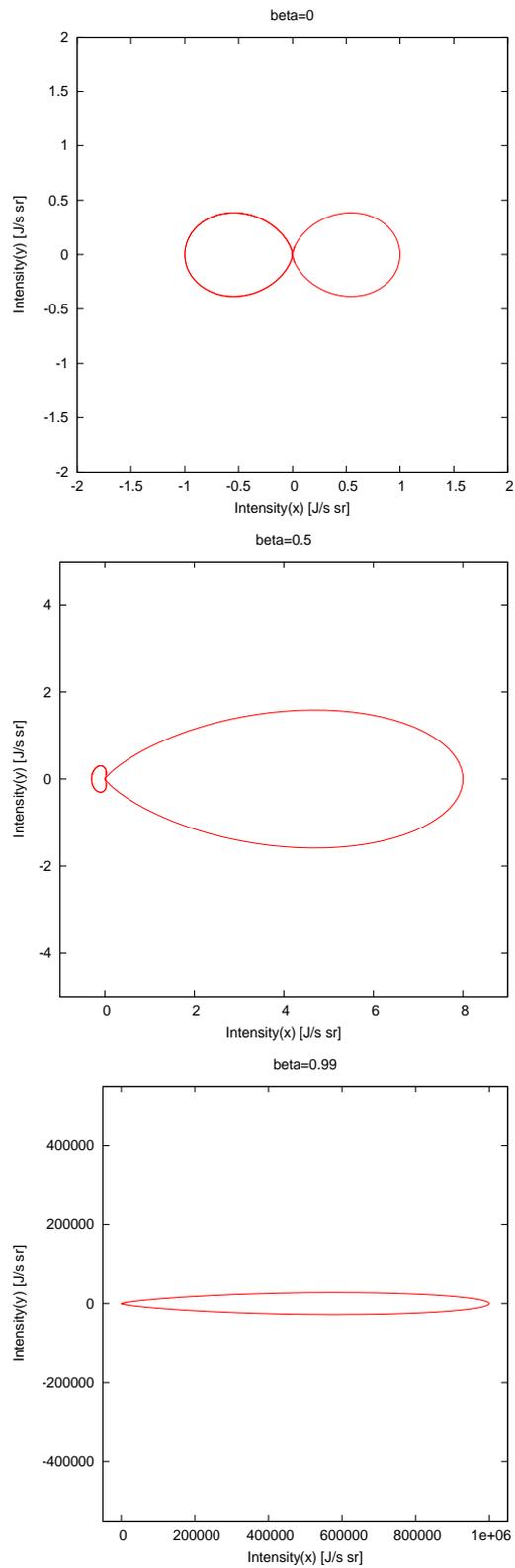


図 2.8: 点電荷が円運動するときの放射強度の角分布 ((2.71) より。ただし係数は無視した)。上段は $\beta \simeq 0$ 、中段は $\beta = 0.5$ 、下段は $\beta = 0.99$ のときの分布。点電荷の速度が光速に近づくと進行方向に鋭くビーム状に放射されることがわかる。

2.2 スペクトル分解

2.2.1 スペクトル分解

あらゆる波はスペクトル分解することができる。すなわち、さまざまな振動数の単色波の重ね合わせとして表すことができる。

いま、場を記述する量 f が T を電磁場の周期として基本振動数 $\omega_0 = 2\pi/T$ の n (整数) 倍で展開される場合を考える。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-in\omega_0 t} \quad (2.1)$$

f_n は

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega_0 t} dt \quad (2.2)$$

で求められる。関数 $f(t)$ が実であるから

$$f_{-n} = f_n^* \quad (2.3)$$

である。(2.1) を 2 乗し時間について平均すると、異なった振動数の項の積はゼロとなり、 $f_n f_{-n} = |f_n|^2$ の形の項だけが残る。よって、場の 2 乗平均 (波の平均強度) は

