

目次

3	熱力学	1
3.1	乾燥空気のエントロピー	1
3.2	飽和空気の鉛直運動	2
	Appendix (A.1) 導出	5
	Appendix (A.2) 導出	6
	Appendix (A.3) 導出	6
3.3	テフィグラム	9
3.4	気柱の全ポテンシャルエネルギー	11
3.5	有効位置エネルギー	12
3.6	帯状エネルギーと渦エネルギー	19

3 熱力学

3.1 乾燥空気のエントロピー

1章では惑星大気の運動に対し熱力学第1法則を適用し、乾燥大気の断熱温度減率を導いた。(1.7)の dq に TdS (S はエントロピー)を、 V に理想気体の状態方程式をそれぞれ代入すると

$$dS = c_p \frac{dT}{T} - \frac{R}{M_r} \frac{dp}{p} \quad (3.1)$$

が得られる。さらに両辺を積分することで単位質量あたりのエントロピーの式:

$$S = c_p \ln T - RM_r^{-1} \ln p + \text{constant} \quad (3.2)$$

を得る。

気圧 p 、温度 T の気塊を断熱的に(すなわち S は一定)標準気圧 p_0 (100kPa)まで変化させた時の気塊の温度 θ はその気塊の温位 (*potential temperature*) として知られる。(3.2)から

$$c_p \ln \theta = c_p \ln T - RM_r^{-1} \ln p + RM_r^{-1} \ln p_0 \quad (3.3)$$

である。ここで理想気体では $c_p - c_v = R/M_R$ であることを用いると、

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa, \quad \kappa = \frac{c_p - c_v}{c_p} \quad (3.4)$$

を得る。地球の乾燥空気では $\kappa = 0.288$ という値をとる。

また(3.3)を

$$S = c_p \ln \theta + a (= \text{constant}) \quad (3.5)$$

と書き直した式の第1項は温位の概念についてより容易な理解を得る意味で有益である¹。

¹エントロピー自身は直接観測することはできない。だが、温位を導くことで、エントロピーを求めることができる。

3.2 飽和空気の鉛直運動

大気構造は含有する凝結可能な気体に大きく影響をうけるかもしれない。地球大気の場合、水蒸気はとりわけ重要である。

水蒸気を含む空気の鉛直運動を考える。不飽和の空気であればその熱力学的パラメータは乾燥空気のそれとわずかな違いしか無い(問 3.1 参照)。そのため不飽和空気が上昇すると乾燥空気とほぼおなじく $10\text{K}/\text{km}$ の割合で冷える。上昇している間水蒸気の混合比 (*mixing ratio*²) は一定だが、比湿 (*relative humidity*³) は増加し、100% に達するかもしれない。このときの高度を凝結高度 (*condensation level*) という。飽和した空気がさらに上昇を続けると、余剰な水蒸気は凝結し液体の水となって落下する。このとき凝結過程に伴う潜熱解放が生じるはずである。

1.4 節の仮定に加え、気塊が液体の水を含み、すなわち飽和していて、蒸発と凝結が平衡を維持していると仮定する。1g の乾燥空気と mg の水蒸気 (m は飽和混合比 (*saturation mixing ratio*)) と $(\xi - m)g$ の液体の水を含む気塊を考える。乾燥空気のエントロピーは (3.2) で与えられる。水蒸気と液体の水のエントロピーは温度 T の ξg の水のエントロピーに、 mg の水に換算した水蒸気のエントロピー Lm/T を加えて表現される⁴。

$$S = (c_p + \xi c) \ln T - \frac{R}{M_{ra}} \ln(p - e) + \frac{Lm}{T} + \text{constant}, \quad (3.6)$$

ただし c は水の比熱、 e は飽和水蒸気圧、 L は潜熱でこれは当然温度とともに変化する。(3.6) を微分形で表し、湿潤空気に対して静水圧の式

$$dp = -g\rho_a(1 + \xi)dz \quad (3.7)$$

を代入すると、断熱過程において

$$(c_p + \xi c) \frac{dT}{T} + d\left(\frac{Lm}{T}\right) + \frac{R}{M_{ra}(p - e)} \frac{de}{dT} dT + \frac{g}{T}(1 + \xi)dz = 0 \quad (3.8)$$

が成り立つ。空気 (密度 ρ_a , 分子量 M_{ra}) と水蒸気 (密度 ρ_v , 分子量 M_{rv}) の単位質量あたりの状態方程式はそれぞれ

$$p - e = \rho_a RT / M_{ra}, \quad (3.9)$$

$$e = \rho_v RT / M_{rv} \quad (3.10)$$

と書ける。このとき混合比 m は温度と同様に大気圧にも依存する。

$$m = \frac{\rho_v}{\rho_a} = \left(\frac{e}{p - e}\right) \frac{M_{rv}}{M_{ra}} \approx \frac{e\varepsilon}{p}, \quad (3.11)$$

²任意の体積中に含まれる水分子の個数とその他の分子の個数の比 (体積混合比)、もしくは任意の体積中に含まれる水蒸気の質量と空気の質量の比 (質量混合比) を指す。

³その空気の温度における飽和水蒸気圧と実際の水蒸気圧の比を指す。

⁴後出の Appendix で詳しい導出を行う。

最後の近似は下層大気において $e \ll p$ であるためである。また、

$$\varepsilon = M_{rv}/M_{ra} = 0.622$$

となる。

(3.11) を微分すると、

$$\frac{dm}{dz} = \frac{\varepsilon}{p} \frac{de}{dT} \cdot \frac{dT}{dz} - \frac{\varepsilon e}{p^2} \cdot \frac{dp}{dz} \quad (3.12)$$

となる。(3.12) を (3.8) へ代入し、かつ空気が飽和に達した状態、すなわち $\xi = m$, を仮定し、さらにクラウジウス-クラペイロンの式

$$\frac{de}{dT} = \frac{LeM_{rv}}{RT^2} \quad (3.13)$$

を用いることで以下の式を得る。

$$\begin{aligned} -\frac{dT}{dz} &= \Gamma_s \\ &= \frac{g}{c_p} \cdot \frac{\{1 + (LeM_{rv}/pRT)\}\{1 + (e\varepsilon/p)\}}{[1 + (\varepsilon e/p c_p)\{c + (dL/dT)\} + (\varepsilon e L^2 M_{rv}/c_p p RT^2)]}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

右辺の分母の真中の項に代表的な値を代入すると(問題 3.4 参照), その他の項に比べ無視できる。また $e \ll p$ から分子の 2 番目の括弧内は ≈ 1 と書ける。よって (3.14) は

$$\Gamma_s = \Gamma_d \left[1 + \frac{LeM_{rv}}{pRT} \right] \left[1 + \frac{LeM_{rv}}{pRT} \cdot \frac{\varepsilon L}{c_p T} \right]^{-1} \quad (3.15)$$

となる⁵。このとき Γ_s は常に Γ_d より小さく、 $0.3\Gamma_d$ から Γ_d の範囲の値をとる⁶。実際の値は問題 3.3 の式から計算するか図 3.1 から読み取ることによって得られる。(3.15) のより簡単な導出については問題 3.2 を参照のこと。

