

目次

4	より複雑な放射伝達	2
4.1	太陽放射：散乱による減衰	2
4.2	オゾンによる太陽放射の吸収	14
4.3	単一の吸収線による吸収	17
4.4	大気経路の透過率	25
4.5	積分形の放射伝達方程式	27
4.6	振動数による積分	30
4.7	放射過程による加熱率	31
4.8	成層圏上層及び中間圏下層における二酸化炭素の放射冷却	32
4.9	吸収帯モデル	34
4.10	連続吸収帯	35
4.11	全球放射収支	36

4 より複雑な放射伝達

4.1 太陽放射：散乱による減衰

放射伝達を議論した 2 章では、とても簡略化した大気モデルを想定した。それは、大気は放射平衡であり、太陽放射に対して透過、長波放射の吸収係数は振動数に対して独立である¹という仮定からなった。この章で太陽放射はどのように大気によって減衰されるかを考え、その時与えられた大気に対して、高度や振動数に関する積分はどのように実行できるのかを明らかにする、より一般的な放射伝達問題を設定しよう。

太陽放射は最初に大気の散乱過程で減衰される。散乱係数 σ^2 は、数式 (2.1) や (2.2) の吸収係数 k と同様の方法で定義でき、大気過程での伝達は以下の式で与えられる。

$$I = I_0 \exp\left(-\int \sigma \rho dz\right) \quad (4.1)$$

6 章で扱われる雲による散乱を除いた場合、最も重要な散乱メカニズムは粒子によるレイリー散乱であり、波長 λ における散乱係数 σ_R は以下の式で与えられる³。

$$\sigma_R = \frac{32\pi^3}{3N_0\lambda^4\rho_0}(n-1)^2 \quad (4.2)$$

ただし、 N_0 は単位体積あたりの粒子数、 ρ_0 は密度、 n は屈折率であり、全て標準温度及び圧力での値である。レイリー散乱による減衰は波長によって大きく変化する ((4.2) において λ^{-4} は σ_R に依存していることに注意)。鉛直円柱大気において、近紫外線領域では 40 % 程度の光が失われているが、近赤外領域では 1 % にも満たない (問題 4.1 参照)。様々な太陽高度と波長を考慮すると、大気に入射する平均太陽放射のうち 13 % がレイリー散乱されている (問題 4.2 参照)。このうち、およそ半分が散光として地球の地表面へ到達し、残り半分は宇宙空間へ戻る。

太陽放射もまた、火山灰や煙、地表面からの塵や海のしぶきなど、様々な要因から生じるエアロゾル粒子によっても散乱されている⁴。このようなエアロゾルは、大気の中に様々な粒子として存在している。

¹すはなわち灰色大気

²ここでは単位質量あたりの値, [m²/Kg]

³Appendix 参照

⁴粒子サイズからいえば、ミ-散乱の領域

Appendix (4.2) レイリー散乱の散乱係数導出

レイリー散乱 レイリー散乱は、粒子半径が電磁波の波長より非常に小さい場合に生じる散乱のことであり、1871年 Reyleigh によって発見された。この散乱は粒子が大きい場合に比べ、等方散乱であるのが特徴である。また、これによって空が青い理由を説明できるようになった。

空が青いのは、太陽光を大気が散乱している為である。もし散乱がなければ太陽の方向のみ明るく、その他は真っ暗な空となる。

レイリー散乱の散乱係数は、波長の4乗に反比例する。太陽光は、可視光の紫 - 赤の波長域の光を含んでいる。この中で最も散乱されるのは波長の短い紫である。しかし、実際は紫は散乱されすぎて我々の視覚で認識するには弱くなりすぎており、認識出来るのは青となる。飛行機等で高度の高い領域の空を見た場合、紫がかって見えるのは、上空では大気の光学的深さが地表に比べ浅いため、紫が散乱しきらずに目に届くのである。

夕焼けが赤いのもレイリー散乱で説明できる。夕方は日中に比べ太陽の高度が低く、より厚い大気を太陽光は通過する。その為、紫だけではなく青も散乱されきってしまい、結局赤しか認識できないのである⁵。

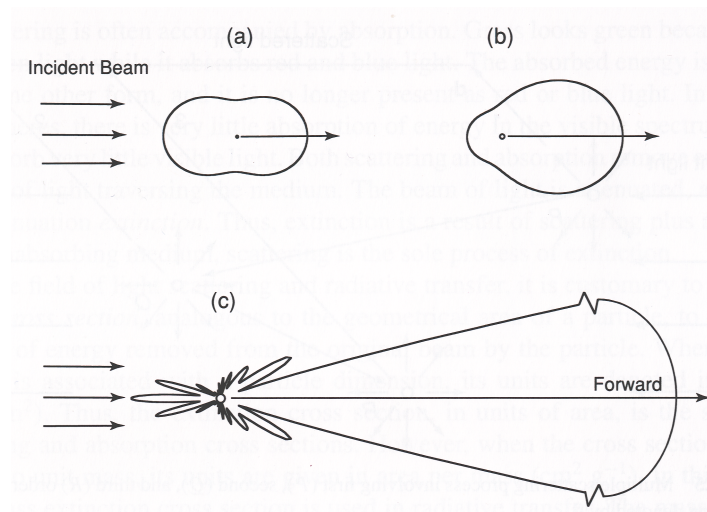


図 A.1: 波長 $0.5 \mu\text{m}$ の電磁波を粒子にあてた場合の散乱課程。粒子半径はそれぞれ (a) $10^{-4} \mu\text{m}$, (b) $0.1 \mu\text{m}$, (c) $1 \mu\text{m}$, レイリー散乱は (a) の場合に相当する。ちなみに, (c) はミー散乱。

