

# 平均運動共鳴による小惑星の軌道進化

Orbital evolution of asteroids  
in mean motion resonance

岩堀 智子

Iwahori Tomoko

北海道大学 理学部 地球科学科  
惑星物理学研究室

平成 18 年 4 月 28 日

### 要旨

火星軌道(軌道長半径 1.5AU)と木星軌道(軌道長半径 5.2AU)の間には小惑星と呼ばれる天体が多数存在する。特に太陽から 2AU から 3.5AU の領域は小惑星数が多いため小惑星帯と呼ばれている。小惑星の軌道長半径分布には間隙や、小惑星群が存在する。これらの位置では平均運動が木星のものと簡単な整数比であることが知られている。このような平均運動比の関係が軌道進化にどう関係しているかを太陽、木星、小惑星の三体問題で考える。多くの場合、太陽による重力効果が支配的であり、木星の重力による効果を太陽、小惑星の二体問題からのずれ(摂動)として扱うことができる。三体問題は一般的には解けないことが知られているが、これを、解析的に解ける二体問題を基礎として扱うのである。本論文では、まず摂動関数を用いた三体問題の解析的な扱いについて述べ、次にその方法を用いて小惑星の軌道進化について考察する。

## 目次

<b>1. 序論</b>	<b>1</b>
1.1 平均運動共鳴	1
1.2 本論文の構成	1
<b>2. 小惑星の特徴</b>	<b>2</b>
<b>3. 三体問題</b>	<b>3</b>
3.1 制限三体問題	3
3.2 ラグランジュの惑星方程式	3
3.2.1 摂動関数	3
3.2.2 定数変化法の基本方程式	3
3.2.3 正準変数を用いたラグランジュ括弧式の評価	4
3.2.4 ラグランジュの惑星方程式	6
3.3 摂動関数の展開式	8
<b>4. 小惑星の軌道進化</b>	<b>9</b>
4.1 摂動関数展開式における長周期項	9
4.2 永年摂動による軌道進化	10
4.3 共鳴摂動による軌道進化	11
4.4 まとめ	12
<b>付録 A ラグランジュの括弧式</b>	<b>13</b>
A.1 ハミルトンの正準方程式	13
A.2 母関数による正準変換	13
A.3 ラグランジュの括弧式	14
<b>付録 B 摂動関数</b>	<b>17</b>
B.1 はじめに	17
B.2 摂動関数	17
B.3 ルジャンドル多項式を用いた展開	20
B.4 軌道要素での逐次展開	25
B.5 二次のオーダーまでの逐次展開	29
B.6 特定の偏角にともなう項	39
B.7 摂動関数の利用	42
B.8 ラグランジュの惑星方程式	45
B.9 摂動関数中の偏角の分類	46
B.9.1 永年項	48
B.9.2 共鳴項	51

---

B.9.3 短周期項と微少振幅項 . . . . .	54
<b>謝辞</b>	<b>56</b>
<b>参考文献</b>	<b>57</b>

## 1. 序論

### 1.1 平均運動共鳴

天体力学における共鳴とは、複数の運動の周期が簡単な整数比になることをいう。太陽系に目を向けると、多くの衛星の自転と公転の周期が一致していることや、複数の天体の平均運動 (平均公転角速度) が簡単な整数比で表されることが知られており、このような尽数関係にある場合には共鳴が天体の運動に大きな影響を与えることが考えられる。

ここでは天体の共鳴のうち、平均運動が簡単な整数比の場合に現れる平均運動共鳴を考える。太陽系には多くの尽数関係が存在するため、尽数関係にあると運動は安定するように思えるのだが、小惑星帯に着目すると、木星の平均運動と特定の尽数関係にある位置には小惑星が少ないという特徴があり、共鳴現象によってそのような軌道は不安定化したと考えられる。本論文では、平均運動共鳴がどのようなものなのかを、運動方程式から軌道要素の時間変化を惑星方程式で表し、考察する。また、天体としては軌道周期が木星と尽数関係にある小惑星を選ぶ。小惑星帯では次のような尽数関係が知られている。

- 3 : 1 間隙
- 2 : 1 間隙
- 3 : 2 ヒルダ群
- 4 : 3 チューレ群
- 1 : 1 トロヤ群

3 : 1, 2 : 1 などの共鳴軌道に見られる小惑星帯の間隙をカークウッドの間隙という。

### 1.2 本論文の構成

本論文では、小惑星の軌道進化を扱うため、2節でまず運動方程式から軌道要素の時間変化を表すラグランジュの惑星方程式を求め、3節では長周期の変動を扱う。付録Aではラグランジュの惑星方程式を求めるのに必要な解析力学の基礎をまとめ、付録Bには Murray and Dermott (1999) : *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press の6章 The Disturbing Function から、特に三体問題における摂動関数について述べた 6.1 - 6.9 の全訳を載せた。

## 2. 小惑星の特徴

小惑星とは、太陽のまわりを公転する小型の天体である。一番最初に発見された小惑星はセレスであり、1801年1月1日に発見された。セレスが惑星の軌道長半径を表すボーデの法則に従うため、この法則は広く支持されることになった。(なお、後に海王星などの発見によってこの法則は破綻した。) その後セレス以外にも火星軌道と木星軌道の間には多くの小惑星が存在することがわかり、前節で紹介したようなカークウッドの間隙や小惑星群の存在が明らかになった。

小惑星セレスと、木星、太陽の直径、平均密度は表 2-1 のとおりである。表 2-1 から、これまでに見つかっている小惑星のなかで最大のセレスでさえも太陽・木星に及ばず重力は非常に小さく、無視できるものとしてよい。

小惑星は太陽の回りを公転しているため、その運動は主に太陽によって支配されているといえる。しかし、木星の重力も無視できない。そこで、二体問題からのずれとして木星からの重力効果を扱う。このずれを摂動という。

表 2-1: 理科年表 平成 16 年より。(木星と太陽の直径は、赤道半径を二倍したものである)

	軌道長半径 (AU)	直径 (km)	平均密度 ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )	質量 (kg)
セレス	2.77	910	2.3	$9.07 \times 10^{20}$
木星	5.20	142984	1.33	$1.90 \times 10^{27}$
太陽	-	1392000	1.41	$1.99 \times 10^{30}$

### 3. 三体問題

#### 3.1 制限三体問題

二体問題は解析的に解くことができるが、三体問題は一般的には解けないことが知られている。そこで、問題に制限を加えて扱いやすくする。ここでは、小惑星、木星、太陽の三体のうち小惑星の質量が他の二体にくらべて非常に小さく、木星と太陽はケプラー運動しているものみなして小惑星の運動を考える。このような問題を制限三体問題という。

#### 3.2 ラグランジュの惑星方程式

##### 3.2.1 摂動関数

小惑星、太陽、木星の質量をそれぞれ  $m$ ,  $m_c$ ,  $m'$ 、太陽に対する小惑星、木星の相対位置ベクトルを  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$  とおく。小惑星の運動方程式は次のようになる。

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mathcal{G}(m_c + m) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathcal{G}m' \left( \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \right). \quad (3.1)$$

よって、

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mathcal{G}(m_c + m) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla \mathcal{R}. \quad (3.2)$$

ポテンシャル  $\mathcal{R}$  を摂動関数といい、次のように書ける。

$$\mathcal{R} = \frac{\mu'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \mu' \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r'^3}. \quad (3.3)$$

ここで、

$$\mu' = \mathcal{G}m'. \quad (3.4)$$

##### 3.2.2 定数変化法の基本方程式

式 (3.2) より、運動方程式は

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mathcal{G}(m_c + m) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla \mathcal{R}. \quad (3.5)$$

$x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ,  $u_1 = dx/dt$ ,  $u_2 = dy/dt$ ,  $u_3 = dz/dt$  とおいて 2 階連立方程式を 1 階連立方程式に書き換える。

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i, \quad \frac{du_i}{dt} = -\frac{\mathcal{G}(m_c + m)}{r^3} x_i + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i} \quad (3.6)$$

$\partial\mathcal{R}/\partial x_i = 0$  のとき, 解は解析的に

$$x_i = f_i(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t), u_i = g_i(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t). \quad (3.7)$$

$c_j (j = 1, 2, \dots, 6)$  は積分定数である.  $f_i$  と  $g_i$  は摂動がないときの (3.6) の解であるから

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = g_i, \quad \frac{\partial g_i}{\partial t} = -\frac{\mathcal{G}(m_c + m)}{r^3} f_i. \quad (3.8)$$

摂動があるときには  $c_i$  を定数でなく時間の関数とみなす.

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial f_i}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = u_i = g_i, \quad (3.9)$$

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial g_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial g_i}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = -\frac{\mathcal{G}(m_c + m)}{r^3} f_i + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i}. \quad (3.10)$$

(3.9) と (3.10) に (3.8) を代入すると

$$\sum_{j=1}^6 \frac{\partial f_i}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = 0, \quad (3.11)$$

$$\sum_{j=1}^6 \frac{\partial g_i}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i}. \quad (3.12)$$

これらの方程式を  $dc_j/dt$  について解く. (3.11) の両辺に  $-\partial g_1/\partial c_1$ ,  $-\partial g_2/\partial c_1$ ,  $-\partial g_3/\partial c_1$  をかけ, (3.12) の両辺に  $\partial f_1/\partial c_1$ ,  $\partial f_2/\partial c_1$ ,  $\partial f_3/\partial c_1$  をかけて足し合わせる.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^6 [c_l, c_j] \frac{dc_j}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial c_1} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial c_1} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_3} \frac{\partial f_3}{\partial c_1} \\ &= \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial c_1} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial c_1} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial c_1} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial c_1}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

ここで

$$[c_l, c_j] = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial f_i}{\partial c_l} \frac{\partial g_i}{\partial c_j} - \frac{\partial g_i}{\partial c_l} \frac{\partial f_i}{\partial c_j} \right) = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial x_i}{\partial c_l} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial c_j} - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial c_l} \frac{\partial x_i}{\partial c_j} \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (x_i, \dot{x}_i)}{\partial (c_l, c_j)}. \quad (3.14)$$

### 3.2.3 正準変数を用いたラグランジュ括弧式の評価

方程式を軌道要素で表すことを考える. 主な軌道要素を図 3.1 に示した. 正準変

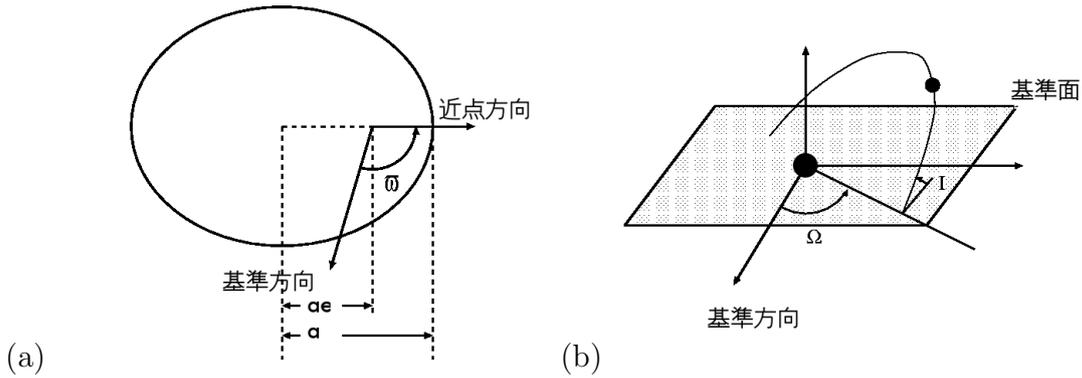


図 3.1: (a)  $a$ : 軌道長半径,  $e$ : 離心率,  $\varpi$ : 近点経度, (b)  $I$ : 軌道傾斜角,  $\Omega$ : 昇交点経度

数  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  の代わりに次の正準変数を用いる. 角度を表す変数として  $\sigma$ <sup>1)</sup>,  $\omega, \Omega$  を選ぶと, これに正準共役な運動量  $L, G, H$  は次のように  $a, e, I$  の関数として表現できる.

$$L = \sqrt{\mathcal{G}(m_c + m)a}, \tag{3.15}$$

$$G = \sqrt{\mathcal{G}(m_c + m)a(1 - e^2)}, \tag{3.16}$$

$$H = \sqrt{\mathcal{G}(m_c + m)a(1 - e^2)} \cos I. \tag{3.17}$$

この正準変数を用いるとラグランジュの括弧式は

$$[c_i, c_j] = \frac{\partial(\sigma, L)}{\partial(c_i, c_j)} + \frac{\partial(\omega, G)}{\partial(c_i, c_j)} + \frac{\partial(\Omega, H)}{\partial(c_i, c_j)}. \tag{3.18}$$

$L, G, H$  を  $a, e, I$  で偏微分する.

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \frac{1}{2}na, \quad \frac{\partial L}{\partial e} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial I} = 0, \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial G}{\partial a} = \frac{1}{2}na\eta, \quad \frac{\partial G}{\partial e} = -\frac{na^2e}{\eta}, \quad \frac{\partial G}{\partial I} = 0, \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial H}{\partial a} = \frac{1}{2}na\eta \cos I, \quad \frac{\partial H}{\partial e} = -\frac{na^2e \cos I}{\eta}, \quad \frac{\partial H}{\partial I} = -na^2\eta \sin I. \tag{3.21}$$

ここで  $\eta = \sqrt{1 - e^2}$  である. 軌道要素を  $c_j$  として  $a, e, I, \sigma, \omega, \Omega$  を選び, ラグランジュ括弧式 (3.18) を評価する.

$$[\sigma, a] = \frac{\partial(\sigma, L)}{\partial(\sigma, a)} + \frac{\partial(\omega, G)}{\partial(\sigma, a)} + \frac{\partial(\Omega, H)}{\partial(\sigma, a)} = \frac{\partial(\sigma, L)}{\partial(\sigma, a)} = \frac{\partial\sigma}{\partial\sigma} \frac{\partial L}{\partial a} = \frac{1}{2}na. \tag{3.22}$$

<sup>1)</sup> $\sigma = M - nt$ : 時刻 0 での近点離角

同様にして  $\sigma$  と他の要素とのラグランジュ括弧式はゼロとなる. ラグランジュ括弧式でゼロにならないものは

$$[\omega, a] = \frac{\partial(\omega, G)}{\partial(\omega, a)} = \frac{\partial G}{\partial a} = \frac{1}{2}na\eta, \quad (3.23)$$

$$[\omega, e] = \frac{\partial(\omega, G)}{\partial(\omega, a)} = \frac{\partial G}{\partial e} = -\frac{na^2e}{\eta}, \quad (3.24)$$

$$[\Omega, a] = \frac{\partial H}{\partial a} = \frac{1}{2}na\eta \cos I, \quad (3.25)$$

$$[\Omega, e] = \frac{\partial H}{\partial e} = -\frac{na^2e \cos I}{\eta}, \quad (3.26)$$

$$[\Omega, I] = \frac{\partial H}{\partial I} = -na^2\eta \sin I. \quad (3.27)$$

### 3.2.4 ラグランジュの惑星方程式

(3.13) より,

$$[\sigma, \sigma] \frac{d\sigma}{dt} + [\sigma, \omega] \frac{d\omega}{dt} + [\sigma, \Omega] \frac{d\Omega}{dt} + [\sigma, a] \frac{da}{dt} + [\sigma, e] \frac{de}{dt} + [\sigma, I] \frac{dI}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma}, \quad (3.28)$$

$$[\omega, \sigma] \frac{d\sigma}{dt} + [\omega, \omega] \frac{d\omega}{dt} + [\omega, \Omega] \frac{d\Omega}{dt} + [\omega, a] \frac{da}{dt} + [\omega, e] \frac{de}{dt} + [\omega, I] \frac{dI}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega}, \quad (3.29)$$

$$[\Omega, \sigma] \frac{d\sigma}{dt} + [\Omega, \omega] \frac{d\omega}{dt} + [\Omega, \Omega] \frac{d\Omega}{dt} + [\Omega, a] \frac{da}{dt} + [\Omega, e] \frac{de}{dt} + [\Omega, I] \frac{dI}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega}, \quad (3.30)$$

$$[a, \sigma] \frac{d\sigma}{dt} + [a, \omega] \frac{d\omega}{dt} + [a, \Omega] \frac{d\Omega}{dt} + [a, a] \frac{da}{dt} + [a, e] \frac{de}{dt} + [a, I] \frac{dI}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a}, \quad (3.31)$$

$$[e, \sigma] \frac{d\sigma}{dt} + [e, \omega] \frac{d\omega}{dt} + [e, \Omega] \frac{d\Omega}{dt} + [e, a] \frac{da}{dt} + [e, e] \frac{de}{dt} + [e, I] \frac{dI}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}, \quad (3.32)$$

$$[I, \sigma] \frac{d\sigma}{dt} + [I, \omega] \frac{d\omega}{dt} + [I, \Omega] \frac{d\Omega}{dt} + [I, a] \frac{da}{dt} + [I, e] \frac{de}{dt} + [I, I] \frac{dI}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}. \quad (3.33)$$

前節の結果より

$$\frac{1}{2}na \frac{da}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma}, \quad (3.34)$$

$$\frac{1}{2}na\eta \frac{da}{dt} - \frac{na^2e}{\eta} \frac{de}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega}, \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{2}na\eta \cos I \frac{da}{dt} - \frac{na^2e \cos I}{\eta} \frac{de}{dt} - na^2\eta \sin I \frac{dI}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega}, \quad (3.36)$$

$$-\frac{1}{2}na \frac{d\sigma}{dt} - \frac{1}{2}na\eta \frac{d\omega}{dt} - \frac{1}{2}na\eta \cos I \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a}, \quad (3.37)$$

$$\frac{na^2e}{\eta} \frac{d\omega}{dt} + \frac{na^2e \cos I}{\eta} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}, \quad (3.38)$$

$$na^2\eta \sin I \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}. \quad (3.39)$$