液体の水を含む飽和湿潤空気の鉛直方向の安定性については 1.4 節で行った乾燥空気のそれとまったく同様に考えることができる。すなわち安定な状態では $-\frac{dT}{dz} < \Gamma_s$, 不安定な状態では $> \Gamma_s$ である。ここで液体の水を含まないちょうど飽和状態にある空気は上昇する際の安定な状態は Γ_s に依存し、下降する際は Γ_d に依存することに注意しよう。空気は下降していくと不飽和状態になるためである。

実際の大気においてこれまで考えた仮定、液体の水が空気とともに上昇している、は必ずしもあてはまらない。だが、もし凝結によって生じた生成物が上昇中に落下したとしても最終的な解にほとんど差は生じない⁷。鉛直運動を考える上で周辺大気の状態が気塊の上

⁵ Appendix 3 において詳しい導出を行う。

⁶ Γ_s が常に Γ_d より小さいことは問題 3.5 において示される。

⁷ (3.15) を求める際に用いた条件として $\xi = m$ を仮定した。これは凝結物が存在しない空気塊を考えたことに等しい。もしも生じた凝結物が一緒に上昇するならば、密度の項が大きくなり、また違う解が得られると思われる。

昇や移動に影響を受けないことも仮定してきた。だが気塊の運動は当然周辺大気の運動を補わなければならない⁸。だが、通常大気の上昇域に比べ下降域のほうがはるかに広いので、パーセル法と呼ばれるこの方法は、一般に良い近似であり一般的な予測解析法として使われている⁹。

⁸このように気塊の運動によって周辺大気に引き起こされる運動を補償流という (浅井富雄, 1981:大気科学講座 2 雲や降水を伴う大気, 46p)。

⁹大気の上昇域に比べ下降域のほうがはるかに広いというのは先のすなわち安定な状態では $-\frac{dT}{dz} < \Gamma_s$, 不安定な状態では $> \Gamma_s$ である。ここで液体の水を含まないちょうど飽和状態にある空気は上昇する際の安定な状態は Γ_s に依存し, 下降する際は Γ_d に依存することに注意しよう。空気は下降していくと不飽和状態になるためである。と関連している?

Appendix 1 (3.6) 導出

(3.6) を導出する. 話を進めるにあたってまず, 2 種類の気体 1,2 と気体 2 の凝縮相からなる系のエントロピーを考える. 今, 気体 2 とその凝縮相は平衡状態にあるとする. 系全体の体積は V , 温度 T とする. このとき気体 1 のエントロピーを S_1 , 気体 2 のエントロピーを S_{2v} , そして凝縮相のエントロピーを S_{2c} とすると, この系全体のエントロピー S は

$$S = S_1 + S_{2v} + S_{2c} \quad (\text{A.1})$$

と書ける. エントロピーは示量変数であることから, エントロピーは質量に比例するので, この式の右辺を単位質量あたりのエントロピーを用いて

$$S = m_1 s_1 + m_{2v} s_{2v} + m_{2c} s_{2c} \quad (\text{A.2})$$

と書き下せる. ただし m_1, m_{2v}, m_{2c} は気体 1, 気体 2, 凝縮相の質量, ただし s_1, s_{2v}, s_{2c} は気体 1, 気体 2, 凝縮相の単位質量あたりのエントロピーである.

まず (A.2) の第 1 項についてだが, これは本文 (3.2) から

$$m_1 s_1 = m_1 c_{p1} \ln T - \frac{m_1}{M_{r1}} R \ln p_1 + C_1$$

と書ける. ここで c_{p1} は気体 1 の定圧比熱, p_1 は気体 1 の分圧, C_1 は積分乗数である.

次に第 3 項について考える. 液体の体積変化は気体の体積変化に比べ無視できると考えると, (3.2) 式から

$$m_{2c} s_{2c} = m_{2c} (\ln T + C_{2c})$$

と書ける. ここで C_{2c} は積分乗数である.

次に第 2 項についてだが, 気相と液相のエントロピーの差を考えると

$$s_{2v} - s_{2c} = \frac{L}{T} \quad (\text{A.3})$$

となることから,

$$\begin{aligned} m_{2v} s_{2v} &= m_{2v} \frac{L}{T} + m_{2v} s_{2c} \\ &= m_{2v} \frac{L}{T} + m_{2v} (\ln T + C_{2c}) \end{aligned}$$

と書ける¹⁰. よってこれらを (A.2) に代入して, この系全体のエントロピーは

$$\begin{aligned} S &= m_1 c_{p1} \ln T - \frac{m_1}{M_{r1}} R \ln p + m_{2v} \frac{L}{T} + (m_{2v} + m_{2c}) \ln T \\ &\quad + C_1 + (m_{2v} + m_{2c}) C_{2c} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

¹⁰(A.3) については Appendix 2 参照.

と書ける. 気体 1 を乾燥空気, 気体 2 を水蒸気, 凝結相を液体の水として適宜当てはめると,

$$S = (c_p + \xi c) \ln T - \frac{R}{M_{ra}} \ln(p - e) + \frac{mL}{T} + \xi C_{\text{水}} + \text{const.} \quad (\text{A.5})$$

と書ける. ここで積分乗数 $C_{\text{水}}$ は C_{2c} を書き直したものである¹¹. これは (??) 式に他ならない.

Appendix 2 (A.3) 導出

(A.3) を導出する. 気体 2 の液相と固相は平衡状態にあることから各々の化学ポテンシャルは等しい

$$\mu_{2v}(P, T) = \mu_{2c}(P, T). \quad (\text{B.1})$$

上の式を単位質量あたりのエンタルピー h_* を用いて書き換えると

$$h_{2v} - Ts_{2v} = h_{2c} - Ts_{2c}. \quad (\text{B.2})$$

となる. 右辺にエンタルピー, 左辺に Ts_* をまとめると

$$Ts_{2v} - Ts_{2c} = h_{2v} - h_{2c}. \quad (\text{B.3})$$

と書ける. ここで右辺は単位質量あたりの潜熱 L に等しいので, 両辺を T で割ると

$$s_{2v} - s_{2c} = \frac{L}{T} \quad (\text{B.4})$$

Appendix 3 (3.14) 導出

(3.14) を導出する. 方針は, (3.8) の各項に dT, dz が現れるよう変形し, dT/dz を導く. (3.8) 中の左辺第 2 項を分解すると

$$d\left(\frac{mL}{T}\right) = -\frac{mL}{T^2}dT + \frac{m}{T}\frac{dL}{dT}dT + \frac{L}{T}dm \quad (\text{C.1})$$

と書ける. ここで, (3.12) と (3.7) から

$$\begin{aligned} dm &= \frac{\varepsilon}{p} \frac{de}{dT} \cdot dT - \frac{\varepsilon e}{p^2} \cdot dp \\ &= \frac{\varepsilon}{p} \frac{de}{dT} \cdot dT + \frac{\varepsilon e}{p^2} \cdot g\rho_a(1 + \xi)dz \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

¹¹ $\xi C_{\text{水}}$ の項は, ξ が変数である場合は注意しなくてはならない. つまり液体の水のエントロピーを決める時に, $C_{\text{水}}$ をきちんと考えなくてはならないということである. ここで考えた系では気塊が含有する水の総質量は一定なので, 本文ではその他の積分乗数とひとくくりにして表している.