⁵なぜ夕焼けは緑でなく赤なのかというのも興味深い。実際空を見ていると青 - 黄色 - オレンジ (赤) のグラデーションしか見えない。実際は緑の波長域も我々の目に届いてはいるが、人間の視覚は緑を認識しづらい為に見えていないだけかもしれない。

メカニズム 電磁波が微小粒子に入射した場合、粒子内で誘電分極が生じ、双極子ができる。電磁波は連続的に入射する為双極子は振動し正負の入れ換わりが生じ、双極子放射が発生する。それによって電磁波の方向が変化し、散乱が生じる。

散乱係数導出 実際に (4.2) の導出を行う。

1. 入射波が一粒子によってできる散乱波の電場の式を出す (A.3)
2. 入射波が非偏光であることを用いて、電場を各成分に分解し、単位立体角あたりの散乱波のエネルギーを導出する。(A.8)
3. 2. を立体角で積分し、散乱波のエネルギーを導出し、入射波とのエネルギーの比 (=散乱係数) を出す
4. 求めた散乱係数を単位質量辺りの散乱係数に変換する

最初に、空気 1 粒子による電磁波の散乱を考える。

入射してくる太陽光 = 入射波の電場を $E_0 e^{ikct}$ とおく。ただし、 k は波数、 c は光速、 t は時間である。入射電場の影響を受け、粒子内で誘電分極が生じ、双極子が誘発される。この時の双極子モーメントを $P(t)$ とすると、電場の強さと双極子モーメントは比例することから

$$P(t) = \alpha E_0 e^{ikct} \quad (\text{A.1})$$

となる。ここで α は粒子の分極率 (もしくは誘電率) である⁶。

双極子モーメントは入射電場の振動の影響を受けて振動し、双極子放射を生じさせる。その時、時刻 t で観測される散乱波の電場を $E(\mathbf{r}, t)$ とすると、

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \frac{1}{r} \left\{ \mathbf{e} \times \left(\mathbf{e} \times \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t_0)}{\partial t_0^2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{1}{r} \left\{ \mathbf{e} \times \left(\mathbf{e} \times \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t - r/c)}{\partial t^2} \left\{ \frac{dt}{d(t - r/c)} \right\}^2 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{1}{r} \left\{ \mathbf{e} \times \left(\mathbf{e} \times \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t - r/c)}{\partial t^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

となる。ただし、双極子モーメントの中心を原点とし、 $\mathbf{r} = r\mathbf{e}$ を観測地点の位置ベクトルとする。また、観測地点に時刻 t に到達する電磁波は、 $t_0 = t - r/c$ に双極子から放射され

⁶一般的に α は体積の次元を持つテンソルであるが、今回想定した空気の場合 P, E_0 が同じ方向を向いている為、スカラーとなる。逆にテンソルとなる場合は、 CO_2 など複雑な構造を持った粒子の場合である。詳しい導出は Appendix にて行う

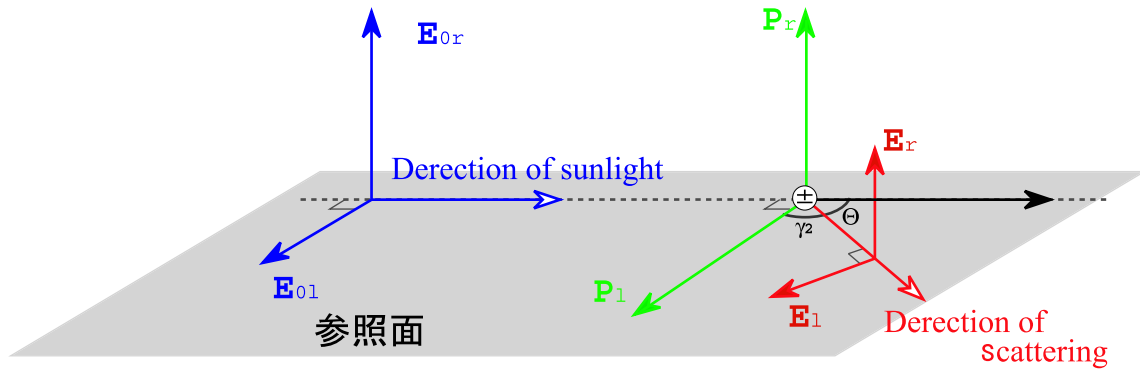


図 A.2: 双極子による散乱の模式図. 入射電場ベクトルは, 任意に平行成分 (l) 及び垂直成分 (r) に分解する. 入射波と散乱波で定義される散乱面から垂直になるように座標を選ぶ. (すなわち, $\gamma_1 = \pi/2$). 全ての記号は本文で定義してある. (Liou, 2002, Figure 3.10 改変)

た電場でので, (A.2) では時刻 t_0 の双極子モーメントの値を用いている⁷.