したがって運動方程式は

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma}, \quad (3.40)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\eta^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma} - \frac{\eta}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega}, \quad (3.41)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\cot I}{na^2\eta} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} - \frac{\eta}{na^2e \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega}, \quad (3.42)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{2}{na^2\eta} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \frac{\eta^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}, \quad (3.43)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\eta}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cot I}{na^2\eta} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}, \quad (3.44)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\eta \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}. \quad (3.45)$$

$\sigma, \omega$  の代わりに

$$\epsilon = \sigma + \omega + \Omega, \quad (3.46)$$

$$\varpi = \omega + \Omega \quad (3.47)$$

を変数に選ぶと

$$[\epsilon, a] = \frac{1}{2}na, \quad (3.48)$$

$$[\varpi, a] = \frac{1}{2}na(\eta - 1), \quad (3.49)$$

$$[\varpi, e] = -\frac{na^2e}{\eta}, \quad (3.50)$$

$$[\Omega, a] = \frac{1}{2}na\eta(\cos I - 1), \quad (3.51)$$

$$[\Omega, e] = \frac{na^2e(1 - \cos I)}{\eta}, \quad (3.52)$$

$$[\Omega, I] = -na^2\eta \sin I. \quad (3.53)$$

このとき惑星方程式は

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon}, \quad (3.54)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\eta}{na^2e}(1-\eta) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} - \frac{\eta}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi}, \quad (3.55)$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\tan I/2}{na^2\eta} \left( \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} \right) - \frac{1}{na^2\eta \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega}, \quad (3.56)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} + \frac{\eta(1-\eta)}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\tan I/2}{na^2\eta} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}, \quad (3.57)$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\eta}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\tan I/2}{na^2\eta} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}, \quad (3.58)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\eta \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}. \quad (3.59)$$

### 3.3 摂動関数の展開式

摂動関数を軌道要素でフーリエ級数展開すれば、前節で示したラグランジュの惑星方程式を利用することができる。ここでは展開方法については追及せず、展開式の特徴の列挙に留める。展開式は次のような形になる。

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \mu' \sum_{\mathbf{j}} S_{\mathbf{j}}(a, a', e, e', I, I') \\ &\quad \times \cos(j_1\lambda' + j_2\lambda + j_3\varpi' + j_4\varpi + j_5\Omega' + j_6\Omega). \end{aligned} \quad (3.60)$$

ここで、 $j_i (i = 1, \dots, 6)$  はいずれも整数であり、

$$\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6), \quad \sum_{i=1}^6 j_i = 0. \quad (3.61)$$

この展開式において、 $S_{\mathbf{j}}$  は摂動の「強さ」を表す関数である。また、余弦偏角に含まれる角変数は各項の周期を決めるものであり、展開式は様々な周期の重ね合わせとみなすことができる。

## 4. 小惑星の軌道進化

### 4.1 摂動関数展開式における長周期項

前章の最後に示した摂動関数展開式の各項の周期は、余弦偏角によって決まる。余弦偏角を  $\varphi$  とおくと、

$$\mathcal{R} = \mu' \sum_j S_j(a, a', e, e', I, I') \cos \varphi. \quad (4.1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \varphi &= j_1 \lambda' + j_2 \lambda + j_3 \varpi' + j_4 \varpi + j_5 \Omega' + j_6 \Omega \\ &\approx (j_1 n' + j_2 n)t + j_3 \varpi' + j_4 \varpi + j_5 \Omega' + j_6 \Omega + \text{constant}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

$S_j$  は  $a, a', e, e', I, I'$  の関数であり、摂動を受けると変化する。一方、 $\cos \varphi$  は一周期平均をとるとゼロになる。したがって、偏角が  $S_j$  の変化にくらべて短い周期をもてば、その項は平均してゼロとみなすことができる。このとき、残った長周期の項を用いて惑星方程式を解くことで、天体の軌道進化を考える。偏角の周期を考えるうえで、目安になるのは公転周期である。偏角に含まれる平均経度  $\lambda', \lambda$  は摂動がある場合にも変化の周期は軌道周期程度の長さである。一方、近点経度  $\varpi, \varpi'$  と昇交点経度  $\Omega, \Omega'$  は軌道の向きを表しており、摂動がない場合には一定であり、また、摂動を受ける場合にも変化の周期は公転周期にくらべて長い。

以上より、式(4.2)で表される偏角に、時間とともに変化する  $(j_1 n' + j_2 n)t$  が含まれるか否かで長周期かどうかを判断することができる。長周期に該当するのは、まず、 $j_1 = 0$  かつ  $j_2 = 0$  の場合であり、このとき、

$$\varphi = j_3 \varpi' + j_4 \varpi + j_5 \Omega' + j_6 \Omega. \quad (4.3)$$

このような偏角をともなう項を永年項という。また、(4.2)より、平均運動が

$$j_1 n' + j_2 n \approx 0 \quad (4.4)$$

をみたす場合も、軌道周期より長い周期を持つ。このような項を展開式中の共鳴項という。軌道長半径を用いて書くと、

$$a \approx (|j_1|/|j_2|)^{\frac{2}{3}} a'. \quad (4.5)$$

以下では、制限三体問題として小惑星の軌道進化を扱うため、太陽を原点、木星の軌道面を基準面、木星の近点方向を基準方向とする。このとき、

$$\begin{aligned} a' &= \text{Const}, \quad e' = \text{Const}, \quad I' = 0, \\ \varpi' &= 0, \quad \Omega' = \text{Const}. \end{aligned}$$

ここで、惑星方程式を次のように簡単化する。

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon}, \quad (4.6)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi}, \quad (4.7)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}, \quad (4.8)$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{1}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\tan \frac{1}{2} I}{na^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}. \quad (4.9)$$

$\mathcal{R}$  については、Murray & Dermott (1999) の二次の展開式を用いる。

## 4.2 永年摂動による軌道進化

永年項は、 $j_1 = j_2 = 0$  の項であるから、それ以外の項と高次の項を無視すると、

$$\langle \mathcal{R}_D \rangle = C_0 + C_1(e^2 + e'^2) + C_2 s^2 + C_3 e e' \cos(\varpi' - \varpi). \quad (4.10)$$

したがってラグランジュの方程式の低次の部分は、

$$\left( \frac{da}{dt} \right)_{\text{sec}} = 0, \quad (4.11)$$

$$\left( \frac{de}{dt} \right)_{\text{sec}} = n\alpha(m'/m_c) C_3 e' \sin(\varpi - \varpi'), \quad (4.12)$$

$$\left( \frac{d\varpi}{dt} \right)_{\text{sec}} = n\alpha(m'/m_c) [2C_1 + C_3(e'/e) \cos(\varpi - \varpi')], \quad (4.13)$$

$$\left( \frac{d\Omega}{dt} \right)_{\text{sec}} = n\alpha(m'/m_c) (C_2/2). \quad (4.14)$$

ここで、中心物体の質量を  $m_c$  とし、 $\mu' = \mathcal{G}m' \approx n^2 a^3 (m'/m_c)$  を使った。  $e \gg e'$  とすると、これらの方程式の近似解は次のようになる。

$$a = a_0, \quad (4.15)$$

$$e = e_0 - \frac{n\alpha}{\dot{\varpi}} (m'/m_c) C_3 e' [\cos \varpi_0 - \cos \varpi], \quad (4.16)$$

$$\varpi = \varpi_0 + n\alpha(m'/m_c) 2C_1 t, \quad (4.17)$$

$$\Omega = \Omega_0 + n\alpha(m'/m_c) (C_2/2) t. \quad (4.18)$$

下付き文字 0 は各量の初期 ( $t = 0$ ) 値を表しており,  $\varpi' = 0$  としている. この解は, 軌道長半径に永年変化がなく, 軌道の大きさが変わらないということを示している. また, 軌道の形を決める離心率は正弦関数的に変化する. 一方, 近点経度と昇交点経度が時間とともに線形的に変化しているが, これは軌道の向きが時間とともに経度方向に回転することを表している.

### 4.3 共鳴摂動による軌道進化

序論で述べたように, 小惑星帯には 2 : 1 の尽数関係にある位置には間隙がある. そこで, 尽数関係の例として  $2n' \approx n$  という関係が成り立つ場合を考える. 2 : 1 の共鳴の近傍では, 永年項に  $2\lambda' - \lambda$  を含む項を加える. 二次の展開式より, 平均摂動関数中で意味をもつ直接部は

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R} \rangle = & C_0 + C_1(e^2 + e'^2) + C_2(s^2 + s'^2) + C_3ee' \cos(\varpi - \varpi') \\ & + C_4e \cos(2\lambda' - \lambda - \varpi) + C_5e' \cos(2\lambda' - \lambda - \varpi'). \end{aligned} \quad (4.19)$$

ラグランジュの方程式の近似形を用いると 2 : 1 共鳴による  $a, e, \varpi, \Omega$  の変化は

$$\begin{aligned} \left( \frac{da}{dt} \right)_{\text{res}} = & 2n\alpha(m'/m_c)C_4e \sin(2\lambda' - \lambda - \varpi) \\ & + 2n\alpha(m'/m_c)(C_5 - 2\alpha)e' \sin(2\lambda' - \lambda - \varpi'), \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\left( \frac{de}{dt} \right)_{\text{res}} = n\alpha(m'/m_c)C_4 \sin(2\lambda' - \lambda - \varpi), \quad (4.21)$$

$$\left( \frac{d\varpi}{dt} \right)_{\text{res}} = n\alpha(m'/m_c)(C_4/e) \cos(2\lambda' - \lambda - \varpi), \quad (4.22)$$

$$\left( \frac{d\Omega}{dt} \right)_{\text{res}} = 0. \quad (4.23)$$

$\dot{a}, \dot{e}, \dot{\varpi}$  の方程式の右辺は余弦角変数のみ時間変化するとし,  $\varpi$  は永年での理論から決まる定数  $\varpi_0$  で時間とともに線形的に増加するものとする, 近似解は,

$$\begin{aligned} a = & a_0 - \frac{2n\alpha(m'/m_c)C_4e}{2n' - n - \dot{\varpi}} [\cos(2\lambda' - \lambda - \varpi) - \cos(\lambda_0 + \varpi_0)] \\ & - \frac{2n\alpha(m'/m_c)(C_5 - 2\alpha)e'}{2n' - n} [\cos(2\lambda' - \lambda - \varpi') - \cos \lambda_0], \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$e = e_0 + \frac{n\alpha(m'/m_c)C_4}{2n' - n - \dot{\varpi}} [\cos(2\lambda' - \lambda - \varpi) - \cos(\lambda_0 + \varpi_0)], \quad (4.25)$$

$$\varpi = \varpi_0 + \frac{n\alpha(m'/m_c)(C_4/e)}{2n' - n - \dot{\varpi}} [\sin(2\lambda' - \lambda - \varpi) + \sin(\lambda_0 + \varpi_0)], \quad (4.26)$$

$$\Omega = \Omega_0. \quad (4.27)$$

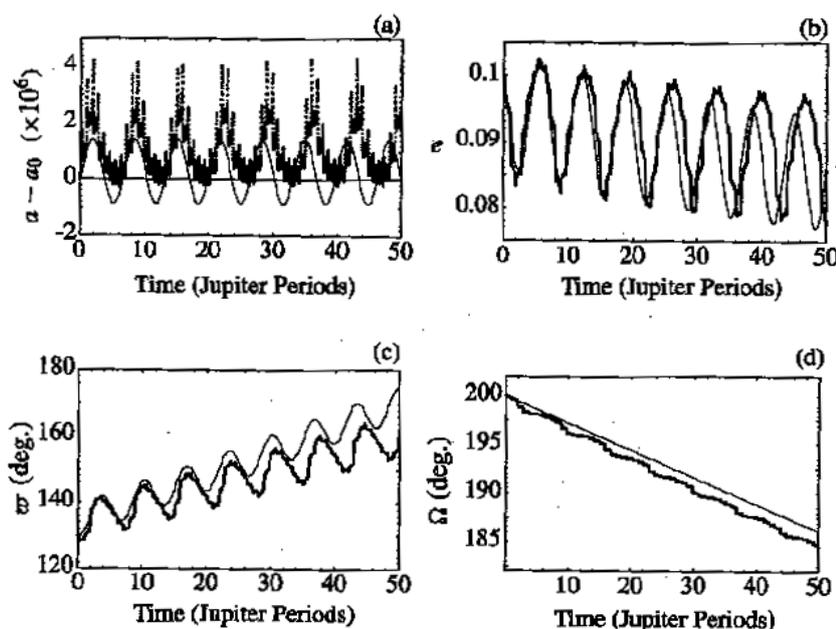


図 4.1: 2 : 1 共鳴近傍での軌道要素の時間変化. (Murray & Dermott (1999) より)

図 4.1 に Murray & Dermott (1999) による 2 : 1 共鳴での  $a$ ,  $e$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$  の計算例を載せる. これは一例にすぎないが, 軌道長半径の変動が大きな規模で起こっていることが示されており, これは数値積分とも極端な差はない. このような大きな変動は  $a$  の振幅に  $2n' - n$  という形の分母が含まれていることに由来する.

また, 離心率の正弦関数的な変動, 近点経度の永年摂動による線形的な変化と共鳴摂動による正弦関数的な変動の重ね合わせ, 昇交点経度の永年摂動による線形的な変化は, いずれも数値積分の結果に矛盾していない.

#### 4.4 まとめ

以上より, 永年摂動のみを考えると, 小惑星の軌道は形や向きは変わるものの軌道長半径は変わらないため, 軌道長半径の分布には影響を与えない. 一方, 天体が平均運動共鳴にあるときには, 軌道長半径が微少分母の振幅で変動するため, 軌道は大きく変化する. 小惑星帯では, もともと共鳴近傍の軌道にあった小惑星が軌道長半径の変化によって外れていったためにカークウッドの間隙が形成されたと考えられる.

## 付録 A ラグランジュの括弧式

### A.1 ハミルトンの正準方程式

ラグランジアン  $L$  を用いて変分原理を表すと,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt = 0. \quad (\text{A.1})$$

一般化運動量  $\mathbf{p}$  は次のように定義される.

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}. \quad (\text{A.2})$$

$L$  は  $\mathbf{x}$  と一般化運動量の各成分  $\{x_i\}$ ,  $\{p_i\}$  を用いて次のように表す.

$$L = \sum p_i \dot{x}_i - H(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t). \quad (\text{A.3})$$

ここで,  $H(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t)$  は,  $L$  により定義される関数であり, ハミルトニアンと呼ばれる.  $H$  の性質を求めるために, (A.3) に変分定理を適用する.

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum p_i \dot{x}_i - H \right) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \sum \left[ \delta p_i \dot{x}_i + p_i (\delta \dot{x}_i) - \frac{\partial H}{\partial x_i} \delta x_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum \left[ \left( \dot{x}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) \delta x_i \right] dt \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ここで,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} p_i \delta \dot{x}_i dt &= [p_i \delta x_i]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta x_i dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta x_i dt \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

を用いた. 以上より,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (\text{A.6})$$

この方程式をハミルトンの正準方程式という.

### A.2 母関数による正準変換

一般に, 正準方程式が成り立つ新しい変数の組への変換を正準変換という.

変数  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  から変数  $(\mathbf{X}, \mathbf{P})$  への正準変換を考える. 変数  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  について,

$$\delta \int \left( \sum_i p_i dx_i - H dt \right) = 0 \quad (\text{A.7})$$

が成り立つのと同様に, 変数  $(\mathbf{X}, \mathbf{P})$  についても次式が成り立てばよい.

$$\delta \int \left( \sum_i P_i dX_i - H' dt \right) = 0. \quad (\text{A.8})$$

したがって,

$$\sum p_i dx_i - H dt = \sum P_i dX_i - H' dt + dW. \quad (\text{A.9})$$

この  $W$  を変換の母関数という. 上式を書き直すと,

$$dW = \sum p_i dx_i - \sum P_i dX_i + (H' - H) dt. \quad (\text{A.10})$$

ゆえに,

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial x_i}, \quad P_i = -\frac{\partial W}{\partial X_i}, \quad H' = H + \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (\text{A.11})$$

また,  $W = W' - \sum P_i X_i$  とし, 独立変数を  $\mathbf{x}, \mathbf{P}, t$  とすると,

$$p_i = \frac{\partial W'}{\partial x_i}, \quad X_i = \frac{\partial W'}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial W'}{\partial t}. \quad (\text{A.12})$$

### A.3 ラグランジュの括弧式

次のような変数を考える.

$$x_i = x_i(u, v), \quad (\text{A.13})$$

$$p_i = p_i(u, v) \quad (\text{A.14})$$

このとき

$$dx_i dp_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial u} & \frac{\partial p_i}{\partial u} \\ \frac{\partial x_i}{\partial v} & \frac{\partial p_i}{\partial v} \end{vmatrix} du dv. \quad (\text{A.15})$$

ここで, 母関数  $W'(x, P)$  を考えると, 式 (A.12) より.

$$p_i = \frac{\partial W'}{\partial x_i}, \quad X_i = \frac{\partial W'}{\partial P_i}. \quad (\text{A.16})$$

この母関数を用いると,

$$dp_i = \sum_j \left( \frac{\partial^2 W'}{\partial x_i \partial x_j} dx_j + \frac{\partial^2 W'}{\partial x_i \partial P_j} dP_j \right), \quad (\text{A.17})$$

$$dX_i = \sum_j \left( \frac{\partial^2 W'}{\partial P_i \partial x_j} dx_j + \frac{\partial^2 W'}{\partial P_i \partial P_j} dP_j \right). \quad (\text{A.18})$$

これを式 (A.15) に代入し,  $i$  について和をとると,

$$\begin{aligned} \sum_i dx_i dp_i &= \sum_i \left| \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} \right| dudv \\ &= \sum_i \left| \frac{\partial x_i}{\partial u} \sum_j \left( \frac{\partial^2 W'}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u} + \frac{\partial^2 W'}{\partial x_i \partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial u} \right) \right| dudv \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 W'}{\partial x_i \partial x_j} \left| \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} \right| dudv + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 W'}{\partial x_i \partial P_j} \left| \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial P_j}{\partial v} \right| dudv. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

右辺の第 1 項は  $i, j$  の入れ換えに対する性質よりゼロとなるから

$$\sum_i \left| \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} \right| = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 W'}{\partial x_i \partial P_j} \left| \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial P_j}{\partial v} \right|. \quad (\text{A.20})$$

同様の変換を  $\sum_i dX_i dP_i$  についても行うと

$$\sum_i dX_i dP_i = \sum_i \left| \frac{\partial X_i}{\partial u} \frac{\partial P_i}{\partial v} \right| dudv = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 W'}{\partial x_i \partial P_j} \left| \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial P_j}{\partial v} \right| dudv. \quad (\text{A.21})$$

したがって,

$$\sum_i \left| \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} \right| = \sum_i \left| \frac{\partial X_i}{\partial u} \frac{\partial P_i}{\partial v} \right|. \quad (\text{A.22})$$

つまり,

$$\sum_i \left| \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} \right| \quad (\text{A.23})$$

は正準変数の取り方によらない. このような量を一般に正準不変量と呼ぶ. (A.23) を

$$[u, v] \equiv \sum_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v} \right) \quad (\text{A.24})$$

と書き, これをラグランジュの括弧式とよぶ.