を得る. (C.1), (C.2) を (3.8) に代入し, さらに $1/T$ で割ることで

$$0 = \left\{ c_p + \xi c + \frac{TR}{M_{ra}(p-e)} \frac{de}{dT} - \frac{mL}{T^2} + m \frac{dL}{dT} + L \frac{\varepsilon}{p} \frac{de}{dT} \right\} dT \\ + \left\{ g(1+\xi) + L \frac{\varepsilon e}{p^2} \cdot g \rho_a (1+\xi) \right\} dz \quad (\text{C.3})$$

を得る. ここでクラウジウス・クラペイロンの式 (3.13) を用いて $*dT$ の項は

$$\left\{ c_p + \xi c + \frac{TR}{M_{ra}(p-e)} \frac{de}{dT} - \frac{mL}{T^2} + m \frac{dL}{dT} + L \frac{\varepsilon}{p} \frac{de}{dT} \right\} dT \\ = \left\{ c_p + \xi c + \frac{TR}{M_{ra}(p-e)} \frac{LeM_{rv}}{RT^2} - \frac{mL}{T^2} + m \frac{dL}{dT} + L \frac{\varepsilon}{p} \frac{LeM_{rv}}{RT^2} \right\} dT \\ = \left\{ c_p + \xi c + \frac{e}{(p-e)} \frac{M_{rv}L}{M_{ra}T} - \frac{mL}{T^2} + m \frac{dL}{dT} + L \frac{\varepsilon}{p} \frac{LeM_{rv}}{RT^2} \right\} dT \\ = \left\{ c_p + \xi c + \frac{mL}{T} - \frac{mL}{T} + m \frac{dL}{dT} + L \frac{\varepsilon}{p} \frac{LeM_{rv}}{RT^2} \right\} dT,$$

ここで $\xi = m$ より

$$\left\{ c_p + \xi c + m \frac{dL}{dT} + L \frac{\varepsilon}{p} \frac{LeM_{rv}}{RT^2} \right\} dT \\ = c_p \left\{ 1 + \frac{m}{c_p} \left(c + \frac{dL}{dT} \right) + \frac{\varepsilon L^2 M_{rv}}{c_p p RT^2} \right\} dT \quad (\text{C.4})$$

となる. 一方 dz の項は

$$\left\{ g(1+\xi) + L \frac{\varepsilon e}{p^2} \cdot g \rho_a (1+\xi) \right\} dz \\ = g(1+\xi) \left\{ 1 + mL \frac{\rho_a}{p} \right\} dz,$$

ここで (3.11) より

$$g(1+\xi) \left\{ 1 + mL \frac{\rho_a}{p} \right\} dz \\ = g(1+\xi) \left\{ 1 + L \frac{\rho_v}{\rho_a} \frac{\rho_a}{p} \right\} dz \\ = g(1+\xi) \left\{ 1 + L \frac{\rho_v}{p} \right\} dz,$$

さらに (3.10) を用いて

$$g(1+\xi) \left\{ 1 + L \frac{\rho_v}{p} \right\} dz \\ = g(1+\xi) \left\{ 1 + L \frac{eM_{rv}}{RT} \frac{\rho_a}{p} \right\} dz \\ = g(1+\xi) \left\{ 1 + \frac{LeM_{rv}}{pRT} \right\} dz \quad (\text{C.5})$$

となる. (C.4), (C.5) から

$$-\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_p} \cdot \frac{\{1 + (LeMrv/pRT)\}\{1 + (e\varepsilon/p)\}}{[1 + (\varepsilon e/pc_p)\{c + (dL/dT)\} + (\varepsilon eL^2Mrv/c_p pRT^2)]}. \quad (\text{C.6})$$

を得る. これは (3.14) にほかならない.

3.3 テフィグラム

テフィグラムとは熱力学過程を表すグラフであり、特に大気の物理過程を表すのに適している。名前は $T-\phi$ グラフに由来する。このグラフが温度とエントロピーの関係を示しているからである。 ϕ という文字はエントロピーを表すのに良く用いられている。(ここでは S を用いている) 熱力学過程を示すグラフの縦軸としては、 S の代わりに θ を乾燥空気の温位として $\ln \theta$ をとることも出来る。したがってグラフは基本的には、温度 T に対して $\ln \theta$ の値をプロットしたものになる。補助的にこの他の物理量の等値線もテフィグラム上に図示することも出来る。すなわち；

1. (3.4) 式の圧力 p は T, θ の関数であり等圧線、又は圧力一定の曲線群を図示できる。多くの活用例において、 T が圧力 p の関数として図示出来るような場合、テフィグラムを利用すると便利である。
2. 乾燥空気の断熱線は θ 一定の直線になる。
3. 飽和空気の断熱線は (3.15) 式の関係から図示することが出来る。この時、断熱減率は T と p の関数である。これらの湿潤断熱線は、飽和空気のエントロピーの変化を示している。この飽和空気のエントロピーの変化は、空気と一緒に移動する(あるいは落下する)液体の水のエントロピー変化と正確に等しいが、符号は逆になる。
4. (3.11) 式の関係から得られる飽和混合比は、 T と p のみの関数である。不飽和空気において、圧力に対する混合比のグラフは露点(あるいは摂氏 0° 以下における圧力と霜点)のグラフと同じになる。

図 3.1 は等値線を重ねたテフィグラムの一例である。章末の問題でこのグラフの利用方法について詳しく解説する。図 3.4, 3.5 そして 3.6 は人工衛星やレーダによって得られた画像であるが、大気に関係するいくつかの熱力学過程を表している。