$$\bar{f}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \quad (2.4)$$

で表される。

次に、場が連続的な振動数で展開される場合を考える。このとき、関数 $f(t)$ は $t = \pm\infty$ でゼロになるような関数でなくてはならない。

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.5)$$

f_ω は

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.6)$$

で求められる。ここで、(2.3) と同様に

$$f_{-\omega} = f_\omega^* \quad (2.7)$$

である。

2.2.2 電磁場のスペクトル分解

運動する電荷によって作られる電磁場は単色波に展開することができる。電磁場を作る電荷の系の電荷密度 ρ_e や電流密度 i_e もまたスペクトル分解することができる。 ρ_e や i_e の各スペクトル成分が、場の対応する単色成分を作り出すもとになっている。電磁場のスペクトル成分を ρ_e と i_e のスペクトル成分で表すためにスカラーポテンシャル (2.10) において ϕ および ρ_e の代わりにそれぞれ $\phi_\omega e^{-i\omega t}$ および $\rho_\omega e^{-i\omega t'}$ を代入すると

$$\begin{aligned}\phi_\omega e^{-i\omega t} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rho_\omega e^{-i\omega t'} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho_\omega}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{-i\omega\left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)}\end{aligned}\quad (2.8)$$

となり、波数ベクトルの絶対値 $k = \omega/c$ を用いると

$$\phi_\omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho_\omega}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\quad (2.9)$$

を得る。同様にして、ベクトルポテンシャル (2.11) において A および i_e の代わりに $A_\omega e^{-i\omega t}$ および $i_\omega e^{-i\omega t'}$ を代入すると

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{i_\omega}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\quad (2.10)$$

を得る。電荷密度 ρ_ω のフーリエ成分は

$$\rho_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \rho_e e^{i\omega t'}\quad (2.11)$$

である。これを (2.9) に代入すると

$$\phi_\omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{i(\omega t' + k|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)} d^3x' dt'\quad (2.12)$$

ここで、点電荷の場合を考えると (2.12) より上式は

$$\phi_\omega = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} e^{i(\omega t' + k|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|)} dt'\quad (2.13)$$

となる。同様にして (2.10) は

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{\mathbf{r}}(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} e^{i(\omega t' + k|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|)} dt'\quad (2.14)$$

となる。

点電荷が周期的な運動 ($T = 2\pi/\omega_0$) をする場合には、場のスペクトル分解は $n\omega_0$ という形の振動数だけを含みスカラーポテンシャル、ベクトルポテンシャルの対応する成分は

$$\phi_n = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 T} \int_0^T \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} e^{in\omega_0(t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|}{c})} dt' \quad (2.15)$$

$$\mathbf{A}_n = \frac{\mu_0 e}{4\pi T} \int_0^T \frac{\dot{\mathbf{r}}(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} e^{in\omega_0(t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|}{c})} dt' \quad (2.16)$$

となる。

電荷から十分離れた場所では

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \simeq |\mathbf{x}| - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|} \quad (2.17)$$

であるから (2.10) は

$$\mathbf{A}_\omega \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \int_V \mathbf{i}_\omega e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} d^3x' \quad (2.18)$$

となる。電荷 i_ω のフーリエ成分は

$$\mathbf{i}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{i}_e e^{i\omega t'} \quad (2.19)$$

であり、点電荷の場合を考えると

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega t' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t'))} d\mathbf{r}(t') \quad (2.20)$$

$$= \frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \int e^{i(\omega t' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t'))} d\mathbf{r}(t') \quad (2.21)$$

となる。

点電荷が周期的な運動をする場合は

$$\mathbf{A}_n = \frac{\mu_0 e}{4\pi T} \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \oint e^{i(n\omega_0 t' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t'))} d\mathbf{r}(t') \quad (2.22)$$

となる。

ベクトルポテンシャルと電磁場の関係式を求めておく。(2.11) と (2.17) より

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{i}_e(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &\simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_V d^3x' \mathbf{i}_e \left(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}|}{c} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{c|\mathbf{x}|} \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる。よって (2.6) より