## 付録 B 摂動関数

### B.1 はじめに

3章では、制限問題における惑星の位置と平衡点の安定性から三体問題を扱った。しかし、任意の初期条件で二つの物体から重力を受ける第三の物体の運動の一般的な問題には触れていない。この問題は、積分不可能であるが、三つの物体の加速度を解析することで、議論を進めることが可能になる。もし運動が中心となる惑星に支配されているなら、衛星の軌道は相互の重力摂動によって円錐曲線からわずかにずれたものになる。この章では、このずれが摂動関数の定義と解析によってどのように計算されるかを示す。

質量  $m_c$  の惑星の周囲を楕円軌道で回る質量  $m_i$  の衛星を考える。2章で考察したように、この問題は積分可能であり、中心の物体による重力効果を質点によるものと同様に用いることにすると  $m_i$  の軌道要素  $a_i, e_i, I_i, \varpi_i, \Omega_i$  は一定である。ここで第三の物体、衛星  $m_j$  を導入すると、 $m_i$  と  $m_j$  の間にはたらく相互重力は、 $m_c$  との二体問題での加速度に効果を加える (図 6.1 参照)。このような、惑星による加速に加わる衛星からの効果は摂動ポテンシャル、つまり摂動関数の勾配から得られる。

この章は摂動関数のフーリエ級数展開の特性という数学的解析に基いている。摂動関数を展開して適当な項を取り出し、他の項の運動方程式への時間平均寄与を無視して、天体力学の典型的な問題に取り組む方法を示す。摂動関数の特性を理解することは、共鳴の力学や太陽系における他の長周期運動の理解につながる。

### B.2 摂動関数

固定された原点  $O$  に対する三つの質量  $m_c, m_i, m_j$  の物体の位置ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{R}_c, \mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j$  とする。惑星  $m_c$  に対する衛星  $m_i, m_j$  の位置ベクトルを  $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$  とすると、

$$|\mathbf{r}_i| = r_i = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{1/2}, |\mathbf{r}_j| = r_j = (x_j^2 + y_j^2 + z_j^2)^{1/2}, \quad (\text{B.1})$$

$$|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i| = [(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2]^{1/2}. \quad (\text{B.2})$$

この座標系の原点は惑星である (図 B.1 を参照)。

ニュートンの運動の法則と引力の法則より、これら三つの物体について慣性系で

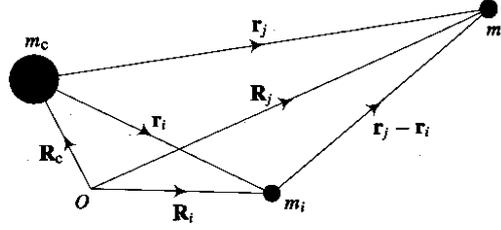


図 B.1: 中心物体  $m_c$  に対する二つの物体  $m_i, m_j$  の相対位置ベクトル  $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$ . 任意の定点  $O$  からの位置ベクトル  $\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j, \mathbf{R}_c$  をもつ.

の運動方程式を得る.

$$m_c \ddot{\mathbf{R}}_c = \mathcal{G}m_c m_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} + \mathcal{G}m_c m_j \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3}, \quad (\text{B.3})$$

$$m_i \ddot{\mathbf{R}}_i = \mathcal{G}m_i m_j \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} - \mathcal{G}m_i m_c \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3}, \quad (\text{B.4})$$

$$m_j \ddot{\mathbf{R}}_j = \mathcal{G}m_j m_i \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} - \mathcal{G}m_j m_c \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3}. \quad (\text{B.5})$$

惑星に対する衛星の相対加速度は

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{R}}_i - \ddot{\mathbf{R}}_c, \quad (\text{B.6})$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_j = \ddot{\mathbf{R}}_j - \ddot{\mathbf{R}}_c. \quad (\text{B.7})$$

方程式 (B.3)-(B.5) から  $\ddot{\mathbf{R}}_c, \ddot{\mathbf{R}}_i, \ddot{\mathbf{R}}_j$  を消去すると,

$$\ddot{\mathbf{r}}_i + \mathcal{G}(m_c + m_i) \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} = \mathcal{G}m_j \left( \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right), \quad (\text{B.8})$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_j + \mathcal{G}(m_c + m_j) \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} = \mathcal{G}m_i \left( \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} - \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \right). \quad (\text{B.9})$$

これらの相対加速度はスカラー関数の勾配として次のように書ける.

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \nabla_i(\mathcal{U}_i + \mathcal{R}_i) = \left( \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y_i} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z_i} \right) (\mathcal{U}_i + \mathcal{R}_i), \quad (\text{B.10})$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_j = \nabla_j(\mathcal{U}_j + \mathcal{R}_j) = \left( \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y_j} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z_j} \right) (\mathcal{U}_j + \mathcal{R}_j). \quad (\text{B.11})$$

ただし, ここで

$$\mathcal{U}_i = \mathcal{G} \frac{(m_c + m_i)}{r_i}, \mathcal{U}_j = \mathcal{G} \frac{(m_c + m_j)}{r_j} \quad (\text{B.12})$$

は、全ポテンシャルのうちの二体問題に関する部分である。 $\nabla$  演算子の添字  $i, j$  は勾配を物体  $m_i, m_j$  それぞれの座標についてとることを強調するためにつけてある。ポテンシャル中の  $\mathcal{R}$  の項は摂動関数であり、他の衛星によってもたらされるポテンシャルを表している。 $\mathbf{r}_i$  は  $x_j, y_j, z_j$  によらず、 $\mathbf{r}_j$  は  $x_i, y_i, z_i$  によらないので、次のように書ける。

$$\mathcal{R}_i = \frac{\mathcal{G}m_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} - \mathcal{G}m_j \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_j^3}, \quad (\text{B.13})$$

$$\mathcal{R}_j = \frac{\mathcal{G}m_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} - \mathcal{G}m_i \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_i^3}. \quad (\text{B.14})$$

第一項は直接項という。また、座標系の原点の選択によって決まる第二項を間接項という。座標系の原点が質量中心にあれば、この間接項は現れない。

以上の解析は物体の数を増やした場合にも拡張できる。さらに、質点の重力に限らず、どのような原因からでも摂動関数による加速は生じうる。たとえば、中心惑星の扁平性によるポテンシャルからも生じうる (B.11 節を参照)。この章では、主に質量が  $m, m'$  で位置ベクトルが  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  である二つの質点衛星という特定の場合を考えることにする。ただし、つねに  $r < r'$  とする。このとき、内側の衛星の運動方程式は、

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mathcal{G}(m_c + m) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathcal{G}m' \left( \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \right) \quad (\text{B.15})$$

であり、摂動関数は、

$$\mathcal{R} = \frac{\mu'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \mu' \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r'^3}. \quad (\text{B.16})$$

ここで、 $\mu' = \mathcal{G}m'$  であり、基準軌道は  $n^2 a^3 = \mathcal{G}(m_c + m)$  という接触要素をもつ。同様に、外側の衛星の運動方程式は次のように書ける。

$$\ddot{\mathbf{r}}' + \mathcal{G}(m_c + m') \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} = \mathcal{G}m \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right). \quad (\text{B.17})$$

また、この衛星の摂動関数は

$$\mathcal{R}' = \frac{\mu}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \mu \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3}. \quad (\text{B.18})$$

ここで、 $\mu = \mathcal{G}m$  であり、基準軌道は接触要素  $n'^2 a'^3 = \mathcal{G}(m_c + m')$  をもつ。

以上は、 $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$  を求める最も素直な方法だが、この方法とその結果の表し方は、唯一のものではない。たとえば、 $\mathcal{R}'$  の式に  $-\mu/r'$  を加えれば、 $m'$  の運動方程式 (B.17) の両辺に  $\mathcal{G}m\mathbf{r}'/r'^3$  という項を加えることが可能である。ただしこのとき、 $m'$  の基準軌道は接触要素  $n'^2 a'^3 = \mathcal{G}(m_c + m + m')$  をもつ。

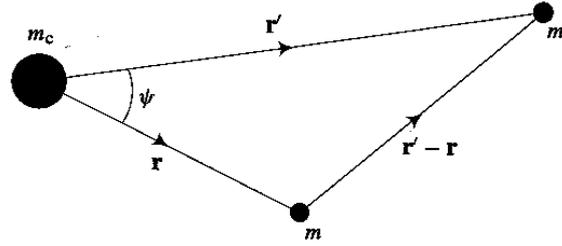


図 B.2: 中心物体  $m_c$  に対する物体  $m, m'$  の位置ベクトル  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ . 位置ベクトルのなす角は  $\psi$ .

### B.3 ルジャンドル多項式を用いた展開

図 B.2 に示すような、位置ベクトル  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  で表される二つの物体  $m, m'$  の配置を考える. この二つの位置ベクトルのなす角を  $\psi$  とする. 余弦定理より,

$$|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi. \quad (\text{B.19})$$

または,

$$\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \frac{1}{r'} \left[ 1 - 2\frac{r}{r'} \cos \psi + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.20})$$

この式はルジャンドル多項式を用いて展開し, 次のように書ける.

$$\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^l P_l(\cos \psi). \quad (\text{B.21})$$

ここで,  $P_0(\cos \psi) = 1$ ,  $P_1(\cos \psi) = \cos \psi$ ,  $P_2(\cos \psi) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \psi - 1) \dots$  である (4.2 節を参照).

$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = rr' \cos \psi = rr' P_1(\cos \psi)$  より, 内側の衛星の摂動関数は

$$\mathcal{R} = \frac{\mu'}{r'} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^l P_l(\cos \psi). \quad (\text{B.22})$$

ここでは, 内側の衛星から見た  $\mathcal{R}$  の勾配に着目しており,  $P_0(\cos \psi)$  は  $r$  によらないので勾配をとると最終的には消えることからこの式からは省いてある. 同様に, 外側の衛星の摂動関数は次のように書ける.

$$\mathcal{R}' = \frac{\mu}{r'} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^l P_l(\cos \psi) + \mu \frac{r}{r'^2} \cos \psi - \mu \frac{r'}{r^2} \cos \psi. \quad (\text{B.23})$$

このように, 後の二項 (この本で扱う方法においては実質的に重要でない) を除くと  $\mathcal{R}$  と  $\mathcal{R}'$  の表式はよく似ている。

この章では、摂動関数の  $m, m'$  の (直交座標ではなく) 軌道要素についての級数展開を扱う。ここで、標準的な軌道要素  $a, e, I, \varpi, \Omega, \lambda$  を用いる。これらは、それぞれ物体  $m$  の軌道長半径, 離心率, 軌道傾斜角, 近点経度, 昇交点経度, 平均経度である。  $m'$  についてはそれぞれにプライムをつけて表す。  $\mathcal{R}$  の展開式は

$$\mathcal{R} = \mu' \sum S(a, a', e, e', I, I') \cos \varphi \quad (\text{B.24})$$

という形で表される。ここで、  $\varphi$  は

$$\varphi = j_1 \lambda' + j_2 \lambda + j_3 \varpi' + j_4 \varpi + j_5 \Omega' + j_6 \Omega \quad (\text{B.25})$$

という線形結合で表され、整数  $j_i (i = 1, 2, \dots, 6)$  について

$$\sum_{i=1}^6 j_i = 0. \quad (\text{B.26})$$

この特性は惑星によるポテンシャルが方位角に対し不変であることに由来する。関数  $S$  の詳細な形と  $\varphi$  に含まれる角の組み合わせを求めることで、運動方程式を支配する項、あるいは無視できる項を判断することができる。

この展開の性質を示すため、軌道が同一平面上にあり、軌道傾斜角によって生じる項を無視できる二物体  $m, m'$  という特化された場合を考える。この場合、  $\psi$  は真近点離角を用いて、

$$\psi = (f' + \varpi') - (f + \varpi) \quad (\text{B.27})$$

と書ける。  $f$  と  $f'$  は  $m$  と  $m'$  の真近点離角である。よって

$$\begin{aligned} \cos \psi &= (\cos f' \cos \varpi' - \sin f' \sin \varpi')(\cos f \cos \varpi - \sin f \sin \varpi) \\ &+ (\sin f' \cos \varpi' + \cos f' \sin \varpi')(\sin f \cos \varpi + \cos f \sin \varpi). \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

2.5 節ですでに  $\cos f, \sin f$  の級数展開を求めており、  $\cos f', \sin f'$  についても  $M$  を  $M', e$  を  $e'$  で置換して同様の級数を求めることができる。<sup>1)</sup> これらの展開を  $e$

<sup>1)</sup>  $\sin f = \sin M + e \sin 2M + e^2 \left( \frac{9}{8} \sin 3M - \frac{7}{8} \sin M \right) + \mathcal{O}(e^3) \quad (2.84),$

$\cos f = \cos M + e(\cos 2M - 1) + \frac{9e^2}{8}(\cos 3M - \cos M) + \mathcal{O}(e^3) \quad (2.85).$

と  $e'$  の二次の項までとれば,

$$\begin{aligned}
\cos \psi &= (1 - e^2 - e'^2) \cos [M - M' + \varpi - \varpi'] \\
&\quad - e \cos [M' - \varpi + \varpi'] - e' \cos [M + \varpi - \varpi'] \\
&\quad + e \cos [2M - M' + \varpi - \varpi'] + e' \cos [M - 2M' + \varpi - \varpi'] \\
&\quad - \frac{1}{8}e^2 \cos [M + M' - \varpi + \varpi'] - \frac{1}{8}e'^2 \cos [M + M' + \varpi - \varpi'] \\
&\quad + \frac{9}{8}e^2 \cos [3M - M' + \varpi - \varpi'] + \frac{9}{8}e'^2 \cos [M - 3M' + \varpi - \varpi'] \\
&\quad + ee' \cos [\varpi - \varpi'] + ee' \cos [2M - 2M' + \varpi - \varpi'] \\
&\quad - ee' \cos [2M + \varpi - \varpi'] - ee' \cos [2M' - \varpi + \varpi']. \tag{B.29}
\end{aligned}$$

この段階でも  $\cos \psi$  の形のいくつかの特性は明らかである. 余弦偏角にともなう離心率の次数は, 最小でも偏角中の平均近点離角の係数の和の絶対値である.  $M = \lambda - \varpi$  と  $M' = \lambda' - \varpi'$  で置換して平均近点離角のかわりに平均経度を用いると, あらたな特性が明らかになる.

$$\begin{aligned}
\cos \psi &= (1 - e^2 - e'^2) \cos [\lambda - \lambda'] - e \cos [\lambda' - \varpi] - e' \cos [\lambda - \varpi'] \\
&\quad + e \cos [2\lambda - \lambda' - \varpi] + e' \cos [\lambda - 2\lambda' + \varpi'] \\
&\quad - \frac{1}{8}e^2 \cos [\lambda + \lambda' - 2\varpi] - \frac{1}{8}e'^2 \cos [\lambda + \lambda' - 2\varpi'] \\
&\quad + \frac{9}{8}e^2 \cos [3\lambda - \lambda' - 2\varpi] + \frac{9}{8}e'^2 \cos [\lambda - 3\lambda' + 2\varpi'] \\
&\quad + ee' \cos [\varpi - \varpi'] + ee' \cos [2\lambda - 2\lambda' - \varpi + \varpi'] \\
&\quad - ee' \cos [2\lambda - \varpi - \varpi'] - ee' \cos [2\lambda' - \varpi - \varpi']. \tag{B.30}
\end{aligned}$$

このように角変数を選択すると, 各偏角中の経度の整数係数和が0であることは明白である. この特性は, 角度が経度で表された最終的な展開式でも成り立つので, とりうる偏角を決定することができる.

今度は, 式 (B.22) で表される摂動関数の動径方向依存の部分に着目すると,

$$\mathcal{R} = \frac{\mu'}{a'} \sum_{l=2}^{\infty} \alpha^l \left( \frac{a'}{r'} \right)^{l+1} \left( \frac{r}{a} \right)^l P_l(\cos \psi). \tag{B.31}$$

ここで

$$\alpha = \frac{a}{a'} < 1 \tag{B.32}$$

は,  $m, m'$  の軌道長半径の比である.

$l = 2$  の項を取り上げると,  $r/a$  の級数展開は 2.5 節より,

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 \approx 1 - 2e \cos M + \left(\frac{1}{2}\right) e^2 (3 - \cos 2M), \quad (\text{B.33})$$

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \approx 1 + 3e' \cos M' + \left(\frac{3}{2}\right) e'^2 (1 + 3 \cos 2M') \quad (\text{B.34})$$

であり,

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 &\approx 1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - 2e \cos M + 3e' \cos M' \\ &\quad - \frac{1}{2}e^2 \cos 2M + \frac{9}{2}e'^2 \cos 2M' \\ &\quad - 3ee' \cos [M - M'] - 3ee' \cos [M + M']. \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

$P_2(x) = (1/2)(3x^2 - 1)$ ,  $P_3(x) = (1/2)(5x^3 - 3x) \dots$  であるから, 複雑な形をした  $\cos \psi$  から  $P_l(\cos \psi)$  を計算するには相当な労力を要する. 実際,  $l = 2$  に対して 14 個のわかれた偏角が存在し,  $l = 3$  にいたっては 36 個にも及ぶ. しかし,  $(a'/r')^{l+1}(r/a)^l$  の級数は, 平均近点離角の和と差のみで構成されており, それらと  $P_l(\cos \psi)$  の積は, どの余弦偏角中の経度の係数和も必ず 0 であるという性質をもっている.