数式 (A.1) を (A.2) に代入し, 時間微分を実行すると散乱波の電場と入射波の電場との関係式が算出できる.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{r} \frac{1}{c^2} \alpha \left\{ \mathbf{e} \times \left(\mathbf{e} \times \frac{\partial^2 (\mathbf{E}_0 e^{-ik(r-ct)})}{\partial t^2} \right) \right\} \\ &= -\frac{e^{-ik(r-ct)}}{r} k^2 \alpha \{ \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{E}_0) \} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

次に (A.3) の電場ベクトルを方向成分に分解する. 入射波と散乱波の進行方向で作られる平面を参照面と定義する (図 A.2). 電場は進行方向に対する直交二成分を取り出して参照面に平行な成分 (E_l) 及び直角な成分 (E_r) に分解する. $\mathbf{E}_r // \{ \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{E}_{0r}) \}$, $\mathbf{E}_l // \{ \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{E}_{0l}) \}$ であることから各成分の絶対値を取り出すと以下のように書ける.

$$E_r = -E_{0r} \frac{e^{-ik(r-ct)}}{r} k^2 \alpha \quad (\text{A.4a})$$

$$E_l = -E_{0l} \frac{e^{-ik(r-ct)}}{r} k^2 \alpha \sin \gamma_2 \quad (\text{A.4b})$$

γ は双極子モーメントの加速度方向と観測地点の方向との間の角度とした⁸. ただし, $\sin \gamma_1$ は定義より 1 となる為省略した. また, 散乱角 Θ (入射波と散乱波の間の角度) を用い, $\gamma_2 = \pi/2 - \Theta$ として (A.4b) に代入すると, (図 A.2 参照) .

$$E_l = -E_{0l} \frac{e^{-ik(r-ct)}}{r} k^2 \alpha \cos \Theta \quad (\text{A.5})$$

⁷ポアソンの方程式の解として電磁波の電磁ポテンシャルが求まる. 電磁ポテンシャルを用いたマクスウェルの方程式から, 電磁ポテンシャルを代入することで電場を導出する. 砂川 (1993) 第 10 章参照

⁸(A.4b) において, γ_2 が $\pi/2$ の場合 $E_l = 0$ となる. すなわち, 散乱波は双極子モーメント方向には進まないことがわかる.

ここで、電場から各成分のエネルギーを算出する。電磁波のエネルギーは、 $I = C|E^2|$ で定義される (C : 比例定数)。よって入射波、散乱波の単位立体角及び単位面積のエネルギーを $I = C|E^2|$ 及び $I_0 = C|E_0^2|$ とすると、

$$I_r = I_0 r k^4 \alpha^2 / r^2 \quad (\text{A.6a})$$

$$I_l = I_0 l k^4 \alpha^2 \cos^2 \Theta / r^2 \quad (\text{A.6b})$$

ただし、 I_r, I_l は散乱波の単位角あたりの散乱面に垂直、平行な成分である。散乱波のエネルギーは、各成分の和をとって、

$$I = I_r + I_l = (I_{0r} + I_{0l} \cos^2 \Theta) k^4 \alpha^2 / r^2 \quad (\text{A.7})$$

と書ける。入射波の太陽光は非偏光であるので $I_{0r} = I_{0l} = I_0/2$ である。また、 $k = 2\pi/\lambda$ (λ : 波長) であることを含めると、

$$I = \frac{\alpha^2}{r^2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2} \times I_0 \quad (\text{A.8})$$

これがレイリー散乱による散乱強度の式である。

ここで、散乱粒子から距離 r における散乱フラックス f は単位立体角、面積あたりの散乱エネルギー I を立体角及び面積で積分することで得られ、

$$\begin{aligned} f &= \int_{\Omega} I r^2 d\Omega \\ &= F_0 \alpha^2 \frac{128\pi^5}{3\lambda^4} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

となる⁹。ただし、単位面積あたりの入射フラックス密度 F_0 を I_0 とした。よって、散乱フラックス密度と入射フラックス密度の比をとると、

$$\sigma_s = \frac{f}{F_0} = \alpha^2 \frac{128\pi^5}{3\lambda^4} \quad (\text{A.10})$$

σ_s は散乱係数と定義される¹⁰。

9

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} I r^2 d\Omega &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{I_0}{r^2} \alpha^2 \frac{2\pi}{\lambda}^4 \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2} r^2 \sin \Theta d\Theta d\phi \\ &= F_0 \alpha^2 \frac{2\pi}{\lambda}^4 2\pi \int_0^{\pi} \frac{\sin \Theta + (-\cos \Theta)' \cos^2 \Theta}{2} d\Theta \\ &= F_0 \alpha^2 \frac{2\pi}{\lambda}^4 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{3} \right) \\ &= F_0 \alpha^2 \frac{128\pi^5}{3\lambda^4} \end{aligned}$$