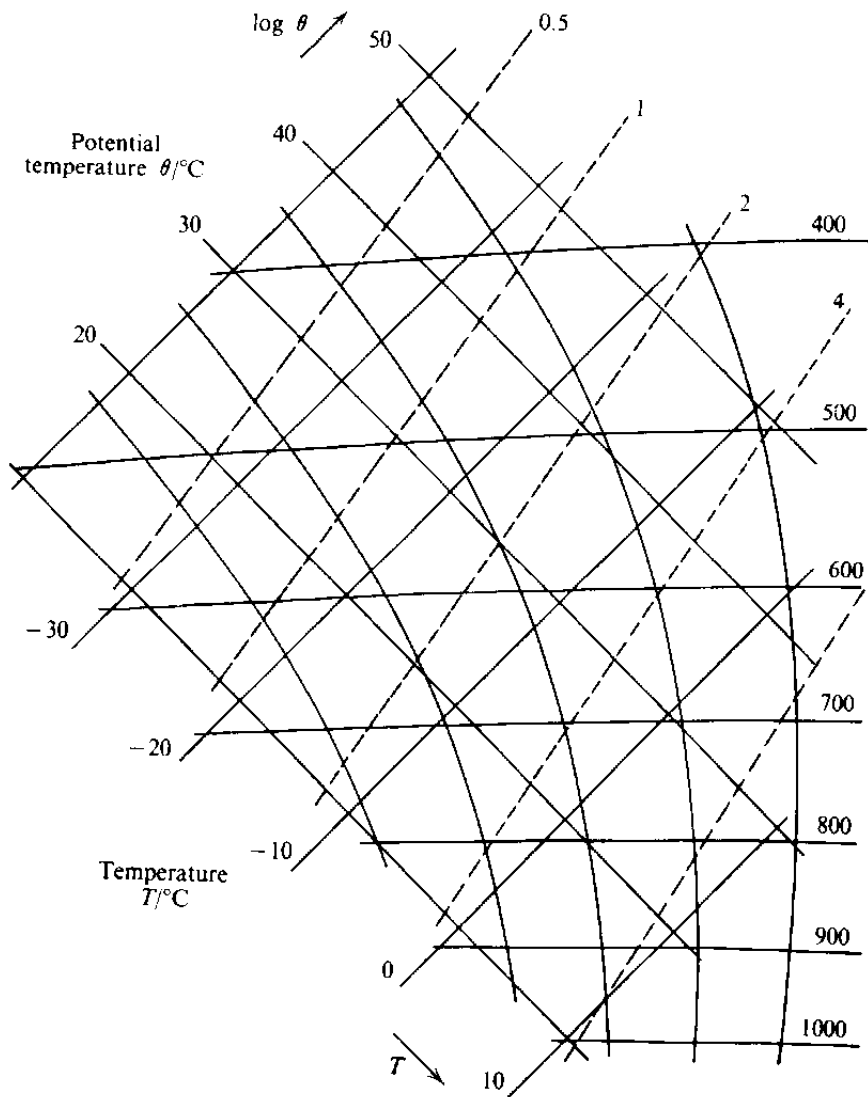


図 3.1: テフィグラムの一部 (英国 Majesty's Stationary Office で使用されているグラフ). エントロピー, 温度の軸は傾いている. 等圧線 (mb で表示, $1000\text{mb} = 100\text{kPa}$) はページの下端とほとんど平行になっている. 点線は水蒸気の混合比 (g kg^{-1} で表示) の等値線, そして一番曲がっている曲線が湿潤断熱線.

3.4 気柱の全ポテンシャルエネルギー

高度 z における力学的に安定な気柱の微小部分のエネルギー dE は二つの部分から構成されている。すなわち単位質量あたり $c_v T$ の大きさの内部エネルギー dE_I と、単位質量あたり gz の大きさを持つ位置エネルギー dE_P である。気柱の微小部分の質量は (1.2) 式より $-dp/g$ であるから、

$$E = E_I + E_P = g^{-1} \int_{P_h}^{P_0} c_v T dp + \int_{P_h}^{P_0} z dp \quad (3.16)$$

この時気柱は $z = 0, p = p_0$ から $z = h, p = p_h$ まで達しているとする。右辺第 2 項は積分範囲を分けて計算することが出来て、

$$E_p = -p_h h + \int_0^h p dz \quad (3.17)$$

ここで、 $p = R_p T / M_r$ (状態方程式 (1.3)), また $\rho dz = -dp/g$ より

$$E_P = -p_h h + g^{-1} \int_{p_h}^{p_0} \frac{RT}{M_r} dp \quad (3.18)$$

右辺第一項は h を十分高くとり $p_h = 0$ とすることで無視してもよいだろう。(3.18) を (3.16) に代入し、 $c_p = c_v + R/M_r$ であることに注意すると以下の式を得る。

$$E = E_I + E_P = c_p g^{-1} \int_0^{p_0} T dp \quad (3.19)$$

乾燥空気において $E_p/E_I = c_p/c_v - 1 \sim 0.4$ であることに注目すると、静水圧平衡が成り立つかぎり気柱の位置エネルギーと内部エネルギーは互いに一定の割合を保つ。したがって運動エネルギーへの転換は、位置エネルギーと内部エネルギーの双方がこの割合で減少することによって起こる。それゆえ二つのエネルギーの和を全位置エネルギーと呼ぶことにし、位置エネルギーと内部エネルギーを一緒にして扱うと便利である。全ポテンシャルエネルギーという呼び名は、台風のエネルギーに関する 1903 年の有名な論文で Margules によって始めて使われた。

3.5 有効位置エネルギー

まとめ...?

この節では、以下の議論を行う。

1. 有効位置エネルギーという概念の説明
 - 要するに、運動エネルギーに変換され得る位置エネルギー
2. 有効位置エネルギーの見積もり
 - Lorenz(1955) の手法を辿る
3. 有効位置エネルギーと全位置エネルギーと運動エネルギーの比較

全ての全位置エネルギーが運動エネルギーへと変換されることは、実際にはあり得ない。例えば、鉛直運動に対して安定で、一様に成層している大気において、水平方向に密度の変化が無い場合、全位置エネルギー自体は大きいですが、運動エネルギーには一切変換されない。では、そのような成層大気が限られた領域で加熱されると仮定しよう。全位置エネルギーは増加し、成層大気は不安定になり、水平圧力勾配、すなわち圧力傾度力が発生して、全位置エネルギーは運動エネルギーへと変換される。では今度は、一様成層流体の一部が冷却されることを仮定する。その結果、全位置エネルギーは減るが、成層が不安定となるため、運動エネルギーへの変換は再び起こる。エネルギーの除去は、変換可能なエネルギーを作ることに限っては、エネルギーを加えるのと同様に効果的である。

断熱過程を通して運動エネルギーに変換可能な全位置エネルギーの量は、Lorenz(1955)¹² によって導入され、有効位置エネルギー (*available potential energy*) と呼ばれる。これは、ある状態の全位置エネルギーと、その大気を断熱的¹³ に再配置して静的安定で (すなわち、安定な温度減率を持つ) 一様成層な状態にした大気的全位置エネルギーとの差である。そのような一様で安定な状態では、有効位置エネルギーはゼロである。

静的安定な基準状態への再調整過程は強い鉛直運動を引き起こす。その結果、もともと起伏していた等温位面¹⁴ (または、等エントロピー面) は等ジオポテンシャル面 (§7.5 や問

¹²参考文献

Lorenz, E. N., 1955: Available potential energy and the maintenance of the general circulation. *Tellus*, **7** 157-167.

¹³この「断熱的」は、「大気全体」ではなく、「各点 or 各空気塊」に対して断熱的であることを意味する。つまり、各点 or 各空気塊の温位 (すなわちエントロピー) は変化しないことを意味する。

¹⁴(余談) 温位というのは、大気のような圧縮性の高い物質の重さを比較するための指標である。(例えば、みそ汁の対流 (?) のようなものを考える際には、密度はほぼ一定と考えられるので、温度だけで議論できる)。

題 7.11 のジオポテンシャルの定義を参照のこと¹⁵⁾と一致するようになる¹⁶⁾. 再配置において, 暖かい空気は上昇し, 冷たい空気が下降するので, 重力による位置エネルギーは開放され, 内部エネルギーは消費されて仕事が行なわれる. これらのエネルギーの和が有効位置エネルギーである.

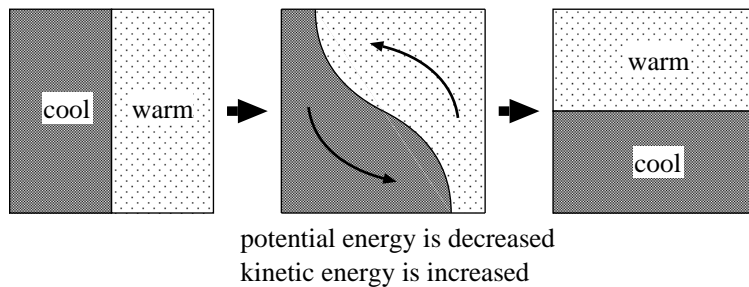
この有効位置エネルギーの大きさを Lorenz(1955) の手法で見積もるため, 等温位面 θ (§3.1) によって分けられた大気を考える. この様子は図 3.2 に示されている. 断熱的な再配置ならば, 大気のどの部分においても温位 θ の値は保存する (§3.1 の式 (3.5) 参照). それぞれの等温位面が大気の鉛直円柱と一度だけ交差するとするならば, 水平面に投影された領域に関するそれぞれの面の平均圧力 \bar{p} は簡単に定義することができる. 地表面と交差するような面は地表面で連続だと仮定する (すなわち $p = p_0$)¹⁷⁾. 鉛直柱の全位置エネル

¹⁵⁾ §7.5 のジオポテンシャルの定義を引用する.