以上で述べた単純な解析からでもわかるように, 摂動関数の展開はかなり労力を要するものであり, 計算機の力を用いるのがよいだろう. 最終的に得られるのは, 膨大な数の偏角からなる  $\alpha$  の級数である. 級数の最良な扱いを考えるにあたり, この展開を 3 次元に一般化し, 二つの軌道の交点と軌道傾斜角を導入することが不可欠である.

摂動関数  $\mathcal{R}$  は, Kaula(1961,1962) によって開発された方法により, 標準軌道要素で展開できる. この方法では, 内側の衛星の摂動関数は惑星の赤道を基準とした接触 (つまり, 瞬間的な) 楕円要素で無限級数展開される.  $\mathcal{R}$  の式 (B.16) は

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \frac{\mu'}{a'} \sum_{l=2}^{\infty} \alpha^l \sum_{m=0}^l (-1)^{l-m} \kappa_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \\ &\quad \times \sum_{p,p'=0}^l F_{lmp}(I) F_{lmp'}(I') \sum_{q,q'=-\infty}^{\infty} X_{l-2p+q}^{l,l-2p}(e) X_{l-2p'+q'}^{-l-1,l-2p'}(e') \\ &\quad \times \cos[(l-2p'+q')\lambda' - (l-2p+q)\lambda - q'\varpi' + q\varpi \\ &\quad + (m-l+2p')\Omega' - (m-l+2p)\Omega]. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

このとき,  $\alpha = a/a'$  であり,  $\lambda$  と  $\lambda'$  は平均経度,  $\varpi$  と  $\varpi'$  は近点経度である. また,  $\kappa_0 = 1$ ,  $m \neq 0$  では  $\kappa_m = 2$  である.

$F_{lmp}(I)$  は軌道傾斜角関数であり, 次のように定義される.

$$F_{lmp}(I) = \frac{i^{l-m}(l+m)!}{2^l p!(l-p)!} \times \sum_k (-1)^k \binom{2l-2p}{q} \binom{2p}{l-m-k} c^{3l-m-2p-2k} s^{m-l+2p+2k}. \quad (\text{B.37})$$

ここで,  $i = \sqrt{-1}$  であり,  $k$  については  $k = \max(0, l-m-2p)$  から  $k = \min(l-m, 2l-2p)$  まで和をとる. また,  $s = \sin \frac{1}{2}I$ ,  $c = \cos \frac{1}{2}I$  である.

$X_c^{a,b}(e)$  はハンセン係数 (Hansen coefficients) であり,

$$X_c^{a,b}(e) = e^{|c-b|} \sum_{\sigma=0}^{\infty} X_{\sigma+\alpha, \sigma+\beta}^{a,b} e^{2\sigma}. \quad (\text{B.38})$$

と, 定義される. ここで,  $\alpha = \max(0, c-b)$ ,  $\beta = \max(0, b-c)$  である. また, 次のように再帰的に定義される  $X_{c,d}^{a,b}$  はニューカム演算子 (Newcomb operators) である.

$$X_{0,0}^{a,b} = 1, \quad (\text{B.39})$$

$$X_{1,0}^{a,b} = b - a/2. \quad (\text{B.40})$$

$d = 0$  のとき,

$$4cX_{c,0}^{a,b} = 2(2b-a)X_{c-1,0}^{a,b+1} + (b-a)X_{c-2,0}^{a,b+2}. \quad (\text{B.41})$$

$d \neq 0$  のとき,

$$\begin{aligned} 4dX_{c,d}^{a,b} &= -2(2b+a)X_{c,d-1}^{a,b-1} - (b+a)X_{c,d-2}^{a,b-2} \\ &\quad - (c-5d+4+4b+a)X_{c-1,d-1}^{a,b} \\ &\quad + 2(c-d+b) \sum_{j \geq 2} (-1)^j \binom{3/2}{j} X_{c-j,d-j}^{a,b}. \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

また,  $c < 0$  もしくは  $d < 0$  のとき  $X_{c,d}^{a,b} = 0$ ,  $d > c$  のとき  $X_{c,d}^{a,b} = X_{d,c}^{a,-b}$  である.

Plummer(1918) と Hughes(1981) にハンセン係数とニューカム演算子に関する詳細な記述がある. 特に, Hughes(1981) では, ハンセン係数の特性と様々な再帰関係について述べている.

次に,  $\mathcal{R}'$  の展開も考えなければならない. この展開式が不思議と文献に見当たらないということは興味深い. これは, 展開式が外側にある月と太陽の軌道から人工衛星に働く摂動を扱うために研究されてきたので,  $\mathcal{R}'$  の同様な展開式は必要とされなかったためだとしか考えられない.

$\mathcal{R}'$  の表式は、

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}' &= \frac{\mu}{a'} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha^l \sum_{m=0}^l \kappa_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \\
&\times \sum_{p,p'=0}^l F_{lmp}(I) F_{lmp'}(I') \sum_{q,q'=-\infty}^{\infty} X_{l-2p+q}^{l,l-2p}(e) X_{l-2p'+q'}^{-(l+1),l-2p'}(e') \\
&\times \cos[(l-2p'+q')\lambda' - (l-2p+q)\lambda - q'\varpi' + q\varpi \\
&\quad + (m-l+2p')\Omega' - (m-l+2p)\Omega] \\
&- \frac{\mu a'}{a^2} \sum_{m=0}^1 \kappa_m \frac{(1-m)!}{(1+m)!} \\
&\times \sum_{p,p'=0}^1 F_{1mp}(I) F_{1mp'}(I') \sum_{q,q'=-\infty}^{\infty} X_{1-2p+q}^{-2,1-2p}(e) X_{1-2p'+q'}^{1,1-2p'}(e') \\
&\times \cos[(1-2p'+q')\lambda' - (1-2p+q)\lambda - q'\varpi' + q\varpi \\
&\quad + (m-1+2p')\Omega' - (m-1+2p)\Omega]. \tag{B.43}
\end{aligned}$$

#### B.4 軌道要素での逐次展開

天体力学において、摂動関数は重要であり、多くの研究者が高次の展開式を求めてきた。Peirce(1849) は離心率と相対的な軌道傾斜角の 6 次の展開式を求めた。摂動関数の、もっともよく使われている主要な展開式は Le Verrier (1855) によるもので、彼は 7 次の展開式を発表している。Boquet (1889) が Le Verrier の式を 8 次まで拡張した。Le Verrier の展開式は、小さな誤りを多く含んでおり、そのほとんどは Annals of the Paris Observatory で訂正されたが、Murray (1985) によって重大な誤りが一つ発見された。この他にも、Newcomb (1895) による 6 次までの拡張や、Brown & Shook (1933) と Brouwer & Clemence (1961) による低次の展開式がある。これらの展開式はすべて二つの軌道それぞれの離心率と近点経度についての展開であるが、どれも相対的な軌道傾斜角と共通の昇降点を用いている。その理由はおそらく計算量を減らすためであろうが、計算機代数学の発展した現代においてはこういった制限を設ける必要はない。個々の離心率と軌道傾斜角による 2 次までの展開式は B.5 節で求めることにする。また、付録 B には 4 次まで求めた展開式を載せた。どちらの展開式も、以下に述べる方法で求めた。

摂動関数の展開式は複雑なため、関数の直接部と間接部を分離するのが定石であ

る. 式 (B.16) と (B.18) より, 次のように書ける.

$$\mathcal{R} = \frac{\mu'}{a'} \mathcal{R}_D + \frac{\mu'}{a'} \alpha \mathcal{R}_E, \quad (\text{B.44})$$

$$\mathcal{R}' = \frac{\mu}{a'} \mathcal{R}_D + \frac{\mu}{a'} \frac{1}{\alpha^2} \mathcal{R}_I. \quad (\text{B.45})$$

ここで,

$$\mathcal{R}_D = \frac{a'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}, \quad (\text{B.46})$$

$$\mathcal{R}_E = - \left( \frac{r}{a} \right) \left( \frac{a'}{r'} \right)^2 \cos \psi, \quad (\text{B.47})$$

$$\mathcal{R}_I = - \left( \frac{r'}{a'} \right) \left( \frac{a}{r} \right)^2 \cos \psi. \quad (\text{B.48})$$

$\mathcal{R}_D$  は摂動関数の直接部から,  $\mathcal{R}_E$  は外側をまわる摂動源による間接部から,  $\mathcal{R}_I$  は内側の摂動源による間接部から得たものである. 式 (B.44)-(B.46) からわかるように,  $\mathcal{R}_D$  の展開式を用いて  $\mathcal{R}$  や  $\mathcal{R}'$  の直接部を得ることができる.

摂動関数から, 太陽系力学のある特定の問題に関する適切な項を取り出すため, まず, 二つの物体の軌道要素での  $\mathcal{R}$  や  $\mathcal{R}'$  の展開式を求める. このとき, 式 (B.46) で定義された直接部  $\mathcal{R}_D$  と式 (B.47) と (B.48) で定義された間接部  $\mathcal{R}_E$  と  $\mathcal{R}_I$  の独立した展開式が必要である. 付録 B の展開式中の余弦偏角は, 摂動関数のどの部分から得たかで D, E, I に分類してある.

式 (B.19) より,

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{\mathcal{R}_D}{a'} = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi]^{-1/2}. \quad (\text{B.49})$$

ここで,  $\Delta = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$  は二物体間の距離であり,  $\psi$  は二つの動径ベクトル (図 B.2 参照) のなす角である.  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = rr' \cos \psi$  より,

$$\cos \psi = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}. \quad (\text{B.50})$$

式 (2.122) より,

$$\frac{x}{r} = \cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos I, \quad (\text{B.51})$$

$$\frac{y}{r} = \sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos I, \quad (\text{B.52})$$

$$\frac{z}{r} = \sin(\omega + f) \sin I. \quad (\text{B.53})$$

$x'/r', y'/r', z'/r'$  についても同様の式を得る.

上で示した式はどれも 2.5 節で求めた  $\cos f, \sin f$  の級数展開を用いて  $M, M'$  の級数に展開でき,  $\cos \psi$  の級数展開式を得ることができる.

$$\Psi = \cos \psi - \cos(\theta - \theta') \quad (\text{B.54})$$

とおくと,  $\theta = \varpi + f, \theta' = \varpi' + f'$  であり, それぞれ内側の衛星と外側の衛星の経度である. すると, あとで見るように,  $\Psi$  の級数は  $\sin I$  と  $\sin I'$  の二次のオーダーであり,  $\Delta^{-1}$  の表式は  $\Psi$  のテイラー級数として展開できる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= [r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos(\theta - \theta') + \Psi)]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{\Delta_0} + rr'\Psi \cdot \frac{1}{\Delta_0^3} + \frac{3}{2}(rr'\Psi)^2 \cdot \frac{1}{\Delta_0^5} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \cdot \left(\frac{1}{2}rr'\Psi\right)^i \cdot \frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}. \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

このとき

$$\frac{1}{\Delta_0} = [r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta - \theta')]^{-1/2}. \quad (\text{B.56})$$

ここで,

$$\rho_0 = [a^2 + a'^2 - 2aa'\cos(\theta - \theta')]^{1/2} \quad (\text{B.57})$$

とおく.  $\rho_0$  のテイラー級数展開を用いると,

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} + (r-a) \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \right) + (r'-a') \frac{\partial}{\partial a'} \left( \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \right) + \dots \quad (\text{B.58})$$

微分演算子  $D_{m,n}$  を

$$D_{m,n} = a^m a'^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial a^m \partial a'^n} \quad (\text{B.59})$$

とおき, さらに

$$\varepsilon = \frac{r}{a} - 1, \quad \varepsilon' = \frac{r'}{a'} - 1 \quad (\text{B.60})$$

とおく. 式(2.81)<sup>2)</sup> で示される  $r/a$  の展開式より,  $\varepsilon$  は  $\mathcal{O}(e)$ ,  $\varepsilon'$  は  $\mathcal{O}(e')$  である. よって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} &= \left[ 1 + \varepsilon D_{1,0} + \varepsilon D_{0,1} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2!} (\varepsilon^2 D_{2,0} + 2\varepsilon\varepsilon' D_{1,1} + \varepsilon'^2 D_{0,2}) + \dots \right] \frac{1}{\rho_0^{2i+1}}. \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

<sup>2)</sup>  $\frac{r}{a} = 1 - e \cos M + \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2M) + \frac{3e^3}{8}(\cos M - \cos 3M) + \frac{3e^4}{3}(\cos 2M - \cos 4M) + \mathcal{O}(e^5)$

式 (B.57) より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} &= [a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(\theta - \theta')]^{-(i+\frac{1}{2})} \\ &= a'^{-(2i+1)} [1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\theta - \theta')]^{-(i+\frac{1}{2})} \\ &= a'^{-(2i+1)} \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \cos j(\theta - \theta'). \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

ここで,  $b_s^{(j)}(\alpha)$  はラプラス係数であり,  $\alpha < 1$  において  $\alpha$  の収束級数として書ける.  $D_{m,n}$  演算子はラプラス係数にのみはたらくので, 次のような関数  $A_{i,j,m,n}$  を定義することができる.

$$A_{i,j,m,n} = D_{m,n} \left( a'^{-(2i+1)} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \right) = a^m a'^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial a^m \partial a'^n} \left( a'^{-(2i+1)} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \right). \quad (\text{B.63})$$

よって, 次のように書ける.

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [A_{i,j,0,0} + \varepsilon A_{i,j,1,0} + \varepsilon' A_{i,j,0,1} + \dots] \cos j(\theta - \theta'). \quad (\text{B.64})$$

この式を一般化すると,

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \varepsilon^k \varepsilon'^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos j(\theta - \theta'). \quad (\text{B.65})$$

$A_{i,j,k,l-k}$  中の  $a, a'$  の偏導関数の計算には注意が必要である. まだラプラス係数  $b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(a/a')$  に  $a, a'$  が含まれているからである.

式 (B.65) を (B.55) に代入すると,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left( \frac{1}{2} \frac{r r'}{a a'} \Psi \right)^i \frac{a^i a'^{i+1}}{2} \\ &\quad \times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \varepsilon^k \varepsilon'^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos j(\theta - \theta'). \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

式 (B.66) では軌道傾斜角  $I, I'$  が  $\Psi$  の項にのみ含まれ, 離心率が  $\varepsilon, \varepsilon'$  の項にのみ含まれるということが重要である.

間接部  $\mathcal{R}_E, \mathcal{R}_I$  の展開式は, 式 (B.50) の  $\cos \psi$  の展開式から得られる級数と, 2.5 節で得た級数を使ったもっと単純なものである. これらの項の展開式はラプラス係数を含まないことに注意する.

逐次展開は、ラプラス係数を用いるが、この係数は Kaula の展開式で導入した  $\alpha$  のべき乗の係数ではなく、 $\alpha$  を陽に含む関数である。式 (B.62) のラプラス係数  $b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha)$  は次式で定義される。

$$\frac{1}{2}b_s^{(j)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos j\psi d\psi}{(1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2)^s}. \quad (\text{B.67})$$

$s = i + 1/2$  は半整数 (つまり,  $s = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$ ) であり,  $\alpha = a/a'$  である。また, 次のような級数の形で書くこともできる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}b_s^{(j)}(\alpha) &= \frac{s(s+1)\dots(s+j-1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots j} \alpha^j \\ &\times \left[ 1 + \frac{s(s+j)}{1(j+1)} \alpha^2 + \frac{s(s+1)(s+j)(s+j+1)}{1\cdot 2(j+1)(j+2)} \alpha^4 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

$j = 0$  では, 角括弧の外の因数は 1 である。ラプラス係数の級数定義は  $\alpha < 1$  で必ず収束することを示すことができる。

Brouwer & Clemence(1961) にラプラス係数と導関数の有用な関係が示されている。

$$b_s^{(-j)} = b_s^{(j)}, \quad (\text{B.69})$$

$$Db_s^{(j)} = s \left( b_{s+1}^{(j-1)} - 2\alpha b_{s+1}^{(j)} + b_{s+1}^{(j+1)} \right), \quad (\text{B.70})$$

$$\begin{aligned} D^n b_s^{(j)} &= s \left( D^{n-1} b_{s+1}^{(j-1)} - 2\alpha D^{n-1} b_{s+1}^{(j)} \right. \\ &\quad \left. + D^{n-1} b_{s+1}^{(j+1)} - 2(n-1) D^{n-2} b_{s+1}^{(j)} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

$$\begin{aligned} \alpha^n (D^n b_s^{(j)} - D^n b_s^{(j-2)}) &= \\ &= -(j+n-1) \alpha^{n-1} D^{n-1} b_s^{(j)} - (j-n-1) \alpha^{n-1} D^{n-1} b_s^{(j-2)} \\ &+ 2(j-1) \left[ \alpha^n D^{n-1} b_s^{(j-1)} + (n-1) \alpha^{n-1} D^{n-2} b_s^{(j-1)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

後の二関係式で  $n \geq 2$  であり,  $D \equiv d/d\alpha$  は微分演算子である。

## B.5 二次のオーダーまでの逐次展開

(B.4) 節で述べた方法の例として, 今度は摂動関数の展開式を離心率と軌道傾斜角の二次のオーダーまで求めることにする。

$\cos \psi$  の級数展開を得るため、まず  $\sin f$ ,  $\cos f$  を平均近点離角  $M$  で表した展開式 (2.84), (2.85) を用いる。二次の項まで書くと、

$$\sin f = \sin M + e \sin 2M + e^2 \left( \frac{9}{8} \sin 3M - \frac{7}{8} \sin M \right), \quad (\text{B.73})$$

$$\cos f = \cos M + e(\cos 2M - 1) + e^2 \left( \frac{9}{8} \cos 3M - \frac{9}{8} \cos M \right). \quad (\text{B.74})$$