¹⁰ 散乱係数は面積の次元を持っている。これは入射フラックス密度が単位面積あたり、散乱フラックス密度が単位面積、単位散乱角あたりの係数となっているためである。実際散乱係数は散乱体がない場合に比べて光が進行方向に届かない (=影となる) 面積の割合であるともいえる。

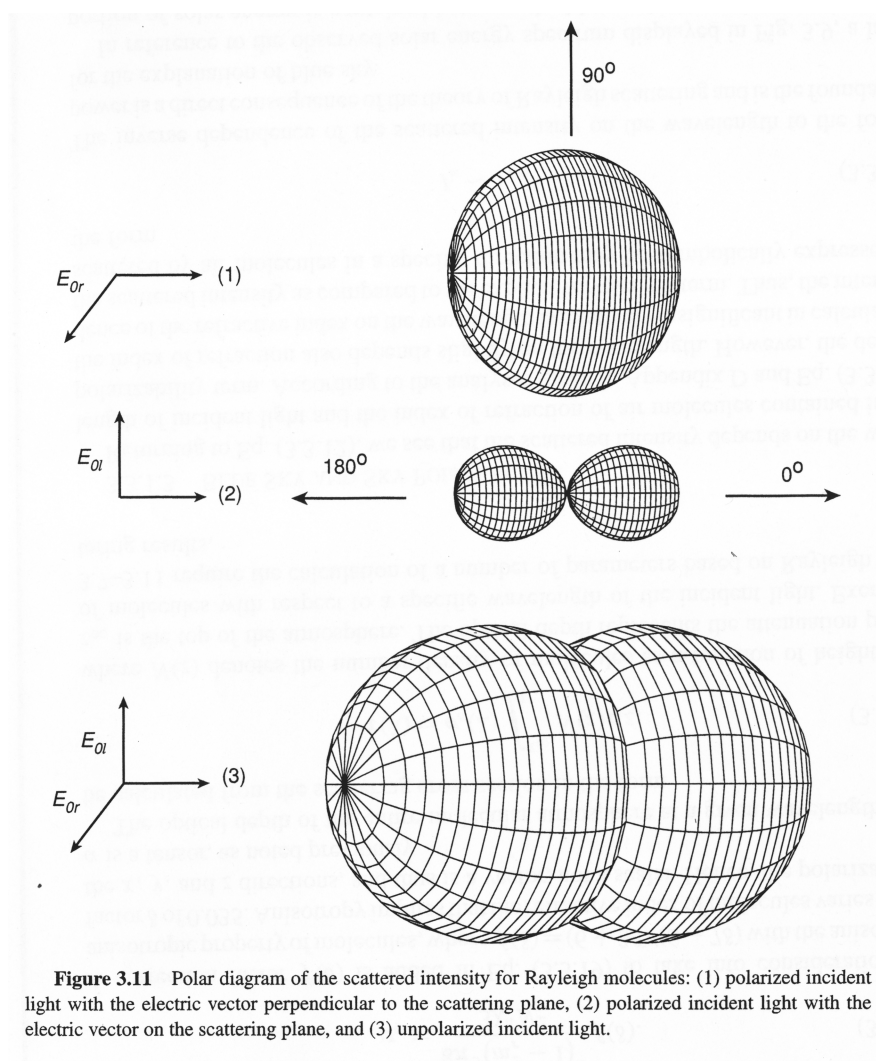


Figure 3.11 Polar diagram of the scattered intensity for Rayleigh molecules: (1) polarized incident light with the electric vector perpendicular to the scattering plane, (2) polarized incident light with the electric vector on the scattering plane, and (3) unpolarized incident light.

図 A.3: レイリー分子の場合の散乱強度の極分布: (1) 散乱平面に対し垂直な電場をもつ極性入射光. (2) 散乱平面に対し平行な電場を持つ極性入射光. (3) 非極性入射光 (Liou, 2002, Figure 3.11)

ここまでは、1 粒子の場合の散乱波を考えてきた。次に”空気分子”の“単位質量あたり”の散乱係数を考える。

空気 1 粒子あたりの分極率は、以下のように与えられる^{11, 12}。

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{3}{4\pi N_0} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right) \\ &\simeq \frac{3}{4\pi N_0} \left\{ \frac{2(n-1)}{3} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi N_0} (n-1)\end{aligned}\tag{A.11}$$

ただし、 N_0 は単位体積あたりの分子数、 n は気体層の屈折率である。また今回は気体が空気であるため、 $n \simeq 1$ を用いて近似を行った¹³。

そして、1 粒子あたりの値を単位質量あたりの値とするために、散乱係数を 1 粒子辺りの質量である分子量 (ρ_0/N_0) で割ると、(A.10) は、

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \left\{ \frac{1}{2\pi N_0} (n-1) \right\}^2 \frac{128\pi^5 N_0}{3\gamma^4} \frac{1}{\rho_0} \\ &= \frac{32\pi^3}{3N_0\gamma^4\rho_0} (n-1)^2\end{aligned}\tag{A.12}$$