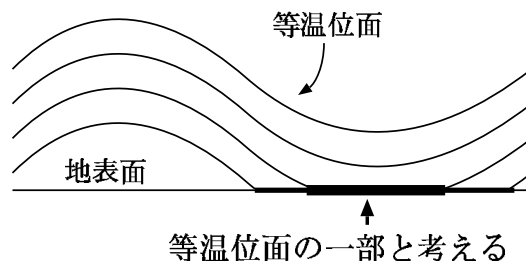
$$\Phi = \int_0^z g dz$$

なお, この場合の $z = 0$ は海面高度と考える場合が多い.

¹⁶⁾ 「等ジオポテンシャル面と平行」ということは「水平」ということと等しいの. つまりここで言っていることは「等温位面が水平になる」ということである. (水平面において温位の勾配が存在すると, 運動エネルギーが発生する. 下図参照.)



¹⁷⁾ 下図参照.



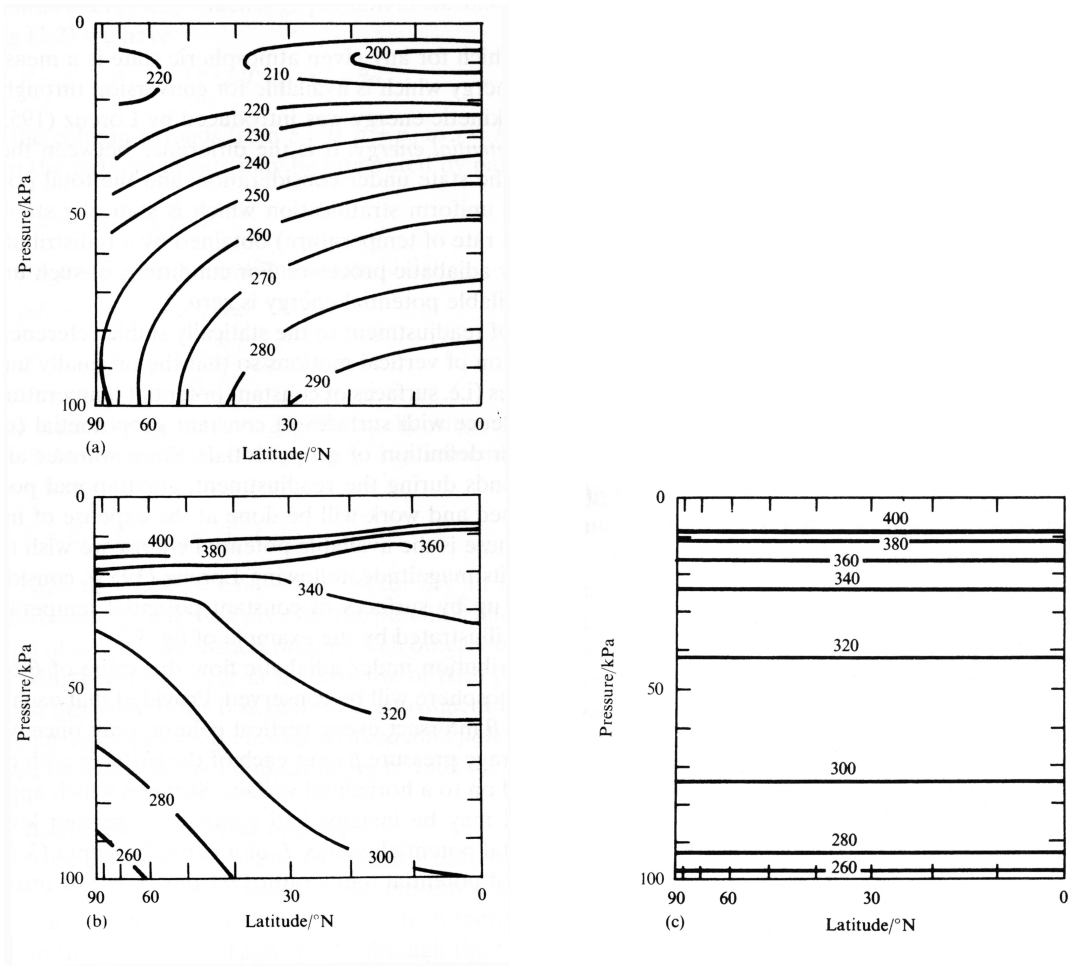


図 3.2: (a) 冬の北半球の平均温度の断面図, (b) (a) の温度分布に対応する温位の分布, (c) (b) で示された大気が等温的に移動して一様な水平成層状態になった際の温位の分布 (Lorenz, 1967 より). (余談) 上 3 図の横軸の緯度のとり方が線形になっていないことに注意して欲しい. これは地球が球状であることを考慮した結果で, 東西方向に積分した地表面 (海面含む) の面積に対応している. (つまり, 大気の体積に対応していることになる). この結果, 図 (b) と図 (c) における各等温位線内の面積は同じになる.

ギー E (3.19) は (3.4) から温位で記述することができる. その式を部分積分すると¹⁸,

$$E = (1 + \kappa)^{-1} c_p g^{-1} p_0^{-\kappa} \left(\int_{\theta_0}^{\infty} p^{1+\kappa} d\theta + \theta_0 p_0^{1+\kappa} \right). \quad (3.20)$$

地表面における θ を θ_0 とし, この θ_0 はそれよりも上方の大気のいかなる θ よりも小さいとする (安定であるためにはこれが必要である. 図 3.2 も見よ). すると, θ_0 よりも小さい値を持つ θ 面は全て $p = p_0$ に一致すると考えることができるので, (3.20) の右辺の最後の項は, 下方の極限を $\theta = 0$ に置き換えて積分の中に組み込むことができる¹⁹. 従って, 大気全体では, 単位面積あたりの有効位置エネルギーは以下のように記述できる.

$$E = (1 + \kappa)^{-1} c_p g^{-1} p_0^{-\kappa} \int_0^{\infty} \overline{p^{1+\kappa}} d\theta. \quad (3.21)$$

$\overline{p^{1+\kappa}}$ は等温位面全体の $p^{1+\kappa}$ の平均である. (平均のとり方は平均圧力 \bar{p} の時と同じやり方である).

断熱的再配置を行った結果, 等温面上の全てにおいて $p = \bar{p}$ が成り立つ時に全位置エネルギーは最小になる. この全位置エネルギーの最小値と元々の値との差が有効位置エネルギー (*available potential energy*) E_A であり, すなわち以下のように与えられる.

$$E_A = (1 + \kappa)^{-1} c_p g^{-1} p_0^{-\kappa} \int_0^{\infty} \left(\overline{p^{1+\kappa}} - \bar{p}^{1+\kappa} \right) d\theta. \quad (3.22)$$

$1 + \kappa > 1$ なので, $p \equiv \bar{p}$ でない限りは $\overline{p^{1+\kappa}} > \bar{p}^{1+\kappa}$ である. よって, (3.22) から, E_A は確実に正である. (もちろん, そうでなければならないが).