したがって

$$\begin{aligned} \cos[\omega + f] &= \cos \omega \cos f - \sin \omega \sin f \\ &\approx \cos[\omega + M] + e(\cos[\omega + 2M] - \cos \omega) \\ &\quad + e^2 \left( -\cos[\omega + M] - \frac{1}{8} \cos[\omega - M] + \frac{9}{8} \cos[\omega + 3M] \right), \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

$$\begin{aligned} \sin[\omega + f] &= \sin \omega \cos f + \cos \omega \sin f \\ &\approx \sin[\omega + M] + e(\sin[\omega + 2M] - \sin \omega) \\ &\quad + e^2 \left( -\sin[\omega + M] + \frac{1}{8} \sin[\omega - M] + \frac{9}{8} \sin[\omega + 3M] \right). \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

ここまですて来た多くの展開式 (B.3 節で扱った Kaula によるものを含む) をこれからも使うため、摂動関数を軌道傾斜角の正弦や余弦ではなく  $\sin \frac{1}{2}I$  や  $\sin \frac{1}{2}I'$  のべき乗で表したい。よって、次の関係式を用いる。

$$\cos I = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}I = 1 - 2s^2, \quad (\text{B.77})$$

$$\sin I = 2 \sin \frac{1}{2}I \left( 1 - \sin^2 \frac{1}{2}I \right)^{\frac{1}{2}} = 2s + \mathcal{O}(s^3). \quad (\text{B.78})$$

ここで、 $s = \sin \frac{1}{2}I$  である。これらの表式の置き換えと、式 (B.51)-(B.53) で表される  $\cos[\omega + f]$  と  $\sin[\omega + f]$  の展開式より、

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &\approx \cos[\omega + \Omega + M] + e(\cos[\omega + \Omega + 2M] - \cos[\omega + \Omega]) \\ &\quad + e^2 \left( \frac{9}{8} \cos[\omega + \Omega + 3M] - \frac{1}{8} \cos[\omega + \Omega - M] - \cos[\omega + \Omega + M] \right) \\ &\quad + s^2(\cos[\omega - \Omega + M] - \cos[\omega + \Omega + M]), \end{aligned} \quad (\text{B.79})$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{r} &\approx \sin[\omega + \Omega + M] + e(\sin[\omega + \Omega + 2M] - \sin[\omega + \Omega]) \\ &\quad + e^2 \left( \frac{9}{8} \sin[\omega + \Omega + 3M] - \frac{1}{8} \sin[\omega + \Omega - M] - \sin[\omega + \Omega + M] \right) \\ &\quad - s^2(\sin[\omega - \Omega + M] + \sin[\omega + \Omega + M]), \end{aligned} \quad (\text{B.80})$$

$$\frac{z}{r} \approx 2s \sin[\omega + M] + 2es(\sin[\omega + 2M] - \sin \omega). \quad (\text{B.81})$$

上式のプライムなしの量をプライムつきの量で置き換えれば,  $x'/r'$ ,  $y'/r'$ ,  $z'/r'$  についても同じような式を得る. よって, 式 (B.50) より  $\cos \psi$  の式を得る. ここで, 関係式  $M = \lambda - \varpi$  と  $\omega = \varpi - \Omega$  を用いて経度での展開式を表すことができる.

$$\begin{aligned} \cos \psi \approx & (1 - e^2 - e'^2 - s^2 - s'^2) \cos[\lambda - \lambda'] + ee' \cos[2\lambda - 2\lambda' - \varpi + \varpi'] \\ & + ee' \cos[\varpi - \varpi'] + 2ss' \cos[\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega'] \\ & + e \cos[2\lambda - \lambda' - \varpi] - e \cos[\lambda' - \varpi] \\ & + e' \cos[\lambda - 2\lambda' + \varpi'] - e' \cos[\lambda - \varpi'] \\ & + \frac{9}{8}e^2 \cos[3\lambda - \lambda' - 2\varpi] - \frac{1}{8}e^2 \cos[\lambda + \lambda' - 2\varpi] \\ & + \frac{9}{8}e'^2 \cos[\lambda - 3\lambda' + 2\varpi'] - \frac{1}{8}e'^2 \cos[\lambda + \lambda' - 2\varpi'] \\ & - ee' \cos[2\lambda - \varpi - \varpi'] - ee' \cos[2\lambda' - \varpi - \varpi'] \\ & + s^2 \cos[\lambda + \lambda' - 2\Omega] + s'^2 \cos[\lambda + \lambda' - 2\Omega'] \\ & - 2ss' \cos[\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega']. \end{aligned} \quad (\text{B.82})$$

$\theta = \omega + \Omega + f$  より,

$$\begin{aligned} \cos[\theta - \theta'] = & (\cos \Omega \cos[\omega + f] - \sin \Omega \sin[\omega + f]) \\ & \times (\cos \Omega' \cos[\omega' + f'] - \sin \Omega' \sin[\omega' + f']) \\ & + (\sin \Omega \cos[\omega + f] + \cos \Omega \sin[\omega + f]) \\ & \times (\sin \Omega' \cos[\omega' + f'] + \cos \Omega' \sin[\omega' + f']). \end{aligned} \quad (\text{B.83})$$

この式を式 (B.51)-(B.53) と比較すると,  $I = I' = 0$  とおくことで  $\cos[\theta - \theta']$  の展開式が  $\cos \psi$  の展開式から得られることがわかる.  $\Psi = \cos \psi - \cos[\theta - \theta']$  より,  $\cos \psi$  の展開式は  $\Psi$  が  $\cos \psi$  の軌道傾斜角依存の部分であることを示し,

$$\begin{aligned} \Psi = & s^2(\cos[\lambda + \lambda' - 2\Omega] - \cos[\lambda - \lambda']) \\ & + 2ss'(\cos[\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega'] - \cos[\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega']) \\ & + s'^2(\cos[\lambda + \lambda' - 2\Omega'] - \cos[\lambda - \lambda']). \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

$\Psi$  は軌道傾斜角の二次のオーダーであることに注意する.

$r/a = 1 + \mathcal{O}(e)$ 、 $r'/a' = 1 + \mathcal{O}(e')$  より、離心率と軌道傾斜角の二次のオーダーまでは、

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \Psi \right) &= \frac{1}{2} s^2 (\cos[\lambda + \lambda' - 2\Omega] - \cos[\lambda - \lambda']) \\ &\quad + s s' (\cos[\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega'] - \cos[\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega']) \\ &= \frac{1}{2} s'^2 (\cos[\lambda + \lambda' - 2\Omega'] - \cos[\lambda - \lambda']). \end{aligned} \quad (\text{B.85})$$

と書け、このオーダーまでは  $e$  によらない。いま、二次のオーダーの展開式にのみ着目しており、 $\Psi$  はすでに二次のオーダーであるから、 $\Psi$  の二次以上のべきは無視できる。

ここまでで  $\mathcal{R}_D$  の級数の最初の主要な二項を得た (式 (B.66) を参照)。任意の整数  $j$  について、 $\cos j[\theta - \theta']$  の表式を求める必要がある。まず、

$$\begin{aligned} \cos j[\theta - \theta'] &= \cos j[\omega + \Omega + f] \cos j[\omega' + \Omega' + f'] \\ &\quad + \sin j[\omega + \Omega + f] \sin j[\omega' + \Omega' + f']. \end{aligned} \quad (\text{B.86})$$

式 (2.88) から

$$f = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \mathcal{O}(e^3). \quad (\text{B.87})$$

$\cos j[\omega + \Omega + f]$ 、 $\sin j[\omega + \Omega + f]$  にこの式を適用して、前にもやったように経度で書き直してテイラー級数展開すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \cos j\theta &\approx (1 - j^2 e^2) \cos[j\lambda] \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} j^2 e^2 - \frac{5}{8} j e^2 \right) \cos[(2 - j)\lambda - 2\varpi] \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} j^2 e^2 + \frac{5}{8} j e^2 \right) \cos[(2 + j)\lambda - 2\varpi] \\ &\quad - j e \cos[(1 - j)\lambda - \varpi] + j e \cos[(1 + j)\lambda - \varpi], \end{aligned} \quad (\text{B.88})$$

$$\begin{aligned} \sin j\theta &\approx (1 - j^2 e^2) \sin[j\lambda] \\ &\quad + \left( \frac{5}{8} j e^2 - \frac{1}{2} j^2 e^2 \right) \sin[(2 - j)\lambda - 2\varpi] \\ &\quad + \left( \frac{5}{8} j e^2 + \frac{1}{2} j^2 e^2 \right) \sin[(2 + j)\lambda - 2\varpi] \\ &\quad + j e \sin[(1 - j)\lambda - \varpi] + j e \sin[(1 + j)\lambda - \varpi]. \end{aligned} \quad (\text{B.89})$$

プライムなしの量をプライムつきに置き換えると同じような形の  $\cos j\theta'$  と  $\sin j\theta'$  の式が容易に得られる.  $\cos j[\theta - \theta']$  の表式は、

$$\begin{aligned}
\cos j[\theta - \theta'] \approx & (1 - j^2e^2 - j^2e'^2) \cos[j(\lambda - \lambda')] \\
& + \left(\frac{5}{8}je^2 + \frac{1}{2}j^2e^2\right) \cos[(2+j)\lambda - j\lambda' - 2\varpi] \\
& + \left(\frac{1}{2}j^2e^2 - \frac{5}{8}je^2\right) \cos[(2-j)\lambda + j\lambda' - 2\varpi] \\
& + je \cos[(1+j)\lambda - j\lambda' - \varpi] - je \cos[(1-j)\lambda + j\lambda' - \varpi] \\
& + \left(\frac{1}{2}j^2e'^2 - \frac{5}{8}je'^2\right) \cos[j\lambda + (2-j)\lambda' - 2\varpi'] \\
& + \left(\frac{5}{8}je'^2 + \frac{1}{2}j^2e'^2\right) \cos[j\lambda - (2+j)\lambda' + 2\varpi'] \\
& - je' \cos[j\lambda + (1-j)\lambda' - \varpi'] + je' \cos[j\lambda - (1+j)\lambda' + \varpi'] \\
& - j^2ee' \cos[(1+j)\lambda + (1-j)\lambda' - \varpi - \varpi'] \\
& - j^2ee' \cos[(1-j)\lambda + (1+j)\lambda' - \varpi - \varpi'] \\
& + j^2ee' \cos[(1+j)\lambda - (1+j)\lambda' - \varpi + \varpi'] \\
& + j^2ee' \cos[(1-j)\lambda - (1-j)\lambda' - \varpi + \varpi'].
\end{aligned} \tag{B.90}$$

式 (B.66) の  $j$  の和はすべてを足したものであるが、実際にはこの計算は必要ない (B.9 節等を参照).

式 (B.60) と (2.81) より、

$$\begin{aligned}
\varepsilon = \frac{r}{a} - 1 & \approx -e \cos M + \frac{1}{2}e^2(1 - \cos 2M) \\
& = -e \cos[\lambda - \varpi] + \frac{1}{2}e^2(1 - \cos[2\lambda - 2\varpi])
\end{aligned} \tag{B.91}$$

であるから、

$$\varepsilon^2 \approx \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^2 \cos 2M = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^2 \cos[2\lambda - 2\varpi]. \tag{B.92}$$

$\varepsilon'$ ,  $\varepsilon'^2$  についても同様な式を得る.  $\varepsilon$  は  $e$  のオーダーであるから、二次をこえるべきは必要ない.

最後に、式 (B.66) の加算を行う前に、 $A_{i,j,m,n}$  関数で与えられるラプラス係数の導関数を求めなければならない. この計算は、この加算における  $i$  の値では単純化

でき,

$$a^i a'^{i+1} A_{i,j,m,n} = a^{i+m} a'^{i+n+1} \frac{\partial^{m+n}}{\partial a^m \partial a'^n} \left( a'^{-(2i+1)} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(a/a') \right) \quad (\text{B.93})$$

とすればよい. 微分の結果,  $a/a'$  の関数が残る. ここでの場合, 必要な  $A_{i,j,m,n}$  の値は,

$$a^i a'^{i+1} A_{i,j,0,0} = \alpha^i b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha), \quad (\text{B.94})$$

$$a^i a'^{i+1} A_{i,j,1,0} = \alpha^{i+1} D b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha), \quad (\text{B.95})$$

$$a^i a'^{i+1} A_{i,j,0,1} = -\alpha^{i+1} D b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) - (2i+1) \alpha^i b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha), \quad (\text{B.96})$$

$$a^i a'^{i+1} A_{i,j,2,0} = \alpha^{i+2} D^2 b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha), \quad (\text{B.97})$$

$$a^i a'^{i+1} A_{i,j,1,1} = -\alpha^{i+2} D^2 b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) - 2\alpha^{i+1} (i+1) D b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha), \quad (\text{B.98})$$

$$\begin{aligned} a^i a'^{i+1} A_{i,j,2,2} &= \alpha^{i+2} D^2 b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) + 4\alpha^{i+1} (i+1) D b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \\ &\quad + 2\alpha^i (2i^2 + 3i + 2) b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha). \end{aligned} \quad (\text{B.99})$$

$i$  は 0 と 1 の値をとり, それより高次の量は式 (B.66) に  $\Psi^i$  という項があるため無視できる.

今度は  $i$  について和をとる. 離心率と軌道傾斜角の二次のオーダーまで和をとると,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D &= \left( \frac{1}{2} [a' A_{0,j,0,0} + \varepsilon a' A_{0,j,1,0} + \varepsilon' a' A_{0,j,1,0}] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \varepsilon^2 a' A_{0,j,2,0} + \varepsilon \varepsilon' a' A_{0,j,1,1} + \frac{1}{2} \varepsilon'^2 a' A_{0,j,0,2}] \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} \frac{r r'}{a a'} \Psi \right) a a'^2 A_{1,j,0,0} \right) \cos j[\theta - \theta']. \end{aligned} \quad (\text{B.100})$$

既に求めた級数をこの式に適用すると, 23 個の余弦角変数をもつ展開式を得る. これらは, 角変数のオーダー, つまり  $\lambda$  と  $\lambda'$  の係数の和によって分類できる. 二次の展開式を

$$\mathcal{R}_D = \mathcal{R}_D^{(0)} + \mathcal{R}_D^{(1)} + \mathcal{R}_D^{(2)} \quad (\text{B.101})$$

と書き,  $\mathcal{R}_D^{(i)}$  が展開式のオーダー  $i$  の角変数を含む部分を表すものとする,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_D^{(0)} = & \left( \frac{1}{2} b_{\frac{1}{2}}^{(j)} + \frac{1}{8} (e^2 + e'^2) [-4j^2 + 2\alpha D + \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \cos[j\lambda - j\lambda'] \\
& + \left( \frac{1}{8} ee' [2j + 4j^2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \\
& \quad \times \cos[(1+j)\lambda - (1+j)\lambda' - \varpi + \varpi'] \\
& + \left( \frac{1}{8} ee' [-2j + 4j^2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \\
& \quad \times \cos[(1-j)\lambda - (1-j)\lambda' - \varpi + \varpi'] \\
& + \left( \frac{1}{4} (s^2 + s'^2) [-\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \cos[(1+j)\lambda - (1+j)\lambda'] \\
& + \left( \frac{1}{4} (s^2 + s'^2) [-\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \cos[(1-j)\lambda - (1-j)\lambda'] \\
& + \left( \frac{1}{2} ss' [\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \cos[(1+j)\lambda - (1+j)\lambda' - \Omega + \Omega'] \\
& + \left( \frac{1}{2} ss' [\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \cos[(1-j)\lambda - (1-j)\lambda' - \Omega + \Omega'], \tag{B.102}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_D^{(1)} = & \left( \frac{1}{4} e [2j - \alpha D] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \cos[(1+j)\lambda - j\lambda' - \varpi] \\
& + \left( \frac{1}{4} e [-2j - \alpha D] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \cos[(1-j)\lambda + j\lambda' - \varpi] \\
& + \left( \frac{1}{4} e' [1 + 2j + \alpha D] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \cos[j\lambda - (1+j)\lambda' + \varpi'] \\
& + \left( \frac{1}{4} e' [1 - 2j + \alpha D] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \cos[j\lambda + (1-j)\lambda' - \varpi'], \tag{B.103}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_D^{(2)} = & \left( \frac{1}{16} e^2 [5j + 4j^2 - 2\alpha D - 4j\alpha D + \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \\
& \times \cos[(2+j)\lambda - j\lambda - 2\varpi] \\
& + \left( \frac{1}{16} e^2 [-5j + 4j^2 - 2\alpha D + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \\
& \times \cos[(2-j)\lambda + j\lambda - 2\varpi] \\
& + \left( \frac{1}{8} ee' [2j - 4j^2 - 2\alpha D + 2j\alpha D - \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \\
& \times \cos[(1+j)\lambda + (1-j)\lambda' - \varpi - \varpi'] \\
& + \left( \frac{1}{8} ee' [-2j - 4j^2 - 2\alpha D - 2j\alpha D - \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \\
& \times \cos[(1-j)\lambda + (1+j)\lambda' - \varpi - \varpi'] \\
& + \left( \frac{1}{16} e'^2 [4 + 9j + 4j^2 + 6\alpha D + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \\
& \times \cos[j\lambda - (2+j)\lambda' + 2\varpi'] \\
& + \left( \frac{1}{16} e'^2 [4 - 9j + 4j^2 + 6\alpha D - 4j\alpha D + \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \\
& \times \cos[j\lambda + (2-j)\lambda' - 2\varpi'] \\
& + \left( \frac{1}{4} s^2 [\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \cos[(1-j)\lambda + (1+j)\lambda' - 2\Omega] \\
& + \left( \frac{1}{4} s^2 [\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \cos[(1+j)\lambda + (1-j)\lambda' - 2\Omega] \\
& + \left( \frac{1}{2} ss' [-\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \cos[(1-j)\lambda + (1+j)\lambda' - \Omega - \Omega'] \\
& + \left( \frac{1}{2} ss' [-\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \cos[(1+j)\lambda + (1-j)\lambda' - \Omega - \Omega'] \\
& + \left( \frac{1}{4} s'^2 [\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \cos[(1-j)\lambda + (1+j)\lambda' - 2\Omega'] \\
& + \left( \frac{1}{4} s'^2 [\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j)} \right) \cos[(1+j)\lambda + (1-j)\lambda' - 2\Omega']. \tag{B.104}
\end{aligned}$$

この展開式中の角変数の形は唯一のものではなく、もっと単純化することも可能である。これは、異なる項を比較すると、 $\mathcal{R}_D^{(0)}$  の第一項を除いて同じ形の組で現れているので、明らかである。式 (B.66) の  $j$  についての和は全部の量についてとっているなので、角変数とその項に  $k$  を整数として  $j$  に対して  $j \rightarrow \pm j + k$  という変換を行うことができる。また、展開式には余弦のみが現れるので、偏角の符号を自由にかえられる。こういった方法により、展開式中の偏角を任意の標準形に減らす

ことができる. ここでは,  $j$  を角変数中の  $\lambda'$  の係数にしている.