これは、単位質量辺りの散乱係数 (4.2) である。

参考文献

Liou, K. N., 2002, *An Introduction to Atmospheric Radiation Second Edition*, Academic Press, 583pp

佐藤正樹, 林祥介, 1980, 地球流体電磁倶楽部理論ノート/基礎 電磁力学, <http://www.gfd-dennou.org>

ファイマン, レイトン, サンズ, 1986, ファイマン物理学 II 光熱波動, 岩波書店, 397pp

¹¹ 1 粒子辺りの値なのに、分極率内に数密度が入っているのはおかしい? でも、とりあえず 1 粒子の散乱の値で重ね合わせた場合に数密度はきいてくる。

¹² 導出は Appendix を参照

¹³ $n=1+\delta$ ($\delta \ll 1$) とおくと、

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2 + 2} = \frac{(1+\delta+1)(n-1)}{(1+2\delta+\delta^2)+2} = \frac{(2+\delta)(n-1)}{3+2\delta+\delta^2} \simeq \frac{2(n-1)}{3}$$

Appendix (A.2) 双極子放射の電場

電子双極子における観測地点 r での電磁波の電場を求める。まず、ポアソンの方程式を用いて、電磁波のスカラーポテンシャルを予想する。またマクスウェルの方程式よりベクトルポテンシャルも求める。最後に以上電磁ポテンシャルからマクスウェルの方程式を用いて電場の値を算出するが、その時、電気双極子近似を用いた。

電磁ポテンシャルを用いたマクスウェルの方程式¹⁴は以下の通りである。

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}\phi \quad (\text{A.13a})$$

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} \quad (\text{A.13b})$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi = -\rho/\epsilon_0 \quad (\text{A.13c})$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{i} \quad (\text{A.13d})$$

$$\text{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.13e})$$

ただし、 E は電場、 A 、 ϕ は電磁ポテンシャル、 B は磁場、 c は光の速度、 ρ は電荷密度、 ϵ_0 は真空の誘電率、 μ_0 は真空の透磁率、 i は電流密度である。今回は、電磁波の電場を考えているため、電磁ポテンシャルの値は、ポアソンの方程式の解として、

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (\text{A.14})$$

と予想される¹⁵。また、(A.13c),(A.13d) の比較から

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (\text{A.15})$$

であると予想される。ただし、 $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$ である¹⁶。次にこれらの積分を実行したいところだが、厳密に積分するのは困難であるため、電気双極子近似を導入する。具体的には、電子の存在位置は原点付近に限られており、その領域半径 r' に比べ、観測地点がずっと遠くにあると考える ($r' \ll r$)。このとき、以下のように近似できる¹⁷。

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq r \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}\right) \quad (\text{A.16})$$

¹⁴基本の maxwell の方程式に ローレンツ条件 (A.13e) が付加されている。

¹⁵静電ポテンシャルのポアソンの方程式は

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (*)$$

である 電磁波の場合、 $\rho(\mathbf{r}')$ の値が時間変化するが、十分離れた場所では $\phi(\mathbf{r}, t)$ の値もほぼ (*) に一致するといえるだろう。ただ、放射されてから r に伝わるまでの時間 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ を考慮する必要はある。つまり、時刻 t 、地点 r でのポテンシャルの値は、 $\rho(\mathbf{r}', t)$ ではなく、 $\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)$ の影響を受ける。

¹⁶実際これら二式の妥当性は、(A.13c),(A.13d) の解を満たすかどうかで確認できる。

これを, $\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)$ に適用すると,

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) &\simeq \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr}\right) \\ &= \rho\left(\mathbf{r}', t_0 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr}\right) \\ &\simeq \rho(\mathbf{r}', t_0) + \frac{d\rho(\mathbf{r}', t_0)}{dt_0} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

と近似される¹⁸. これを, (A.14) に当てはめ, また分母 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ も r と近似する¹⁹ と,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &\simeq \frac{1}{r} \int_V \rho(\mathbf{r}', t_0) d^3r' + \frac{\mathbf{r}}{cr^2} \cdot \int_V \frac{d\rho(\mathbf{r}', t_0)}{dt_0} \mathbf{r}' d^3r' \\ &= \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r}}{cr^2} \cdot \frac{d\mathbf{P}(t_0)}{dt_0} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

となる. ただし, Q は総電荷, \mathbf{P} は, その電荷の球対称からのずれ, すなわち双極子モーメントを示している. 今回は領域からの電荷の流入出を考えていない為, Q は時間依存しない. したがって (A.19) の第一項は点電荷 Q による静電ポテンシャルの値であり, 電磁波の放射とは関係がない. よってこれを無視し,

$$\phi(t) = \frac{\mathbf{r}}{cr^2} \cdot \frac{d\mathbf{P}(t_0)}{dt_0} \quad (\text{A.19})$$

となる. これが電磁波の放射を表すスカラーポテンシャルである. ベクトルポテンシャルも (A.15) に同様の近似を行い積分すると²⁰

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &\simeq \frac{1}{c^2 r} \int_V \mathbf{i}(\mathbf{r}', t_0) dV \\ &= \frac{1}{c^2 r} \frac{d\mathbf{P}(t_0)}{dt_0} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

¹⁷以下の近似を適用した.