(3.22) において, $p = \bar{p} + p'$ とすると, $p^{1+\kappa}$ は 2 項定理で展開することができる. $\bar{p}' = 0$

¹⁸(3.19) に (3.4) を代入すると,

$$E = c_p g^{-1} p_0^{-\kappa} \int_0^{p_0} \theta p^{\kappa} dp$$

となる. ここで, 地表面 ($p = p_0$) では $\theta = \theta_0$, 大気上端 ($p = 0$) では $\theta = \infty$ とし, 部分積分すると,

$$\begin{aligned} E &= c_p g^{-1} p_0^{-\kappa} \left(\left[(\kappa + 1)^{-1} \theta p^{\kappa+1} \right]_{p=0, \theta=\infty}^{p=p_0, \theta=\theta_0} - \int_{\infty}^{\theta_0} (\kappa + 1)^{-1} p^{\kappa+1} d\theta \right) \\ &= (1 + \kappa)^{-1} c_p g^{-1} p_0^{-\kappa} \left(\theta_0 p_0^{\kappa+1} + \int_{\theta_0}^{\infty} p^{\kappa+1} d\theta \right). \end{aligned}$$

¹⁹ $\theta = [0, \theta_0]$ においては $p(\theta) = p_0$ (定数) とすることにしたので,

$$\int_0^{\theta_0} p(\theta)^{1+\kappa} d\theta = \int_0^{\theta_0} p_0^{1+\kappa} d\theta = [p_0^{1+\kappa} \theta]_0^{\theta_0} = \theta_0 p_0^{1+\kappa}.$$

この結果から,

$$\int_{\theta_0}^{\infty} p^{1+\kappa} d\theta + \theta_0 p_0^{1+\kappa} = \int_{\theta_0}^{\infty} p^{1+\kappa} d\theta + \int_0^{\theta_0} p^{1+\kappa} d\theta = \int_0^{\infty} p^{1+\kappa} d\theta.$$

であることを思い出し、1つ目の項だけを展開すると²⁰,

$$E_A = \frac{1}{2} \kappa c_p g^{-1} p_0^{-\kappa} \int_0^\infty \bar{p}^{1+\kappa} \overline{\left(\frac{p'}{\bar{p}}\right)^2} d\theta. \quad (3.23)$$

式 (3.23) は E_A を、等温位面上の p の変化によって表しているが、たいていは等圧面で考えた方が便利である。このようなより適切な E_A の式は以下のように与えられる。(問題 3.14)

$$E_A = \frac{1}{2} c_p g^{-1} \int_0^\infty \bar{T} \left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_d}\right)^{-1} \overline{\left(\frac{T'}{\bar{T}}\right)^2} dp. \quad (3.24)$$

式 (3.24) は E_A を見積もるのに便利である。例えば、これを (3.19) と比較することで、有効位置エネルギー E_A の全位置エネルギー E に対する比を見積もることができる。(3.24) における典型的な値 $\Gamma \simeq \frac{2}{3}\Gamma_d$, $\overline{\left(\frac{T'}{\bar{T}}\right)^2} \simeq \left(\frac{1}{16}\right)^2$ から²¹, $E_A/E \simeq \frac{1}{200}$ が得られる²²。このことから、全位置エネルギーの 0.5% ほどしか運動エネルギーに変換されないことが分かる。

²⁰ $\bar{p}^{1+\kappa}$ を展開すると、

$$p^{1+\kappa} = (\bar{p} + p')^{1+\kappa} = \bar{p}^{1+\kappa} + \frac{(1+\kappa)\bar{p}^\kappa p'}{1!} + \frac{\kappa(1+\kappa)\bar{p}^{\kappa-1} p'^2}{2!} + \dots$$

となる。 p' の 3 次以上は微小のため無視し、平均をとると、

$$\begin{aligned} \overline{p^{1+\kappa}} &= \overline{\bar{p}^{1+\kappa}} + \frac{\overline{(1+\kappa)\bar{p}^\kappa p'}}{1!} + \frac{\overline{\kappa(1+\kappa)\bar{p}^{\kappa-1} p'^2}}{2!} = \bar{p}^{1+\kappa} + \frac{(1+\kappa)\bar{p}^\kappa \bar{p}'}{1!} + \frac{\kappa(1+\kappa)\bar{p}^{\kappa-1} \overline{p'^2}}{2!} \\ &= \bar{p}^{1+\kappa} + \frac{\kappa(1+\kappa)\bar{p}^{\kappa-1} \overline{p'^2}}{2!}. \end{aligned}$$

最後に $\bar{p}^{1+\kappa}$ との差をとると、

$$\overline{p^{1+\kappa}} - \bar{p}^{1+\kappa} = \frac{1}{2} \kappa(1+\kappa)\bar{p}^{\kappa-1} \overline{p'^2} = \frac{1}{2} \kappa(1+\kappa)\bar{p}^{1+\kappa} \frac{\overline{p'^2}}{\bar{p}^2} = \frac{1}{2} \kappa(1+\kappa)\bar{p}^{1+\kappa} \overline{\left(\frac{p'}{\bar{p}}\right)^2}.$$

²¹ $\Gamma_d \simeq 10^{-2}$ [K/m], $\Gamma \simeq 0.65 \times 10^{-2}$ [K/m], $\bar{T} \simeq 273$ [K], $T' \simeq 15$ [K] と考えるとだいたい本文の値になる。これは地球大気の大気圏では妥当な値である...?.

²²簡単化するため、式 (3.24) の被積分関数は p に依存しないと仮定すると、有効位置エネルギーを以下のようにになる。なお、 $\Gamma_d = g/c_p$ (§1.4 の式 (1.8) 参照) を用い、 $\int_0^\infty dp = \int_0^{p_0} dp = p_c$ (一定) とする。

$$E_A = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\bar{T}}{\Gamma_d - \Gamma} \overline{\left(\frac{T'}{\bar{T}}\right)^2} dp = \frac{1}{2} \frac{\bar{T}}{\Gamma_d - \Gamma} \overline{\left(\frac{T'}{\bar{T}}\right)^2} p_c$$

大気全体での、単位面積あたりの全位置エネルギーは以下のようになる (§3.4 の式 (3.19) 参照)。(有効位置エネルギーの場合と同様に、被積分関数は p に依存しないことと $\int_0^{p_0} dp = p_c$ (一定) を仮定する)。

$$E = \frac{1}{\Gamma_d} \int_0^{p_0} \bar{T} dp = \frac{1}{\Gamma_d} \bar{T} p_c$$

この両式の比をとってみると、

$$E_A/E = \frac{1}{2} \frac{\Gamma_d}{\Gamma_d - \Gamma} \overline{\left(\frac{T'}{\bar{T}}\right)^2} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma_d}{\Gamma_d - (2/3)\Gamma_d} \overline{\left(\frac{T'}{\bar{T}}\right)^2} = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{1}{16}\right)^2 \sim \frac{1}{171}$$

となる。だいたい本文と一致する。

運動エネルギーを全位置エネルギーや有効位置エネルギーと比較してみる。鉛直円柱の全位置エネルギー (3.19) は以下のように記述できる。

$$E = \{(\gamma - 1)g\}^{-1} \int_0^{p_0} c^2 dp. \quad (3.25)$$

ここでは $\gamma = c_p/c_v$ とし, $c = (\gamma RT)^{1/2}$ を大気中の音の速度とした²³。鉛直柱の運動エネルギー E_K も同様の形で表現すると²⁴,

$$E_K = \frac{1}{2g} \int_0^{p_0} V^2 dp. \quad (3.26)$$

V は大気の運動の速度である。 V の典型的な値はおよそ $0.05c$ なので²⁵, 比 E/E_K は平均でおよそ 2000 となる²⁶。

平均して $E/E_A \simeq 200$, $E_K/E_A \simeq 0.1$ なので, 大気の有効位置エネルギー量は運動エネルギーの量よりもはるかに大きい。