例として,  $\mathcal{R}_D^{(0)}$  中の  $ee'$  の二項を考える. これらは, 同じ余弦偏角

$$j\lambda' - j\lambda + \varpi' - \varpi \quad (\text{B.105})$$

に変換することができる. ここでは最初の項の  $j$  を  $-j$  に変換し, 次にそれぞれ  $j \rightarrow j+1$  という変換を行っている. この偏角にともなう項は,

$$\frac{1}{4} ee' [2 + 6j + 4j^2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j+1)}. \quad (\text{B.106})$$

他の偏角に対しても同じ方法を使うことができ, 偏角の数は 23 個から 11 個まで減らすことができる. この変換では, 式 (B.69) で与えられる性質  $b_s^{(-j)} = b_s^{(j)}$  を用いた. また,  $\lambda'$  の係数を  $j$  として角変数を表す場合でさえ最終的な展開式の形は一通りでなく, 角変数の反転を使った  $j \rightarrow -j$  式の変換では別の形の角変数が現れる.

直接部の二次のオーダーの展開式の最終的な形は、

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_D = & \left( \frac{1}{2} b_{\frac{1}{2}}^{(j)} + \frac{1}{8} (e^2 + e'^2) [-4j^2 + 2\alpha D + \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right. \\
& \left. + \frac{1}{4} (s^2 + s'^2) \left( [-\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} + [-\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)} \right) \right) \\
& \times \cos[j\lambda' - j\lambda] \\
& + \left( \frac{1}{4} ee' [2 + 6j + 4j^2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j+1)} \right) \\
& \times \cos[j\lambda' - j\lambda + \varpi' - \varpi] \\
& + \left( ss' [\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)} \right) \cos[j\lambda' - j\lambda + \Omega' - \Omega] \\
& + \left( \frac{1}{2} e [-2j - \alpha D] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \cos[j\lambda' + (1-j)\lambda - \varpi] \\
& + \left( \frac{1}{2} e' [-1 + 2j + \alpha D] b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \right) \cos[j\lambda' + (1-j)\lambda - \varpi'] \\
& + \left( \frac{1}{8} e^2 [-5j + 4j^2 - 2\alpha D + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \\
& \times \cos[j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\varpi] \\
& + \left( \frac{1}{4} ee' [-2 + 6j - 4j^2 + 2\alpha D - 4j\alpha D - \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \right) \\
& \times \cos[j\lambda' + (2-j)\lambda - \varpi' - \varpi] \\
& + \left( \frac{1}{8} e'^2 [2 - 7j + 4j^2 - 2\alpha D + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j-2)} \right) \\
& \times \cos[j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\varpi'] \\
& + \left( \frac{1}{2} s^2 [\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \right) \\
& \times \cos[j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\Omega] \\
& + \left( ss' [-\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \right) \cos[j\lambda' + (2-j)\lambda - \Omega' - \Omega] \\
& + \left( \frac{1}{2} s'^2 [\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \right) \cos[j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\Omega']. \tag{B.107}
\end{aligned}$$

式 (B.47) と (B.48) で定義された摂動関数の間接部を求めるのは、すでに  $\cos \psi$  の表式を得ているので比較的簡単である。  $r/a$  と  $(a'/r')^2$  の表式は 2.5 節の展開で得られる。二次までとると、

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos[\lambda - \varpi] + \frac{1}{2} e^2 (1 - \cos[2\lambda - 2\varpi]), \tag{B.108}$$

$$\left( \frac{a'}{r'} \right) = 1 + 2e' \cos[\lambda' - \varpi'] + \frac{1}{2} e'^2 (1 + 5 \cos[2\lambda' - 2\varpi']). \tag{B.109}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_E &= -\frac{r}{a} \left( \frac{a'}{r'} \right)^2 \cos \psi \\
&\approx \left( -1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e'^2 + s^2 + s'^2 \right) \cos[\lambda' - \lambda] \\
&\quad - ee' \cos[2\lambda' - 2\lambda - \varpi' + \varpi] - 2ss' \cos[\lambda' - \lambda - \Omega' + \Omega] \\
&\quad - \frac{1}{2}e \cos[\lambda' - 2\lambda + \varpi] + \frac{3}{2}e \cos[\lambda' - \varpi] - 2e' \cos[2\lambda' - \lambda - \varpi'] \\
&\quad - \frac{3}{8}e^2 \cos[\lambda' - 3\lambda + 2\varpi] - \frac{1}{8}e^2 \cos[\lambda' + \lambda - 2\varpi] \\
&\quad + 3ee' \cos[2\lambda - \varpi' - \varpi] - \frac{1}{8}e'^2 \cos[\lambda' + \lambda - 2\varpi'] \\
&\quad - \frac{27}{8}e'^2 \cos[3\lambda' - \lambda - 2\varpi'] - s^2 \cos[\lambda' + \lambda - 2\Omega] \\
&\quad + 2ss' \cos[\lambda' + \lambda - \Omega' - \Omega] - s'^2 \cos[\lambda' + \lambda - 2\Omega']. \tag{B.110}
\end{aligned}$$

$\mathcal{R}_D$  を求めるときと同じ形にするため, 何か所かは偏角の符号を変えている.

$\mathcal{R}_I$  の形を求めるにも同じ方法が使える.  $\mathcal{R}_E$  中のプライムつきの量とプライムなしの量を入れ替えればよい.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_I &= -\frac{r'}{a'} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \cos \psi \\
&\approx \left( -1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e'^2 + s^2 + s'^2 \right) \cos[\lambda' - \lambda] \\
&\quad - ee' \cos[2\lambda' - 2\lambda - \varpi' + \varpi] - 2ss' \cos[\lambda' - \lambda - \Omega' + \Omega] \\
&\quad - 2e \cos[\lambda' - 2\lambda + \varpi] + \frac{3}{2}e' \cos[\lambda - \varpi'] - \frac{1}{2}e' \cos[2\lambda' - \lambda - \varpi'] \\
&\quad - \frac{27}{8}e^2 \cos[\lambda' - 3\lambda + 2\varpi] - \frac{1}{8}e^2 \cos[\lambda' + \lambda - 2\varpi] \\
&\quad + 3ee' \cos[2\lambda - \varpi' - \varpi] - \frac{1}{8}e'^2 \cos[\lambda' + \lambda - 2\varpi'] \\
&\quad - \frac{3}{8}e'^2 \cos[3\lambda' - \lambda - 2\varpi'] - s^2 \cos[\lambda' + \lambda - 2\Omega] \\
&\quad + 2ss' \cos[\lambda' + \lambda - \Omega' - \Omega] - s'^2 \cos[\lambda' + \lambda - 2\Omega']. \tag{B.111}
\end{aligned}$$

## B.6 特定の偏角にもなう項

B.5 節で示した方法では, 惑星の摂動関数の展開計算を離心率と軌道傾斜角についてあるオーダーまでに留めている. この方法の主な欠点は, ある偏角にもなう項を得るためにそのオーダーまでの展開をすべて行わなければならないことであ

る. B.3 節では Kaula の展開式を用いる大きな長所を示したが, Kaula の公式の主な欠点は, ラプラス係数を含まないことである.

Ellis & Murray (1999) は, 両方の式の長所を組み合わせた Kaula の展開式の変形を求めている. さらに, あるオーダーまで展開されたある偏角にともなう有限級数のあらわな式を示してもいる. 偏角の形を

$$\varphi = j_1 \lambda' + j_2 \lambda + j_3 \varpi' + j_4 \varpi + j_5 \Omega' + j_6 \Omega \quad (\text{B.112})$$

とおき,  $N_{\max}$  を展開式のオーダーの上限とする. Ellis & Murray は,  $\varphi$  にともなう  $\mathcal{R}_D$  の式を次のように表した.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D &= \sum_{i=0}^{i_{\max}} \frac{(2i)!}{i!} \frac{(-1)^i}{2^{2i+1}} \alpha^i \\ &\times \sum_{s=s_{\min}}^i \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{(2s-4n+1)(s-n)!}{2^{2n} n! (2s-2n+1)!} \sum_{m=0}^{s-2n} \kappa_m \frac{(s-2n-m)!}{(s-2n+m)!} \\ &\times (-1)^{s-2n-m} F_{s-2n,m,p}(I) F_{s-2n,m,p'}(I') \sum_{l=0}^{i-s} \frac{(-1)^s 2^{2s}}{(i-s-l)! l!} \\ &\times \sum_{l=0}^{l_{\max}} \frac{(-1)^l}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} (-1)^k \alpha^l \frac{d^l}{d\alpha^l} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \\ &\times X_{-j_2}^{i+k, -j_2-j_4}(e) X_{j_1}^{-(i+k+1), j_1+j_3}(e') \\ &\times \cos[j_1 \lambda' + j_2 \lambda + j_3 \varpi' + j_4 \varpi + j_5 \Omega' + j_6 \Omega] \end{aligned} \quad (\text{B.113})$$

ここでも,  $\kappa_0 = 1$ ,  $m \neq 0$  で  $\kappa_m = 2$  である.

この計算において, 次の関係が成り立っている.

$$q = j_4, \quad (\text{B.114})$$

$$q' = -j_3, \quad (\text{B.115})$$

$$l_{\max} = N_{\max} - |j_5| - |j_6|, \quad (\text{B.116})$$

$$p_{\min} = -(j_5 + j_6)/2, \quad p'_{\min} = 0 \quad (j_5 + j_6 < 0 \text{ のとき}), \quad (\text{B.117})$$

$$p_{\min} = 0, \quad p'_{\min} = (j_5 + j_6)/2, \quad (j_5 + j_6 \geq 0 \text{ のとき}), \quad (\text{B.118})$$

$$s_{\min} = \max(p_{\min}, p'_{\min}, j_6 + 2p_{\min}, -j_5 + 2p'_{\min}), \quad (\text{B.119})$$

$$i_{\max} = [(N_{\max} - |j_3| - |j_4|)/2]. \quad (\text{B.120})$$

式 (B.120) 中の角括弧は, 式の整数部分を表す. 加算を行うため, 多数の中間の定

義が必要である。これらは次のとおりである。

$$n_{\max} = [(s - s_{\min})/2], \quad (\text{B.121})$$

$$m_{\min} = 0 \quad (s, j_{15} \text{ が「両方奇数」, または「両方偶数」のとき}), \quad (\text{B.122})$$

$$m_{\min} = 1 \quad (s, j_{15} \text{ が「両方奇数」でも「両方偶数」でもないとき}), \quad (\text{B.123})$$

$$p = (-j_6 - m + s - 2n)/2 \quad (p \leq s - 2n \text{ かつ } p \geq p_{\min} \text{ のとき}), \quad (\text{B.124})$$

$$p' = (j_5 - m + s - 2n)/2 \quad (p' \leq s - 2n \text{ かつ } p' \geq p'_{\min} \text{ のとき}), \quad (\text{B.125})$$

$$j = |j_2 + i - 2\bar{a} - 2n - 2p + q|. \quad (\text{B.126})$$

$q, q'$  が  $\varphi$  から直接決まり, 加算において固定値であることに注意する。一方,  $p, p'$  は  $s, n, m$  とともに変化するが, 式 (B.124) と (B.125) はつねに成り立つ。

Ellis & Murray (1999) は, 式 (B.113) 中の離心率と軌道傾斜角の関数の定義式の中の加算は, せいぜい  $N_{\max}$  の有限級数とするだけでよいことを示している。  $e$  についてのハンセン係数は,  $e$  のオーダー  $N_{\max} - |j_3| - |j_5| - |j_6|$  までの項のみ含めればよい。同様に,  $e'$  についてのハンセン係数は,  $e'$  のオーダー  $N_{\max} - |j_4| - |j_5| - |j_6|$  までの項のみ含めればよい。  $I$  についての軌道傾斜角関数  $F$  は,  $I$  のオーダー  $N_{\max} - |j_3| - |j_4| - |j_5|$  までの項のみ含めればよい。同様に  $I'$  についての軌道傾斜角関数  $F'$  は,  $I'$  のオーダー  $N_{\max} - |j_3| - |j_4| - |j_6|$  までの項のみ含めればよい。

間接部は,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_E = & -\kappa_m \frac{(1-m)!}{(1+m)!} F_{1,m,p}(I) F_{1,m,p'}(I') X_{-j_2}^{1,-j_2-j_4}(e) X_{j_1}^{-2,j_1+j_3}(e') \\ & \times \cos[j_1\lambda' + j_2\lambda + j_3\varpi' + j_4\varpi + j_5\Omega' + j_6\Omega] \end{aligned} \quad (\text{B.127})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_I = & -\kappa_m \frac{(1-m)!}{(1+m)!} F_{1,m,p}(I) F_{1,m,p'}(I') X_{-j_2}^{-2,-j_2-j_4}(e) X_{j_1}^{-2,j_1+j_3}(e') \\ & \times \cos[j_1\lambda' + j_2\lambda + j_3\varpi' + j_4\varpi + j_5\Omega' + j_6\Omega] \end{aligned} \quad (\text{B.128})$$

$p, p', m$  は整数であり, 0 か 1 である。それを満たさない場合は間接部の展開式にその偏角は現れない。  $\mathcal{R}_D$  についてと同様に, 離心率と軌道傾斜角のべき乗の級数展開式量を減らすことができ, 同じ処理を行うことができる。間接部の展開式中の

整数を解析することで、次の関係式が得られる。

$$q = j_4, \quad (\text{B.129})$$

$$q' = -j_3, \quad (\text{B.130})$$

$$p = (j_2 + j_4 + 1)/2, \quad (\text{B.131})$$

$$p' = -(j_1 + j_3 - 1)/2, \quad (\text{B.132})$$

$$m = j_5 - 2p' + 1. \quad (\text{B.133})$$

## B.7 摂動関数の利用

$\mathcal{R}_D, \mathcal{R}_E, \mathcal{R}_I$  の完全な展開式は、無限数の余弦偏角を含む。しかし、実際に興味があるのは、ある特定の余弦偏角のみであり、他の偏角はすべて無視できる。これは、平均法による。平均法では、重要でない項をすべて短周期のものとし、平均をとると長周期運動への効果がゼロになるとみなす。この考え方は B.9 節で示す。ここで着目すべきは、平均法を使うと、摂動関数からある問題を扱ううえで重要な項を取り出し、無限個ある他の項を無視することができる、ということである。議論を効果的に進めるため、完全な形の摂動関数  $\mathcal{R}$  の無限級数ではなく、平均摂動関数  $\langle \mathcal{R} \rangle$  という有限級数を考えることにする。この考え方が、7 章での永年摂動、8 章での共鳴摂動、9 章でのカオス運動、10 章での惑星リングの解析の基礎となる。惑星の摂動関数を利用するこの方法を使うと、二体問題で表される単純な部分を越えて解析を実行することができる。

摂動関数中の適切な項、 $\langle \mathcal{R} \rangle$  や  $\langle \mathcal{R}' \rangle$  を決める手順は次のとおりである。

1. 角変数の結合  $\varphi$  のどれが目の前の問題に適用できるかを定める。ここで、物理的な問題についての情報が必要となる。これについては B.9 節で扱う。
2. 偏角の「オーダー」、 $N$  を定める。これは、 $\varphi$  中の  $\lambda, \lambda'$  の係数の和の絶対値と等しい。
3.  $\mathcal{R}_D$  の展開式の適切な次数の項を考察することで、考えられる偏角  $\varphi$  と適合する整数  $j$  の値を決める。
4. 着目している項の明確な形を与える  $j$  の値に対するラプラス係数の結合を計算する。

5. 外側の摂動と内側の摂動のどちらに着目するかを決める. これは扱う問題の性質によって決まる.
6. 外側の摂動を考える場合, 間接部の展開式の適切な次数の項に着目し, 適合する偏角があれば取り出し, 対応する間接項を  $\langle \mathcal{R}_E \rangle$  とする.
7. 内側の摂動を考える場合, 間接部の展開式の適切な次数の項に着目し, 適合する偏角があれば取り出し, 対応する間接項を  $\langle \mathcal{R}_I \rangle$  とする.
8. 外側の摂動を考える場合,

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \frac{\mu'}{a'} (\langle \mathcal{R}_D \rangle + \alpha \langle \mathcal{R}_E \rangle). \quad (\text{B.134})$$

9. 内側の摂動を考える場合,

$$\langle \mathcal{R}' \rangle = \frac{\mu}{a} \left( \alpha \langle \mathcal{R}_D \rangle + \frac{1}{\alpha} \langle \mathcal{R}_I \rangle \right). \quad (\text{B.135})$$

手順 6, 7 ではどちらも間接部の具体的な展開式を用いることを避けている. 摂動関数の間接部の平均,  $\langle \mathcal{R}_E \rangle$  と  $\langle \mathcal{R}_I \rangle$  は, 直接部の平均  $\langle \mathcal{R}_D \rangle$  から得られるからである. 方法は次のとおりである.  $\langle \mathcal{R}_E \rangle$  を得るため,  $\langle \mathcal{R}_D \rangle$  中に現れる  $\alpha^n D^n A_1 (n = 0, 1)$  をすべて  $-1$  で置き換え,  $\langle \mathcal{R}_D \rangle$  中に現れる  $\alpha^n D^n B_0 (n = 0, 1)$  をすべて  $-2$  で置き換える. 他の項はすべて無視する.  $\langle \mathcal{R}_I \rangle$  を得るため,  $\langle \mathcal{R}_D \rangle$  中に現れる  $\alpha^n D^n A_1 (n = 0, 1, 2, \dots)$  をすべて  $(-1)^{n+1} (n+1)!$  で置き換え,  $\langle \mathcal{R}_D \rangle$  中に現れる  $\alpha^n D^n B_0 (n = 0, 1, 2, \dots)$  をすべて  $(-1)^{n+1} (2n+2)n!$  で置き換え, 他の項をすべて無視する.