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2} \simeq r\sqrt{1 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r^2} \simeq r \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}\right)$$

¹⁸3 段目の導出には, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/cr \ll 1$ より, テイラー展開の第一微分の項まで取り出してある.

¹⁹先程と同様に, $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r(1 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r^2)}$ となる. これを (A.14) に代入すると, r^{-2}, r^{-3} のオーダーの項ができるため, r^{-2} は無視できる.

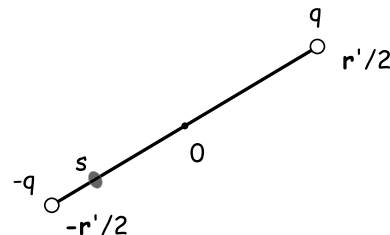
²⁰双極子モーメント $\mathbf{P} = q\mathbf{r}'$ のうち, \mathbf{r}' を時間に対して固定して考える. すると, 電流密度 \mathbf{i} は,

$$\mathbf{i} = \frac{1}{s} \frac{dq}{dt} \frac{\mathbf{r}'}{r'}$$

と書ける. 今考えている領域は, 底面 s 高さ r' の円柱であるから, $V = sr'$ である. $q/V = \rho$ であり, また r' を固定していることを考慮すると.

$$\mathbf{i} = \frac{dq}{dt} \frac{\mathbf{r}'}{V} = \frac{d(q/V)}{dt} \mathbf{r}' = \frac{d\rho}{dt} \mathbf{r}' = \frac{d(\rho\mathbf{r}')}{dt}$$

となる. $\mathbf{P} = \int_V \rho\mathbf{r}' dV$ より, 右辺を体積積分すると双極子モーメントの時間微分になる.



となる. これにて電磁ポテンシャルが求まったので, (A.13a) に代入し, 電場を求める²¹.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \text{grad}\phi(\mathbf{r}, t) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{c^2 r} \frac{d\mathbf{P}(t_0)}{dt_0} \right\} - \text{grad} \left\{ \frac{\mathbf{r}}{cr^2} \cdot \frac{d\mathbf{P}(t_0)}{dt_0} \right\} \\
 &\simeq -\left\{ \frac{1}{c^2 r} \frac{d^2\mathbf{P}(t_0)}{dt_0^2} \right\} + \left\{ \frac{\mathbf{r}}{c^2 r^3} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d^2\mathbf{P}(t_0)}{dt_0^2} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

また, これを整理すると

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c^2 r^3} \left\{ -r^2 \frac{d^2\mathbf{P}(t_0)}{dt_0^2} + \mathbf{r} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d^2\mathbf{P}(t_0)}{dt_0^2} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{c^2 r^3} \left\{ \mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{P}(t_0)}{dt_0^2} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

となる²². これが双極子放射によって生じる電場の値である.

参考文献

砂川重信, 1993, 物理の考え方 2 電磁気学の考え方, 岩波書店, 148pp

²¹ $\text{grad}\phi(\mathbf{r}, t)$ の算出を行う. まず, $\mathbf{r} = (xe_x, ye_y, ze_z)$ とし, x 成分について微分を行う. $t_0 = t - r/c$ であることに注意すると,

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathbf{r}}{cr^2} \cdot \frac{d\mathbf{P}(t_0)}{dt_0} = \frac{e_x}{cr^2} \cdot \frac{d\mathbf{P}(t_0)}{dt_0} - 2 \frac{\mathbf{r}}{cr^3} \cdot \frac{d\mathbf{P}(t_0)}{dt_0} + \frac{\mathbf{r}}{cr^2} \cdot \frac{d}{dx} \frac{d\mathbf{P}(t_0)}{dt_0}$$

となる. また r は非常に大きく (すなわち観測点は遠い), r と x のオーダーが同じであることを考慮すると, 1, 2 項目は r^{-2} のオーダーとなるため, 3 項目の r^{-1} と比較して省略することができる.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathbf{r}}{cr^2} \cdot \frac{d\mathbf{P}(t_0)}{dt_0} &\simeq \frac{\mathbf{r}}{cr^2} \cdot \frac{d}{dx} \frac{d\mathbf{P}(t_0)}{dt_0} \\
 &= \frac{\mathbf{r}}{cr^2} \cdot \frac{d^2\mathbf{P}(t_0)}{dt_0^2} \frac{d(t-r/c)}{dx} = \frac{\mathbf{r}}{cr^2} \cdot \frac{d^2\mathbf{P}(t_0)}{dt_0^2} - \frac{x}{cr} \\
 &= -\frac{x\mathbf{r}}{c^2 r^3} \cdot \frac{d^2\mathbf{P}(t_0)}{dt_0^2}
 \end{aligned}$$

x, y, z 成分も同様に計算することができ, 各成分を足し合わせると $\text{grad}\phi$ を得る.

$$\text{grad} \frac{\mathbf{r}}{cr^2} \cdot \frac{d\mathbf{P}(t_0)}{dt_0} = -\frac{\mathbf{r}}{c^2 r^3} \cdot \mathbf{r} \cdot \frac{d^2\mathbf{P}(t_0)}{dt_0^2} \tag{A.22}$$

²² 1 段目から 2 段目への変形は, 以下のベクトル解析の公式を $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{r}, \mathbf{C} = \frac{d^2\mathbf{P}(t_0)}{dt_0^2}$ として行った.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

また, この式の証明は以下の通り.