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{rot} \mathbf{A} \\ &\simeq -\frac{1}{c} \mathbf{n} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (2.24)$$

を得る。ただし、 $1/|\mathbf{x}|^2$ の項は $1/|\mathbf{x}|$ の項に比べて無視した。

また、(2.55) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{A}} \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) &= \mathbf{n} \times (\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}) \\ \mathbf{E} &= (\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.25)$$

を得る。

ここで、これら \mathbf{B} 、 \mathbf{E} 、 \mathbf{A} にそれぞれ $\mathbf{B}_\omega e^{-i\omega t}$ 、 $\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}$ 、 $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$ を代入し、 $e^{-i\omega t}$ で割ると

$$\mathbf{B}_\omega = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_\omega, \quad \mathbf{E}_\omega = \frac{ic^2}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{A}_\omega \times \mathbf{k}) \quad (2.26)$$

を得る。ここで、 $\mathbf{k} = kn$ である。

2.2.3 放射強度のスペクトル分布

電荷が周期運動を行うとき、放射場はフーリエ級数に展開することができる。(2.4) より、各振動数成分の強さは (2.64) の \mathbf{B} をフーリエ成分でおきかえ 2 倍することで得られる。よって、振動数 $\omega = n\omega_0$ を持つ単位立体角あたりの放射の強度 $\frac{dI_n}{d\Omega}$ は

$$\begin{aligned} \frac{dI_n}{d\Omega} &= \frac{2c}{\mu_0} |\mathbf{B}_n|^2 \alpha(t'_0) R^2(t'_0) \\ &= \frac{2c}{\mu_0} |\mathbf{A}_n \times \mathbf{k}|^2 \alpha(t'_0) R^2(t'_0) \end{aligned} \quad (2.27)$$

となる。正確な計算は難しいが (2.22) を代入することで単位立体角あたりの放射強度が得られる。また、これを角積分すれば全放射強度が得られる。

相対論的な極限 ($\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \gg 1$) での全放射強度は次の近似的な形を取る。

$$I_n = 0.52 \left(\frac{\mu_0 e^2}{4\pi} \right) \omega_0^2 n^{1/3}, \quad (1 \ll n \ll \gamma^3) \quad (2.28)$$

$$I_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu_0 e^2}{4\pi} \right) \omega_0^2 \left(\frac{n}{\gamma} \right)^{1/2} e^{(-2/3)(n/\gamma^3)}, \quad (n \gg \gamma^3) \quad (2.29)$$

すなわち、大きな n に対して、強度は指数関数的に減少する。十分大きな n に対する放射の振動数は隣り合う振動数の間隔 ω_0 に比べて非常に大きい。つまり、このスペクトルは非常に多くの近接した線からできていて、準連続的である。

3 地球と木星の放射線帯粒子

惑星放射線帯での粒子の実際の描像を得るために地球と木星の場合について具体的な数値を求めてみる。

まず、地球の場合について、1MeVの電子の密度がもっとも高い $2R_E$ の位置を考える。この位置での磁場の強さは $B_E = 3.8 \times 10^{-6}$ [T]である。相対論によるエネルギーの式から

$$T = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.1)$$

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{m_e c^2}{T}\right)^2} \quad (3.2)$$

であるから、 $\beta_E = 0.86$ となる。ただし、 m_e は電子の質量で $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ [kg]である。サイクロトロン振動数 ω_0 は

$$\omega_0 = \frac{eB}{m_e} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (3.3)$$

から、 $\omega_{0E} = 3.4 \times 10^5$ [Hz]となる。ただし、 e は電子の電荷量で $e = 1.6 \times 10^{-19}$ [C]である。また、円運動の回転半径(ラーマー半径) r_λ は

$$r_\lambda = \frac{v}{\omega_0} \quad (3.4)$$

より、 $r_{\lambda E} = 8.7 \times 10^2$ [m]となる。全放射強度は(2.72)より $I_E = 6.8 \times 10^{-25}$ [J/s]となる。