ここまでの解析で,  $r' > r$  (つまり, 軌道は交わらない) としてきた. 級数の収束は, 軌道が交差位置にどれだけ近いかにによる. もし軌道が交差するなら, ある経度においては  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  であるから, 式 (B.16) や (B.18) の第一項が定義できなくなるので, 明かに特異点が存在する. よって, 収束のおおよその条件は

$$a(1+e) < a'(1-e'), \quad (\text{B.136})$$

つまり, 内側にある軌道の遠点距離が外側にある軌道の近点距離より短いことである.

式 (B.113) で示されるルジャンドル型の展開式のもう一つの利点は, 展開式中の最も低次の項の形がわかりやすいことである. すでに B.3 節で述べ (, B.5 節で示

し) たように,  $m'$  による  $m$  の軌道の摂動ポテンシャルは,

$$\mathcal{R} = \mu' \sum S \cos \varphi \quad (\text{B.137})$$

と書ける. ここで,  $S$  は  $m, m'$  の軌道長半径, 離心率, 軌道傾斜角の関数である. 平均経度と近点経度の定義より, 偏角  $\varphi$  の一般形は

$$\begin{aligned} \varphi = & (l - 2p' + q')\lambda' - (l - 2p + q)\lambda - q'\varpi' + q\varpi \\ & + (m - l + 2p')\Omega' - (m - l + 2p)\Omega. \end{aligned} \quad (\text{B.138})$$

$l, m, p, p', q, q'$  はどれも整数である. 偏角中の角変数の整数係数の和がゼロになるという性質を使えば, 適当な偏角を計算することができる. 偏角の一般形を

$$\varphi = j_1\lambda' + j_2\lambda + j_3\varpi' + j_4\varpi + j_5\Omega' + j_6\Omega \quad (\text{B.139})$$

と書くと, 係数の条件は

$$\sum_{i=1}^6 j_i = 0. \quad (\text{B.140})$$

これをダランベールの関係式という. 角変数に何を使ってもよいわけではなく, 固定された方向からの角変数 (近点離角ではなく経度) を用いなければならない. 経度  $\lambda, \lambda', \varpi, \varpi', \Omega, \Omega'$  は, 適切な角変数の組を構成する. Hamilton (1994) は, これらの関係式を決めるダランベールの法則の概要を示している.

次に,  $S$  の形, 各項の「強さ」について考える.  $X_{l-2p+q}^{l,l-2p}(e)$  と  $F_{lmp}(I)$  の性質より, 離心率と軌道傾斜角の最も低次の項を計算することができる. 式 (B.37)-(B.42) を用いると,

$$X_{l-2p+q}^{l,l-2p}(e) = \mathcal{O}(e^{|q|}), \quad X_{l-2p'+q'}^{-l-1,l-2p'}(e') = \mathcal{O}(e'^{|q'|}), \quad (\text{B.141})$$

$$F_{lmp}(I) = \mathcal{O}(s^{|m-l+2p|}), \quad F_{lmp'}(I') = \mathcal{O}(s'^{|m-l+2p'|}). \quad (\text{B.142})$$

ただし,  $s = \sin \frac{1}{2}I$ ,  $s' = \sin \frac{1}{2}I'$  である. よって,

$$S \approx \frac{f(\alpha)}{a'} e^{|q|} e'^{|q'|} s^{|m-l+2p|} s'^{|m-l+2p'|} = \frac{f(\alpha)}{a'} e^{|j_4|} e'^{|j_3|} s^{|j_6|} s'^{|j_5|}. \quad (\text{B.143})$$

$f(\alpha)$  はラプラス係数の関数として表される. したがって, その項に含まれる  $e$  などの最も低次のべき乗は, 最小でも  $\varpi$  の係数の絶対値と同じである. 同様に,  $e'$ ,  $\sin \frac{1}{2}I$ ,  $\sin \frac{1}{2}I'$  の最低次のべき乗は, それぞれ  $\varphi$  中の  $\varpi', \Omega, \Omega'$  の係数の絶対値以上である. この性質は, B.5 節の二次の展開式や付録 B の四次の展開式から明らかである.

## B.8 ラグランジュの惑星方程式

摂動関数の展開は、摂動ポテンシャルの軌道要素依存性を表す。今度は、摂動を受ける物体の軌道変化の量を求めることが必要である。ここで、ラグランジュの惑星方程式を用いる。この方程式は、ハミルトンの公式を用いると、最もうまく求められる (2.10 節を参照)。ここでは方程式の説明だけにとどめる。完全な導出は、Brouwer & Clemence (1961) と Roy (1988) に記されている。

ラグランジュの方程式を使うためには、新たに角変数を導入する必要がある。

$$\lambda = M + \varpi = n(t - \tau) + \varpi = nt + \epsilon \quad (\text{B.144})$$

とおく。  $\lambda$  は平均経度、  $M$  は平均近点離角、  $\varpi$  は近点経度、  $t$  は時刻、  $\tau$  は近点通過時刻であり、新たに導入した角変数  $\epsilon$  は時刻ゼロでの平均経度である。軌道要素の変化についてのラグランジュ方程式は、

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon}, \quad (\text{B.145})$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi}, \quad (\text{B.146})$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}(1 - \sqrt{1-e^2})}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\tan \frac{1}{2}I}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}, \quad (\text{B.147})$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}, \quad (\text{B.148})$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\tan \frac{1}{2}I}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}, \quad (\text{B.149})$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{-\tan \frac{1}{2}I}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} \right) - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega}. \quad (\text{B.150})$$

式 (B.147) (Brouwer & Clemence 1961 などを参照) で与えられる  $\dot{\epsilon}$  の表式を考えると、問題が生じる。式の右辺には  $\partial \mathcal{R} / \partial a$  という因数が含まれており、軌道長半径が摂動関数のラプラス係数に陽に現れ、  $\lambda = nt + \epsilon$  より、余弦の項の偏角に平均運動として陰に含まれていることを無視してはいけない。これは、偏微分をとったときに時間因子として現れる。この問題は、次のように時刻ゼロでの平均経度  $\epsilon^*$  を新たに定義することにより、解決される。

$$\frac{d\epsilon^*}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt} + t \frac{dn}{dt}. \quad (\text{B.151})$$

したがって、

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + \frac{d\epsilon^*}{dt}, \quad (\text{B.152})$$

$$\lambda = \int n dt + \epsilon^*. \quad (\text{B.153})$$

これは、次のようにも書ける.

$$\lambda = \rho + \epsilon^*. \quad (\text{B.154})$$

ここで,

$$\frac{d\rho}{dt} = n, \quad \frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{dn}{dt} = -\frac{3n}{2a} \frac{da}{dt} \quad (\text{B.155})$$

あるいは,

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon}. \quad (\text{B.156})$$

この場合,  $\dot{a}$ ,  $\dot{e}$ ,  $\dot{I}$  の展開式に出てくる  $\partial/\partial\epsilon$  の導出を考え,  $\partial/\partial\lambda$  を示す必要がある. 実際には,  $\epsilon$  の変化の効果は小さく, たいてい無視できる.

$m'$  の軌道要素の変化量は, 式 (B.145)-(B.150) の  $\mathcal{R}$  を  $\mathcal{R}'$  で置き換え, プライムなしの変数をプライムつきに変えることで, 同様な式で表される. ラグランジュの惑星方程式の導出は,  $\mathcal{R}$  が外部の物体の摂動によって起こることを仮定していない. よって, これらの方程式を  $m$  の非球形な中心質量に働く摂動を扱うときにも同じように適用することができる. これについては B.11 節で考慮する. 平均摂動関数  $\langle \mathcal{R} \rangle$ ,  $\langle \mathcal{R}' \rangle$  を用いる場合にもこの方程式を同様に適用することができる.

2.9 節より, 軌道要素の変化が, 軌道運動している物体に働く, 動径方向, 接線方向, 動径と接線に直交する方向の力で表されることがわかっている. しかし, ラグランジュの方程式を使うと, この章で扱った摂動関数のフーリエ級数展開に基いて同様な変数を求めることができる. このように, ラグランジュ方程式は, 以下に示す摂動計算の大部分の基礎となる.

## B.9 摂動関数中の偏角の分類

これで, 摂動関数の展開式の物理的意味というテーマに取り組む準備ができた. いままでは, 摂動ポテンシャルを, 角変数の無限個の結合を含む級数として表してきた. では, どの角変数が与えられた問題において重要なのだろうか. つまり, 展開式中の無限個の項のどれが重要でどれを無視できるのだろうか. その問いに対する答えは, ほとんどの場合摂動を受ける軌道の長半径に依存する. 展開式中の余弦偏角にともなう周波数や周期を考えることですべての偏角を分類することができる.

余弦偏角はそれぞれ角変数  $\lambda'$ ,  $\lambda$ ,  $\varpi'$ ,  $\varpi$ ,  $\Omega'$ ,  $\Omega$  の線形結合を含む. 摂動のない場合, 平均経度  $\lambda'$ ,  $\lambda$  はそれぞれ  $n'$ ,  $n$  の速さで線形的に増加する. 対照的に, 他の角

変数は摂動のない場合には定数である。よって、摂動を受ける系を考える場合には  $\lambda', \lambda$  は急激に変化し、他の角変数はゆっくりと変化する。したがって、平均経度を含まない偏角はゆっくりと変化する。これらの偏角によって永年項 (secular : 100 年を表すラテン語 saeculum による)、つまり長周期の項が生じる。これは他の偏角が短周期であることを意味しない。  $\varphi = j_1\lambda' + j_2\lambda + j_3\varpi' + j_4\varpi + j_5\Omega' + j_6\Omega$  で表される一般的な偏角を考えよう。ここで、

$$\lambda' \approx n't + \epsilon' \quad \text{かつ} \quad \lambda \approx nt + \epsilon \quad (\text{B.157})$$

と書けるので (式 (B.144) 参照),  $j_1\lambda' + j_2\lambda \approx (j_1n' + j_2n)t + \text{constant}$  であるから、軌道長半径が

$$j_1n' + j_2n \approx 0 \quad (\text{B.158})$$

をみたせば、この偏角も軌道周期より長い周期を持つことになる。式 (B.158) は平均運動や軌道周期が尽数関係にあるとき成り立つ (1.7 節参照)。このような項を展開式中の共鳴項として分類する。軌道長半径で考えると、この条件は次のように書ける。

$$a \approx (|j_1|/|j_2|)^{\frac{2}{3}} a'. \quad (\text{B.159})$$

軌道長半径依存のため、共鳴項は局所的である。ある特定の角の結合は、摂動を受ける天体のある軌道長半径の場合にはゆっくりと変化するかもしれないが、その結合は別の軌道長半径の場合には急激に変化するだろう。それとは対照的に、永年項は包括的である。

永年でも共鳴でもない偏角は、短周期項を引き起こすと考えられる。実際、(B.7) 節で述べた平均法によって展開式中にある、無限個におよぶ短周期項を無視し、力学が適当な永年項と共鳴項に支配されていることを認めることができる。

以下に、軌道傾斜角が小さい制限楕円三体問題における永年項と共鳴項による運動の予測を示した。この解を数値積分の結果と比較する。ここで、質量  $m$  を無視できるものとし、 $m'$  の軌道が基準平面上に固定された楕円であるとする。式 (B.145), (B.146), (B.149), (B.148) の考察から得た  $\dot{a}, \dot{e}, \dot{\varpi}, \dot{\Omega}$  のラグランジュの方程式の最

低次の形から考え始めることにする. 運動方程式は,

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial \lambda}, \quad (\text{B.160})$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{na^2 e} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial \varpi}, \quad (\text{B.161})$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = +\frac{1}{na^2 e} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial e}, \quad (\text{B.162})$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = +\frac{1}{na^2 \sin I} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial I}. \quad (\text{B.163})$$

ここで,  $\langle \mathcal{R} \rangle$  は外側からの摂動による摂動関数の平均部分である.

### B.9.1 永年項

永年項は平均経度を含まない偏角によって生じる. 式 (B.107) の二次の展開式の直接部より, 永年項は  $j\lambda' - j\lambda$  を含む余弦偏角中で  $j = 0$  とおくことで得られることがわかる. したがって,

$$\langle \mathcal{R}_D \rangle = C_0 + C_1(e^2 + e'^2) + C_2 s^2 + C_3 e e' \cos(\varpi' - \varpi). \quad (\text{B.164})$$

ここで,

$$C_0 = \frac{1}{2} b_{\frac{1}{2}}^{(0)}(\alpha), \quad (\text{B.165})$$

$$C_1 = \frac{1}{8} [2\alpha D + \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(0)}(\alpha), \quad (\text{B.166})$$

$$C_2 = -\frac{1}{2} \alpha b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha), \quad (\text{B.167})$$

$$C_3 = \frac{1}{4} [2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\alpha). \quad (\text{B.168})$$

$\langle \mathcal{R} \rangle$  には  $ss'$  や  $s'^2$  の項が含まれないことに注意する. これは,  $s' = 0$  とおき,  $C_0$  が  $\alpha$  のみの関数であるとしたからである. さらに,  $\mathcal{R}_E$  (式 (B.110)) の各項を見ると, すべての偏角が少なくとも一つは平均経度を含むことから, 摂動関数の間接部からの永年寄与はないことがわかる. したがってラグランジュの方程式の低次の部

分は,

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{\text{sec}} = 0, \quad (\text{B.169})$$

$$\left(\frac{de}{dt}\right)_{\text{sec}} = n\alpha(m'/m_c)C_3e' \sin(\varpi - \varpi'), \quad (\text{B.170})$$

$$\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)_{\text{sec}} = n\alpha(m'/m_c)[2C_1 + C_3(e'/e) \cos(\varpi - \varpi')], \quad (\text{B.171})$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{\text{sec}} = n\alpha(m'/m_c)(C_2/2). \quad (\text{B.172})$$

ここで, 中心物体の質量を  $m_c$  とし,  $\mu' = \mathcal{G}m' \approx n^2 a^3 (m'/m_c)$  を使った.  $e \gg e'$  とすると, これらの方程式の近似解は次のようになる.

$$a = a_0, \quad (\text{B.173})$$

$$e = e_0 - \frac{n\alpha}{\dot{\varpi}}(m'/m_c)C_3e'[\cos \varpi_0 - \cos \varpi], \quad (\text{B.174})$$

$$\varpi = \varpi_0 + n\alpha(m'/m_c)2C_1t, \quad (\text{B.175})$$

$$\Omega = \Omega_0 + n\alpha(m'/m_c)(C_2/2)t. \quad (\text{B.176})$$

下付き文字 0 は各量の初期 ( $t = 0$ ) 値を表しており,  $\varpi' = 0$  としている. これらの解は  $a$  には永年変化がないことを示し,  $e$  は振幅

$$(\Delta e)_{\text{sec}} = |(n\alpha/\dot{\varpi})(m'/m_c)C_3e'| \quad (\text{B.177})$$

で正弦関数的に変化することを示す. また,  $\varpi$  と  $\Omega$  は  $C_1, C_2$  の符号に応じて, 時間とともに線形的に増加, あるいは減少することを示す.

図 B.3a-d に初期値  $a_0 = 0.192$ ,  $e_0 = 0.1$ ,  $\varpi_0 = 130^\circ$ ,  $\Omega_0 = 200^\circ$ ,  $\lambda_0 = 300^\circ$ ,  $\lambda' = 0^\circ$  での  $a' = 1$ ,  $e' = 0.048$ ,  $\varpi' = 0$ ,  $I' = 0$ ,  $m'/m_c = 1/1047.355$  との楕円制限三体問題の運動方程式の数値積分の結果を示した. 式 (B.166)-(B.168) 中に  $\alpha = a/a' = 0.192$  を代入すると,  $C_1 = 0.0148335$ ,  $C_2 = -0.0593339$ ,  $C_3 = -0.00708688$ . ここで,  $2C_1 = -C_2/2$ . ここで用いた質量比は木星 - 太陽の比であり, 木星によって摂動を受ける小惑星の運動を再現するように積分したので, 図中の時間は木星の周期で表してある. しかし, 強い共鳴を避けるため, 軌道長半径は木星から離れるように故意に選択した. このような条件下では, 永年摂動が運動の良い近似を与えるはずである.

この結果から, 20,000 木星周期にわたる積分における調和はかなり良いことがわかる.  $a$  にずれが見られるが, これらのずれは非常に小さい; 図 B.3a のスケー

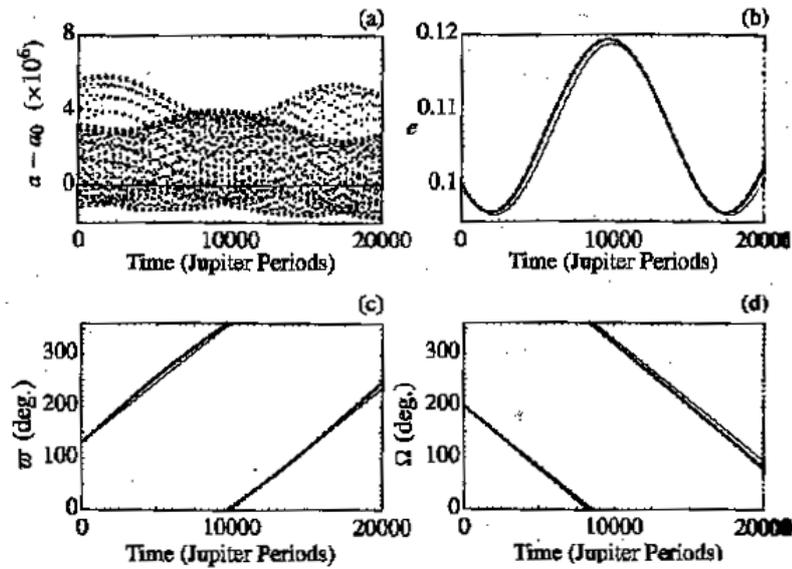


図 B.3: 完全な数値積分 (太線) と解析理論からの予測値 (細線) の比較. 主に木星からの永年摂動を受ける試験粒子の変化. (a) は軌道長半径, (b) は離心率, (c) は近点経度, (d) は昇交点経度.