有効位置エネルギーの概念は, 大気の大循環を維持するのに寄与しているような, 大気の加熱や冷却の効率を調べる際に用いられる。ここで, $\dot{q} dm$ (dm は微小質量を表す) という量が, 非断熱過程 (例えば, 地表面からの放射や潜熱や乱流輸送などがある場合) における加熱率 (または冷却率) を表すとす。すると, 有効位置エネルギーの生成率は近似的に以下のように表される (詳しくは, Dutton & Johnson 1967 などを参照のこと)。

$$\int \left\{ 1 - \left(\frac{\bar{p}}{p} \right)^\kappa \right\} \dot{q} dm. \quad (3.27)$$

Lorenz はこの $\{1 - (\bar{p}/p)^\kappa\}$ という量を効率因子 (*efficiency factor*) と名付けた²⁷。図 3.2 を見ると分かるように (問題 3.16), 有効位置エネルギーの生成率は, 加熱される低緯度地

²³ $\gamma = c_p/c_v$ と $c = (\gamma R^* T)^{1/2}$ を用いて, (3.19) から (3.25) にしてみる。 R^* は大気の気体定数である。

$$c_p g^{-1} \int_0^{p_0} T dp = c_p g^{-1} \int_0^{p_0} \frac{c^2}{\gamma R^*} dp = \frac{c_p}{\gamma R^* g} \int_0^{p_0} c^2 dp = \frac{c_p}{\gamma(c_p - c_v)g} \int_0^{p_0} c^2 dp = \frac{1}{(1 - \gamma)g} \int_0^{p_0} c^2 dp$$

なお, 途中で $c_p = c_v + R/M_r = c_v + R^*$ を用いた。 (§3.4 参照)。

²⁴鉛直円柱 (単位面積 × 大気の厚さ) の運動エネルギーは $E_K = (1/2) \int \rho V^2 dz$ である。この式を, 静水圧の式 $\rho dz = (1/g) dp$ (§1.3 の (1.2) 式参照) によって変形すると, (3.26) となる。

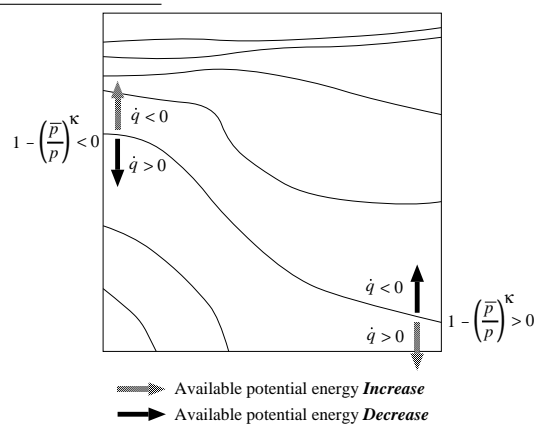
²⁵地球の対流圏の大気は, おおよそ $c_p \simeq 1.004 \times 10^3$ [J K⁻¹ kg⁻¹], $c_v \simeq 7.17 \times 10^2$ [J K⁻¹ kg⁻¹], $R/M_r = R^* \simeq 287$ [J K⁻¹ kg⁻¹], $T \simeq 273$ [K] なので, 音速は, $c = (\gamma R^* T)^{1/2} \simeq 331$ [m/s] となる。大気の運動速度をだいたい $V \simeq 15$ [m/s] と考えれば本文の値は妥当である。

²⁶(一つ前の注釈より) $\gamma \simeq 1.4$ なので, $E/E_K \simeq \frac{(1/1.4)c^2}{0.5 \times (0.05c)^2} \simeq 2000$ 。

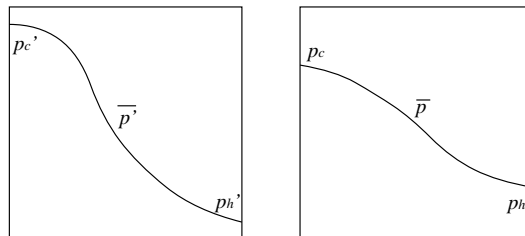
²⁷この効率因子を解釈するために以下のような図を描いてみた。

方の低高度, および冷却される極地方の高高度にて最大になる²⁸. この結果は, §1.5 における一般的な熱力学的考察からも予想されるものである²⁹.

上記の議論では, 有効位置エネルギーは静止した安定な基準状態との関係から算出した. ただし, 大気中で起こり得る運動 (第 7 章以降を参照) に関しては力学的制限がかかるため, そのような理想的な基準状態に到達するような過程が力学的に可能かどうかは明らかではない. 実際には, Van Mieghem によって議論されたように (Dutton & Johnson, 1967 参照), 水平温度勾配とバランスする極渦を含む基準状態—この状態は, 上記で述べたような, 等温位的運動によって到達する—を考える方が現実的である. しかもこの方法は, 絶対角運動量も保存する.



しかし, この図では比 (\bar{p}/p) の大きさが反映されない. 例えば, 以下の図のような 2 つの等温位面を考える.



効率因子の考え方に従えば,

$$1 - (\bar{p}'/p_h')^\kappa > 1 - (\bar{p}/p_h)^\kappa$$

なので, 同じ熱量を加えても (または, 除いても) 左の図の方が有効位置エネルギーの増幅は大きいはずである. しかし, なぜそのようなのかという理解ができなかった.

²⁸低緯度では非断熱過程の加熱があるため $\dot{q} > 0$ であり, 高緯度では逆に冷却されるため $\dot{q} < 0$ となる. 図 3.2 の (b) と (c) を見比べると, 低緯度においては低高度 (およそ $\theta = 300 \sim 320$) において $p > \bar{p}$ 且つ $|p - \bar{p}| \rightarrow \text{最大}$ となる. 一方, 高緯度においては高高度 (およそ $\theta = 280 \sim 320$) において $p < \bar{p}$ 且つ $|p - \bar{p}| \rightarrow \text{最大}$ となる. よって, 効率因子は低緯度, 低高度において $\{1 - (\bar{p}/p)^\kappa\} > 0$, $|\{1 - (\bar{p}/p)^\kappa\}| \rightarrow \text{最大}$ となり, 高緯度, 高高度においては $\{1 - (\bar{p}/p)^\kappa\} < 0$, $|\{1 - (\bar{p}/p)^\kappa\}| \rightarrow \text{最大}$ となる.

これらから, 低緯度, 低高度における加熱と高緯度, 高高度における冷却が最大の有効位置エネルギー生成源となることがわかる.

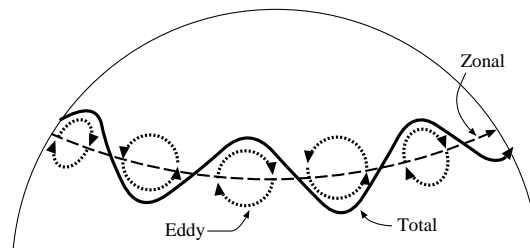
²⁹§1.5 では, Sandström 理論「エネルギーの供給源が吸収源よりも高圧定常状態である場合に限り, 閉じた定常循環が維持される」に関して議論した. 今回の場合も「エネルギーの供給源 (低緯度, 低高度) では圧力が高く, 吸収源 (高緯度, 高高度) の圧力が低い」ことが大気の大循環を維持している.