木星では、20MeVの電子の密度がもっとも高い $2R_J$ 位置を考える。この位置での磁場の強さは $B_J = 1.2 \times 10^{-4}$ [T]で、(3.2)より $\beta_J = 0.99968$ となる。サイクロトロン振動数は(3.3)より $\omega_{0J} = 5.3 \times 10^5$ [Hz]となる。また、ラーマー半径は(3.4)より $r_{\lambda J} = 5.7 \times 10^2$ [m]となる。全放射強度は $I_J = 3.6 \times 10^{-19}$ [J/s]となる。

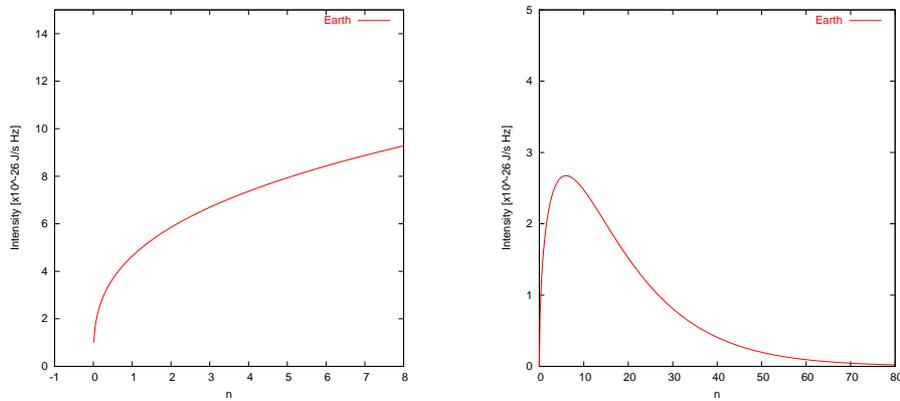


図 3.9: 1MeV の電子が $B_E = 3.8 \times 10^{-6}$ [T] 内で円運動するときの放射スペクトル。左は ($1 \ll n \ll \gamma^3 \sim 8$) のとき (2.29)。右は ($n \gg \gamma^3 \sim 8$) のとき (2.29)。しかし、この場合 $\gamma^3 \sim 8$ なので (2.29)、(2.29) の適用は不適切かもしれない。

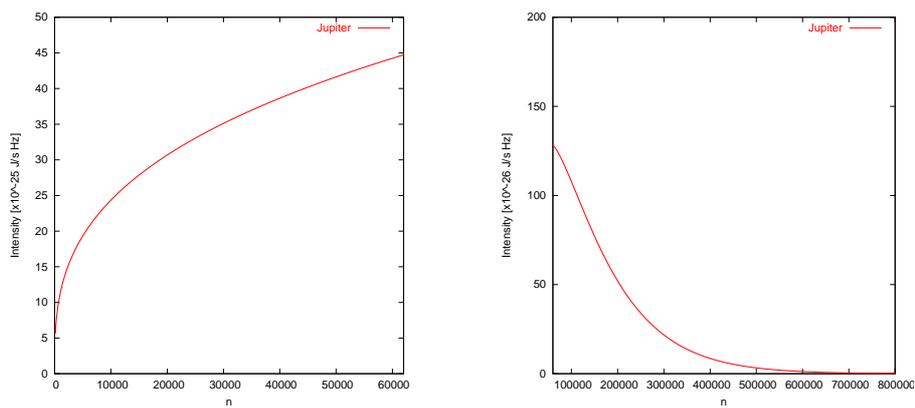


図 3.10: 20MeV の電子が $B_J = 1.2 \times 10^{-4}$ [T] 内で円運動するときの放射スペクトル。左は ($1 \ll n \ll \gamma^3 \sim 62000$) のとき (2.29)。右は ($n \gg \gamma^3 \sim 62000$) のとき (2.29)。