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}))_x &= A_y(B_x C_y - B_y C_x) - A_z(B_z C_x - B_x C_z) \\
 &= B_x(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - C_x(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \\
 &= \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_x
 \end{aligned}$$

Appendix 屈折率と分極率

分極率は, (A.11) のように, 屈折率を用いて表すことができる. これは屈折率が観測によって求められる為, 観測から分極率を導出する式として非常に有効である. この Appendix では, (A.11), いわゆる “Lorentz-Lorenz 方程式” を導出する.

$$\alpha = \frac{3}{4\pi N_0} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right) \quad (\text{A.11})$$

誘電体内での電束密度ベクトル D は定義より以下のように与えられる.

$$\varepsilon \equiv D/E, D \equiv E + 4\pi P \quad (\text{A.24})$$

これを ε について解く.

$$\varepsilon = 1 + 4\pi P \cdot E/E^2 \quad (\text{A.25})$$

ただし, ε は媒体の誘電率である. 光の速度は, ε 及び透磁率 μ を用いて $c = (\mu\varepsilon)^{-1/2}$ と与えられる. 屈折率 n は光速に反比例し,

$$\frac{n}{1} = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}} \simeq \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 + \frac{4\pi P \cdot E}{E^2}} \quad (\text{A.26})$$

ただし c_0 は真空中の光速であり, ε_0 は真空の誘電率で, 1 とおく. また空気中や水中の透磁率は真空の透磁率 μ_0 とほぼ同じ値であるため, $\mu \simeq \mu_0$ と近似した.

後は, P の値を導出すれば, (A.26) より屈折率が求まる. 数密度 N での双極子モーメント P は, 与えた電場 E に比例し,

$$P = N\alpha E \quad (\text{A.27})$$

である. よって, 誘電体内の任意点 A における電場について考える.

点 A に生成される電場として, 1. 点 A にある原子自身が生成する電場. 2. 周辺の原子によって生成される電場の二つがある. 前者を E_s , 後者を E_o と置くと,

$$E = E_o + E_s \quad (\text{A.28})$$

が成り立つ.

ここで, 原子の分極を直接的に生じさせているのは, E ではなく, 周辺の原子による電場 E_o であることに注意せねばならない. E では, 分極に影響を及ぼさない原子自身の電場を含む為である.

また, 単純な場では他の原子に囲まれて点 A の原子は球状の孔の中にあると, 近似できるだろう. よって, 図 A.4 のように誘電体から球状のプラグを取り出すと, $E_s =$ プラグに

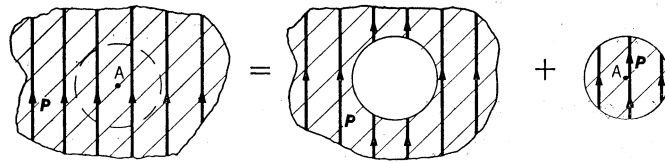


図 11-6 誘電体の任意の点における場は球状の孔内の場と球状のプラグによる場との和である

図 A.4: 誘電体での任意点 A の電場の分離. 誘電体は一様に分極しており, 分離後も分極を維持していると仮定 (ファインマン (1986a), 図 11.6)

よる電場, $E_o =$ プラグ以外の誘電体による電場として考えることができる. またこのプラグは一様に分極しているため, 中の電場は

$$E_s = -\frac{4\pi P}{3} \tag{A.29}$$

として与えられる. これを (A.28) に代入すると,

$$E_o = E + \frac{4\pi P}{3} \tag{A.30}$$

となる. まさしくこの電場 E_o によって原子は分極されているため, (A.27) に代入し, P について解く.

$$P = N\alpha E_o = N\alpha \left(E + \frac{4\pi P}{3} \right)$$

$$P = \frac{N\alpha E}{1 - 4\pi N\alpha/3} \tag{A.31}$$

これを, (A.26) へ代入し, α について解く.

$$n^2 = 1 + \frac{4\pi N\alpha}{1 - 4\pi N\alpha/3}$$

$$\alpha = \frac{3}{4\pi N} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right) \tag{A.32}$$

以上で, (A.11) は求まった.