3.6 帯状エネルギーと渦エネルギー

今までの議論では、位置エネルギーが運動エネルギーへ変換される際の、その変換のメカニズムに関しては一切触れられていなかった。第10章では、そのような変換に関する2つのメカニズムが紹介される—(1) 経度に対して独立だと考えられる定常な(帯状)運動を通しての変換メカニズム、(2) 経度に対して大きく変化するような、準水平な大規模渦運動を通しての変換メカニズム—。従って、大循環の研究に際しては、運動エネルギーを2つの成分に分けると便利である。実際には、大気の流れを(1) 平均帯状成分—すなわち、緯度円に沿って平均した風速—と(2) 渦成分—すなわち、子午面(または、南北)成分と、各地の帯状成分の帯状平均値からの偏差—とに分ける。これらの成分はそれぞれ帯状運動エネルギーと渦運動エネルギーとして知られている¹。

帯状有効位置エネルギーと渦有効位置エネルギーも同様に定義される。温度場の分散 $\overline{(T')^2}$ は、(1) 温度場(の偏差) T' の帯状平均の分散、と(2) 緯度円に沿った温度場(帯状平均からの偏差)の分散に分けられる^{2,3}。有効位置エネルギーの帯状成分と渦成分はこれら

¹ 「帯状」と「渦」という表現に関しては、以下のような図を考えると感覚がつかめるかもしれない。



² 本来の有効位置エネルギーは、ある p 面上の全球平均温度 \bar{T} と各地の温度 T との差 $T' (= T - \bar{T})$ の2乗の全球平均 $\overline{(T')^2}$ (要するに「分散」) から得られる値であった。帯状有効位置エネルギーは、ある緯度における T' の平均値(ここでは \tilde{T} とする)の2乗の全球平均 $\overline{(\tilde{T})^2}$ から得られる値である。一方、渦有効位置エネルギーは、 T' と \tilde{T} の差 $T^* = T' - \tilde{T}$ の2乗の全球平均 $\overline{(T^*)^2}$ から得られる。

³ 温度場の分散 $\overline{(T')^2}$ を(1) 温度場(の偏差) T' の帯状平均の分散 (\tilde{T} とする)、と(2) 緯度円に沿った温度場(帯状平均からの偏差 $T^* = T' - \tilde{T}$)の分散に分けてみる。

$$\begin{aligned} \overline{(T')^2} &= \overline{(\tilde{T} + T^*)^2} \\ &= \overline{(\tilde{T})^2 + 2\tilde{T}T^* + T^{*2}} \\ &= \overline{(\tilde{T})^2} + \overline{T^{*2}} + 2\overline{\tilde{T}T^*}. \end{aligned}$$

全球平均(上線)とは要するに帯状平均と子午面方向平均の両方を行ったことに等しいので、帯状平均を上波線(\sim)、子午面平均を括弧($\overline{\dots}$)とすると、

$$\overline{\tilde{T}T^*} = \overline{[\tilde{T}T^*]} = [\overline{\tilde{T}T^*}] = [\tilde{T} \times 0] = 0$$

となる。以上から、温度場の分散が、温度場の偏差の帯状平均の分散と帯状平均温度からの偏差の分散に分けられることが分かる。

から得ることができる⁴.

図 3.3 では、エネルギーの生成と変換に関する研究の結果の一例が示されている。運動エネルギーへの変換のほとんどは渦有効位置エネルギーから起こり、その渦有効位置エネルギーは、大規模渦運動を通して、帯状有効位置エネルギーから変換されることがわかる。

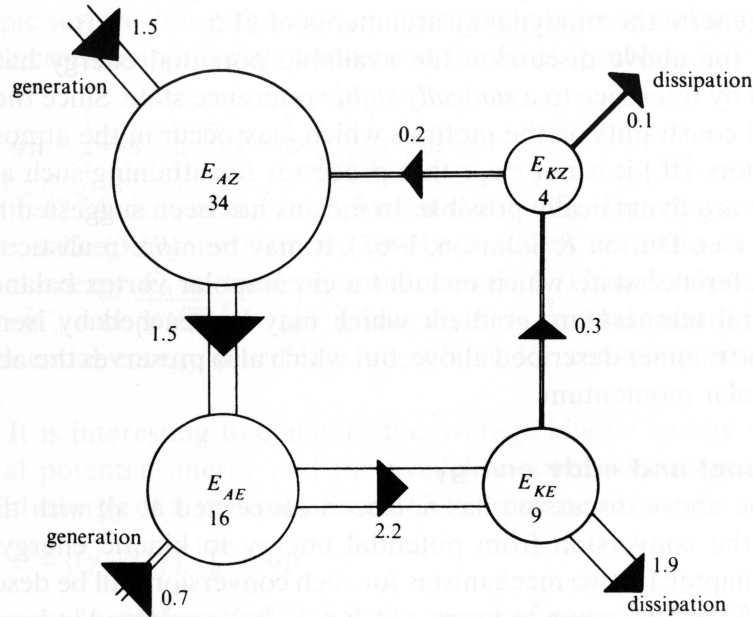


図 3.3: Oort & Peixoto(1974) によって見積もられた、大気全体における、有効位置エネルギー E_A と運動エネルギー E_K の貯蔵と変換. エネルギーの単位は 10^5 Jm^{-2} , 変換や生成や消失の単位は Wm^{-2} である. 添字 Z と E はそれぞれ、帯状成分と渦成分を表す.

Appendix 1 図 3.3 の考察

いくつか、図 3.3 に関して考察したことを述べておく.

⁴帯状有効位置エネルギーを E_{AZ} , 渦有効位置エネルギーを E_{AE} とすると,

$$E_{AZ} = \frac{1}{2}c_p g^{-1} \int_0^\infty \bar{T} \left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_d}\right)^{-1} \overline{\left(\frac{\tilde{T}}{\bar{T}}\right)^2} dp,$$

$$E_{AE} = \frac{1}{2}c_p g^{-1} \int_0^\infty \bar{T} \left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_d}\right)^{-1} \overline{\left(\frac{T^*}{\bar{T}}\right)^2} dp.$$

(収支が合わない?) 図 3.3 の変換, 生成, 消失を示す矢印の値をしてみると, 収支が合わないことがわかる. 実際には E_{AZ} から 0.2 だけ消失する分があるのだが, この図には記載されていない. (おそらく, 単純に間違いであろう. 元々の図は Oort & Peixoto(1974)⁵に載っているが, そちらにはその 0.2 が記載されている).

(E_K/E_A の値は?) 図から $E_K/E_A = (E_{KZ} + E_{KE})/(E_{AZ} + E_{AE})$ の値は $13/50 = 0.26$ となる. これは, 前の節で見積もった 0.1 よりもわずかながら大きい. この差は, 前の節の最後で議論した, 力学的制限によるものではないかと考えられる.

⁵参考文献

Oort, A.H. and Peixoto J.P., 1974: The Annual Cycle of the Energetics of the Atmosphere on a Planetary Scale. *J. Geophys. Res.*, **79**, 2705–2719.