4 まとめ

本論文では各惑星磁気圏と放射線帯の概要と、放射線帯で生じるシンクロトロン放射の基本的な性質について調べた。

磁場を持った惑星はその磁場と太陽風との相互作用によって磁気圏を形成し惑星を包み込むような空洞をつくっている。内部磁気圏には高いエネルギーを持つ粒子が惑星の周りにドーナツ状に分布する放射線帯が存在する。これらは固有磁場の強さや自転軸と磁気軸のずれなど、各惑星の環境によってその形状や性質が大きく異なっている。

放射線帯粒子のように磁場内にある荷電粒子は磁力線の周りを円運動する。加速度運動する荷電粒子は電磁波を発生し、粒子の速度が光速に近づくとつれて電磁波の放射は速度方向へ傾いていき、光速に非常に近い速度で運動する場合にはほとんど進行方向の狭い領域にのみ放射される。放射の振動数は連続的な分布をしている。

地球と木星の放射線帯粒子の速度、振動数、放射強度を求めると(表2)のような結果が得られた。地球と木星の放射線帯粒子は非常に高速で運動し、特に木星では極めて光速に近い速度を持っていて地球に比べて強い放射をしている。

惑星	$E_e(\text{MeV})$	$B_{\text{PL}}(\text{T})$	β	$\omega_0(\text{Hz})$	$I(\text{J/s})$
地球	1	3.8×10^{-6}	0.86	3.4×10^5	6.8×10^{-25}
木星	20	1.2×10^{-4}	0.99968	5.7×10^5	3.6×10^{-19}

表 2: 地球と木星での種々の値 (惑星半径の 2 倍の位置)。 E_e は電子の持つエネルギー。 B はこの位置での磁場の大きさ。

謝辞

本論文の作成にあたり、北海道大学 渡部重十 教授には未熟な私に熱心に御指導いただきました。心から感謝致します。また、北海道大学 倉本圭 助教授には些細な質問にも丁寧に御指導いただきました。感謝申し上げます。

渡部研究室、林研究室の先輩方にも日頃から御助言、激励いただきました。特に奥朋之氏には細かな部分まで親身になって御指導、御助言いただきました。併せて感謝致します。

参考文献

- Baumjohann, W., Treumann, R. A., 1999: *BASIC SPACE PLASMA PHYSICS*. Imperial College Press, 329pp.
- Bergstrahl, J. T., 1991: *Uranus*. University of Arizona Press, 1076pp.
- Chen, F. F., 1977: プラズマ物理入門. 丸善, 299pp.
- Cruikshank, D. P., 1995: *Neptune and Triton*. University of Arizona Press, 1249pp.
- Dessler, A. J., 1983: *Physics of the Jovian Magnetosphere*. Cambridge University Press, 564pp.
- Hultqvist, B., 1999: *SPACE SCIENCE REVIEWS (chapter 1)*. Kluwer Academic Publishers, 482pp.
- Landau, L., Lifshitz, E., 1978: 場の古典論. 東京図書, 450pp.
- Möbius, E., 1994: Sources and Acceleration of Energetic Particles in Planetary Magnetospheres. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, **90**, 521-530.
- 松井 孝典 他, 1997: 岩波講座地球惑星科学 12 比較惑星学. 岩波書店, 478pp.
- 大林 辰蔵, 1970: 宇宙空間物理学. 裳華房, 484pp.
- 恩藤 忠典, 丸橋 克英, 2000: 宇宙環境科学. オーム社, 302pp.
- Panofsky, E., Phillips, M., 1968: 新版 電磁気学 (下). 吉岡書店, 551pp.
- Rogers, J. H., 1995: *The Giant Planet Jupiter*. Cambridge University Press, 418pp.
- 砂川 重信, 1999: 理論電磁気学 第3版. 紀伊國屋書店, 463pp.