ルは拡大したものである. 軌道長半径はほぼ一定であることから, 一定値  $\alpha$  に対するラプラス係数の評価は妥当である. 離心率は予想通りに変化した. また,  $\omega$  は時間とともに線形的に増加し ( $C_1 > 0$  による),  $\Omega$  は同じ速さで線形的に減少する ( $2C_1 = -C_2/2$  による; 式 (B.175), (B.176) 参照). 近点(あるいは節)の順行運動を順行運動といい, 逆を逆行運動という.  $\omega$  と  $\Omega$  の振舞いは摂動関数の永年項の性質上, 自然な結果である.

これまで無視してきた摂動関数の無限個の短周期項があるため, 完全な積分結果とこの解析理論による予測には差があるはずである. 図 B.3a より, 軌道長半径に理論から予測された定数値からの小さいが検出可能な短周期の変化が存在することがわかる. 図 B.4 では, 「観測された」(つまり数値積分で求めた) 離心率と理論から計算された値の差を, 1,000 木星周期にわたる積分期間における時間の関数として示した. ここでも完全積分に必ず含まれる短周期項の効果を知ることができる.

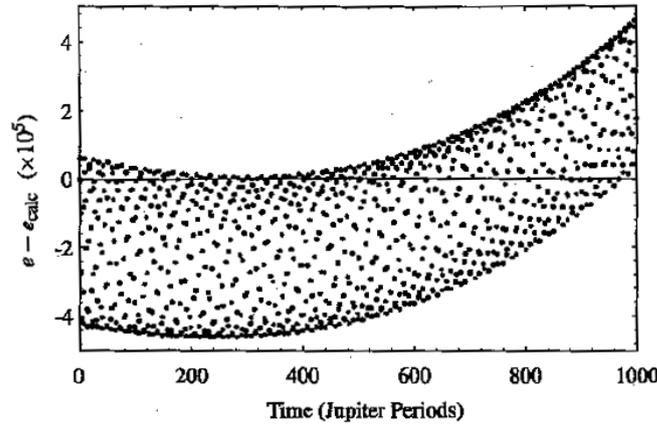


図 B.4: 試験粒子についての観測値と計算値の差を時間の関数として表した. データは木星の一周期ごとにとったものであり,  $e$  の短周期変化が示されている.

### B.9.2 共鳴項

今度は, 例えば, 3.27AU で木星の摂動を受けている小惑星の運動に着目するとする. 木星の軌道半長軸は 5.20 AU であるから, ケプラーの第三法則より周期の比は  $(3.27/5.20)^{3/2} \approx 0.499$  である. したがって,  $2n' \approx n$  という関係が得られ, 共鳴項の重要性が予想される. したがって, 2:1 の共鳴の近傍では, 上記で議論した永年項だけでなく, 摂動関数の展開式中の  $2\lambda' - \lambda$  を含む項 (つまりこの位置における共鳴項) についても考える必要がある.

式 (B.107) より, 二次の展開式の  $\langle \mathcal{R} \rangle / a'$  にはある  $j$  の値に対して  $2\lambda' - \lambda$  を含む余弦偏角の項が二つある. 平均摂動関数中で意味をもつ直接部は

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_D \rangle = & C_0 + C_1(e^2 + e'^2) + C_2(s^2 + s'^2) + C_3ee' \cos(\varpi - \varpi') \\ & + C_4e \cos(2\lambda' - \lambda - \varpi) + C_5e' \cos(2\lambda' - \lambda - \varpi'). \end{aligned} \quad (\text{B.178})$$

新たに出てきた定数  $C_4, C_5$  は次のように与えられる.

$$C_4 = \frac{1}{2}[-4 - \alpha D]b_{\frac{1}{2}}^{(2)}(\alpha), \quad (\text{B.179})$$

$$C_5 = \frac{1}{2}[3 + \alpha D]b_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\alpha). \quad (\text{B.180})$$

これらの二つの共鳴偏角のうち, 後者は  $\dot{e}, \dot{\varpi}, \dot{\Omega}$  には寄与しないが,  $\dot{a}$  には影響を与える. 式 (B.110) より間接部から出てくる同じ角変数に対しては  $-2\alpha e'$  の寄

与もある.

ラグランジュの方程式の近似形を用いると 2 : 1 共鳴による  $a, e, \varpi, \Omega$  の変化は

$$\begin{aligned} \left(\frac{da}{dt}\right)_{\text{res}} &= 2n\alpha a(m'/m_c)C_4e \sin(2\lambda' - \lambda - \varpi) \\ &\quad + 2n\alpha a(m'/m_c)(C_5 - 2\alpha)e' \sin(2\lambda' - \lambda - \varpi'), \end{aligned} \quad (\text{B.181})$$

$$\left(\frac{de}{dt}\right)_{\text{res}} = n\alpha(m'/m_c)C_4 \sin(2\lambda' - \lambda - \varpi), \quad (\text{B.182})$$

$$\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)_{\text{res}} = n\alpha(m'/m_c)(C_4/e) \cos(2\lambda' - \lambda - \varpi), \quad (\text{B.183})$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{\text{res}} = 0. \quad (\text{B.184})$$

これらの共鳴方程式に対して近似解を考えると

$$\begin{aligned} a &= a_0 - \frac{2n\alpha a(m'/m_c)C_4e}{2n' - n - \dot{\varpi}} [\cos(2\lambda' - \lambda - \varpi) - \cos(\lambda_0 + \omega_0)] \\ &\quad - \frac{2n\alpha a(m'/m_c)(C_5 - 2\alpha)e'}{2n' - n} [\cos(2\lambda' - \lambda - \varpi) - \cos \lambda_0], \end{aligned} \quad (\text{B.185})$$

$$e = e_0 + \frac{n\alpha(m'/m_c)C_4}{2n' - n - \dot{\varpi}} [\cos(2\lambda' - \lambda - \varpi) - \cos(\lambda_0 + \omega_0)], \quad (\text{B.186})$$

$$\varpi = \varpi_0 + \frac{n\alpha(m'/m_c)(C_4/e)}{2n' - n - \dot{\varpi}} [\sin(2\lambda' - \lambda - \varpi) + \sin(\lambda_0 + \omega_0)], \quad (\text{B.187})$$

$$\Omega = \Omega_0. \quad (\text{B.188})$$

これらの解を得るのに,  $\dot{a}, \dot{e}, \dot{\varpi}$  の方程式の右辺で時間変化するのは余弦偏角中の角変数のみとし,  $\varpi$  は永年での理論から決まる定数  $\dot{\varpi}$  で時間とともに線形的に増加するものとした. これらの方程式は,  $a, e, \varpi$  が次のように表される最大振幅で正弦変化することを示唆している.

$$(\Delta a)_{\text{res}} = 2n\alpha a(m'/m_c) \left( \left| \frac{C_4e}{2n' - n - \dot{\varpi}} \right| + \left| \frac{(C_5 - 2\alpha)e'}{2n' - n} \right| \right), \quad (\text{B.189})$$

$$(\Delta e)_{\text{res}} = \left| \frac{n\alpha(m'/m_c)C_4}{2n' - n - \dot{\varpi}} \right|, \quad (\text{B.190})$$

$$(\Delta \varpi)_{\text{res}} = \left| \frac{n\alpha(m'/m_c)(C_4/e)}{2n' - n - \dot{\varpi}} \right|. \quad (\text{B.191})$$

これらは近似解にすぎず, 特に軌道長半径については二つの共鳴偏角にともなう項の各振幅を足したものである.

図 B.5a-d は運動方程式の完全積分の結果と, 上記に述べた永年理論と共鳴理論を組み合わせたものから予測した変化の比較である. B.9.1 節と同じ初期値で計

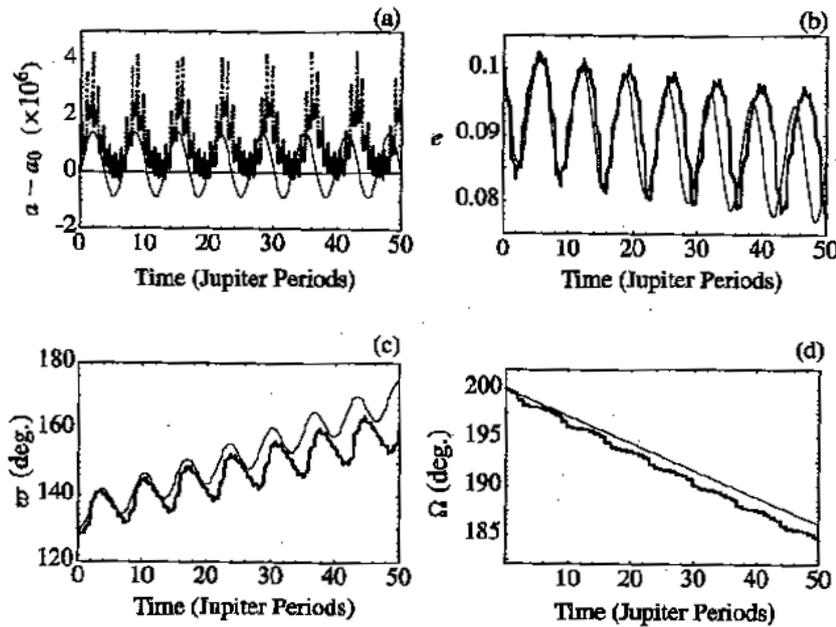


図 B.5: 完全な数値積分 (点線あるいは太線) と解析理論からの予測値 (細線) の比較. 主に木星からの 2 : 1 共鳴近傍の摂動と永年摂動を受ける試験粒子の変化. (a) は軌道長半径, (b) は離心率, (c) は近点経度, (d) は昇交点経度.

算を行った. ただし, 試験粒子を木星との 2 : 1 共鳴の近傍 (ただし共鳴にはない) の位置におくため,  $a = 0.6$  とした. このとき,  $C_1 = 0.314001$ ,  $C_2 = -1.25600$ ,  $C_3 = -0.447005$ ,  $C_4 = -1.04332$ ,  $C_5 = 1.55230$  である.  $C_1$ ,  $C_2$  の絶対値は  $a = 0.192$  を用いた永年項での例に比べて  $\sim 20$  のファクターで増加したことに注意する. これは木星からの距離が減り, 永年項効果が増したことによる. 図 B.5 より,  $a$ ,  $e$ ,  $\omega$  の振幅と変化の振動数は予測値と近く, 予測値と数値計算結果はよく合っている. いくらか違いはあるだろう. 一つにはラグランジュの方程式の近似のためであり, もう一つには微分方程式を積分するため, 実際には共鳴によって明らかに変化している式 (B.181) - (B.183) の右辺の  $a$ ,  $e$  の値を定数としたことによる.

式 (B.189) - (B.191) より, すべての振幅に  $2n' - n - \dot{\omega}$  (これは共鳴偏角  $2\lambda' - \lambda - \omega$  の時間導関数である) という形の分母が含まれていることに着目する. これは各要素の変化が共鳴に近付くとともにさらに大きくなることを示唆しているが, これはこの単純な解析モデルの前提が破綻することを意味する. 8 章でより完全に近い共鳴モデルを考える.

## B.9.3 短周期項と微小振幅項

摂動関数の形を知ることで、意味を持ちそうな永年偏角と共鳴偏角を分離することができる。便宜上、平均経度を含む他の項はすべて短周期であり、それらの効果は平均してゼロになるものとみなしている。これが平均法である。図 B.4, B.5 での解析理論と完全積分との比較はこの方法が良い近似であることを示している。したがって、短周期項は存在しているものの、その効果は少なくともこれらの例においては無視できそうである。

B.9.2 節では小惑星の摂動を受けた運動をどの項が支配するかを知るために整数  $j_1, j_2$  が  $j_1 n' + j_2 n \approx 0$  を満たす項を見つけなければならなかった。これらは式 (B.189) - (B.191) の分母を小さくするからである。したがって、3.27 AU 付近での支配的な項は  $j_1 = \pm 2$  と  $j_2 = \mp 1$  をもつ項であろう。このとき  $2n' - n \approx 0$  となるからである。しかし、これは同様に分母を微小にする  $j_1 = \pm 4, \pm 6, \dots$  と  $j_2 = \mp 2, \mp 3, \dots$  の項についても考えなければいけないことを示唆している。この共鳴運動に寄与する項が無数存在するのだろうか。単純な整数論によれば、二つの実数(この場合は二つの平均運動)の比は必ず有理数で任意の精度まで近似できる。どのような軌道長半径での摂動関数に対しても振幅の大きな項をもたらすような共鳴状態が無数存在するのだろうか。

これらのパラドクスは摂動関数の「強さ」である  $S$  の形を考えることで解決する(式 (B.143) 参照)。簡単のため、二次元円制限三体問題での平均運動が尽数関係に近い状態にある場合を考える。共鳴偏角を次のようにおく。

$$\varphi = (j+k)\lambda' - j\lambda - k\varpi. \quad (\text{B.192})$$

尽数関係に近く、次のようにみなせるとする。

$$(j+k)n' - jn \approx 0. \quad (\text{B.193})$$

$j, k$  は整数である。これは  $(j+k)\lambda' - j\lambda - k\varpi$  という形を含む偏角はゆつくりと変化し、長周期で振幅の大きな摂動を引き起こすことを意味する。たとえば、2:1 共鳴を考えると、 $j = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  である。しかし、 $j$  と  $k$  の各対に対して起こりうる共鳴は無数存在するが、そのほとんどは弱い。これは  $S \propto e^{|k|}$  (式 (B.143) 参照) と  $e < 1$  による。したがって、 $k$  の増加とともに「強さ」は減少する。結果として、これらの他の項は存在するが振幅の小さいものである。似た偏角を使うと、いつも何らかの共鳴近傍にあるという問題を解決すること

ができる。例えば、21 : 10 共鳴は 2 : 1 共鳴に近いが、このとき  $S \propto e^{11}$  であり、共鳴の効果は小さい。したがって離心率と軌道傾斜角の高次に影響を与える「共鳴付近」の項は他の短周期項と同様に切り捨てられる。

共鳴の「オーダー」 $k$  は摂動関数の偏角のオーダー  $N = |j_1 + j_2|$  と同等である。よって、二次の共鳴に寄与しうるすべての偏角を求めるならば付録 B で示した摂動関数の展開式の D2 と E2 (あるいは I2) の偏角を見なければならない。他の偏角も考慮に入れなければならない場合もあるだろう。軌道要素の四次のオーダーの展開式を必要とするなら D4 と E4 (あるいは I4) の偏角も調べなければならないからである。同様に、永年項は平均経度を含まないため、付録 B の D0 の偏角を見るだけでよい。

## 謝辞

本論文を作成するにあたり, 多くの方のお世話になりました. 倉本圭助教授には丁寧な指導をしていただきました. 福井隆さんには, 卒論用の L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X ひな型ファイルをはじめ, 多くのものをいただきました. 惑星物理学研究室および地球流体力学研究室の皆様には, 多くの助言や励ましをいただきました. この場を借りて感謝の気持ちを表したいと思います. ありがとうございます.

## 参考文献

- Boquet, F., 1889, Développement de la fonction perturbatrice, calcul des terms du huitième ordre, *Ann. Obs. Paris, Mém.* **19**, B1-75.
- Brouwer, D. and Clemence, G.M., 1961, *Methods of Celestial Mechanics* (Academic Press, New York).
- Brown, E.W. and Shook, C.A., 1933, *Planetary Theory* (Cambridge University Press, Cambridge).
- Ellis, K.M. and Murray, C.D., 1999, The disturbing function in solar system dynamics, *Icarus* (submitted for publication).
- Hughes, S. 1981, The computation of tables of Hansen coefficients, *Celest. Mech.* **25**, 101-107.
- Kaula, W.M., 1961, Analysis of gravitational and geometric aspects of geodetic utilization of satellites, *Geophys. J.* **5**, 104-133.
- Kaula, W.M., 1962, Development of the lunar and solar disturbing functions for a close satellite, *Astron. J.* **67**, 300-303.
- 木下宙, 1998, 天体と軌道の力学, (東京大学出版会).
- 国立天文台, 2003, 理科年表 平成 16 年, (丸善株式会社).
- Le Verrier, U.J.-J., 1855, Développement de la fonction qui sert de base au calcul des perturbations des mouvements des planètes, *Ann. Obs. Paris, Mém.* **1**, 258-331.
- 宮下精二, 2000, 裳華房テキストシリーズ-物理学 解析力学, (裳華房).
- Murray, C.D., 1985, A note on Le Verrier's expansion of the disturbing function, *Celest. Mech.* **36**, 163-164.
- Murray, C.D. and Dermott, S.F., 1999, *Solar System Dynamics*, (Cambridge University Press, Cambridge).

- Newcomb,S.,1895,A development of the perturbative function in cosines of multiples of the mean anomalies and of angles between the perihelia and common node and in powers of the eccentricities and mutual inclination,*Astron.Papers Am.Ephem.* **5**,5-48.
- Peirce,B.,1849,Development of the perturbative function of planetary motion,*Astron.J.***1**,1-8,31-36.
- Plummer,H.C.,1918,*An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy*(Cambridge University Press,Cambridge).
- Roy,A.E.,1988,*Orbital Motion*(Adam Hilger,Bristol).