参考文献

Liou, K. N., 2002, *An Introduction to Atmospheric Radiation Second Edition*, Academic Press, 583pp

ファインマン, レイトン, サンズ, 1986a, ファインマン物理学 III 電磁気学 (第 11 章), 岩波書店

ファインマン, レイトン, サンズ, 1986b, ファインマン物理学 IV 電磁波と物性 (第 11 章), 岩波書店

4.2 オゾンによる太陽放射の吸収

図 2.1 及び図 A8.1 は, §4.1 で議論した散乱過程による減衰に加えて, 太陽放射は, 大気成分 (主に紫外領域では酸素とオゾン, 赤外領域では水蒸気と二酸化炭素) による吸収でも減衰していることを示しているだろう. 最初に, 大気領域では主要なエネルギー入射である成層圏のオゾンによる太陽放射の吸収を考えよう.

オゾンは, 成層圏 (10–15km) および中間圏 (50–80km) で光化学過程において形成され (§5.6 参照), オゾンの混合率のピークは高度 25 km 付近で生じる. オゾンは, 紫外領域の太陽放射をハートレー帯 (200 – 300nm) で吸収する; 高度 70 km 以下では, 吸収されたエネルギーの全ては事実上粒子の運動エネルギーへと変換され, それゆえに大気温度は上昇する.

ハートレー帯におけるオゾンの吸収スペクトルはほぼ連続的なスペクトルで, すなわちその吸収係数 $k_{\tilde{\nu}}$ は滑らかに変化する波数 $\tilde{\nu}$ の関数である²³. また, 圧力にも依存しないため, 散乱の複雑さを無視でき²⁴, 高度 z における入射太陽フラックス $F_{S\tilde{\nu}}(z)$ は以下の式で与えられる^{25 26}.

$$F_{S\tilde{\nu}}(z) = F_{S\tilde{\nu}}(\infty) \exp\left(-\int_z^{\infty} k_{\tilde{\nu}} \rho_z \sec \theta dz\right) \quad (4.3)$$

ただし, ρ_z は高度 z におけるオゾン密度, θ は太陽天頂角である.

波数の変化を考慮するために, $F_{S\tilde{\nu}}$ が波数 $\tilde{\nu}$ における単位波数幅あたりの太陽フラックス量であることに注意する.

²³ハートレー帯はなぜ連続スペクトルを描くのか. 一般的にこのようなスペクトルは, 励起先のエネルギー準位が連続, すなわち分子が解離する場合に生じる. 実際にこの吸収帯では, $O_3 \rightarrow O(^3D)+O_2$ という反応が起きている. (Liou(2002), eq(3.2.14a))

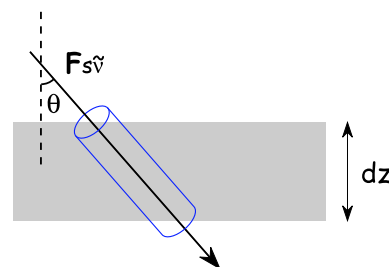
²⁴厳密な計算を行う場合には考慮される (§12.8 参照)

²⁵§2.2 では, 同じ様な式を放射強度 I を用いて行った. 放射エネルギーを扱うに当たって, 放射強度と放射フラックスをどのように使い分けているのか. 放射強度は, ある単位面積を通過した放射がある単位立体各方向に向かうエネルギーであるのに対し, 放射フラックスはある単位面積を通過した放射のエネルギーを指す (ともに単位時間, 単位波数). そのため, 散乱光等の方向性をもつを考える場合は放射強度, 地上における太陽光のような平行光線を考える場合は放射フラックスを用い (ちなみに平行光線の放射強度を導出するには, フラックスに対しデルタ関数を用いて立体角の積分を行う).

²⁶天頂角 θ の放射フラックスが鉛直方向に dz の厚さを持つ大気を通り抜ける際, その光路長は, $\sec \theta dz$ となる.

(4.4) では, 実際にフラックスによって加熱されている大気は底辺を単位面積とした高さ $\sec \theta dz$ の円柱分である (右図参照). 以下のように変形すると, 左辺は円柱の温度変化, 右辺が吸収する全波数分の放射フラックス (単位時間, 単位面積) になる.

$$\sec \theta dz c_p \rho \frac{dT}{dt} = \int_{\text{band}} F_{S\tilde{\nu}} d\tilde{\nu}$$



高度 z における加熱率を得る為に、以下の式での波数の積分が必要とされる。

$$c_p \rho \frac{dT}{dt} = \cos \theta \int_{\text{band}} \frac{dF_{S\tilde{\nu}}}{dz} d\tilde{\nu} \quad (4.4)$$

スペクトルにわたって $k_{\tilde{\nu}}$ の値をあたえ、また様々な高度における ρ_z を与えると、(4.3) 及び (4.4) の数値積分は実行できる (太陽フラックス及びオゾンの吸収の情報は Appendix 8,9 を参照)。典型的な中緯度のオゾン分布では、加熱のピークは高度 50 km 付近にある；一日で積分した場合、それは、温度変化率であるおよそ 8 K day^{-1} と等しい (問題 4.6)。

Appendix オゾンの吸収帯

オゾンの吸収帯は 3 つに分けられる。これらは全て紫外線領域に位置しており、電子配置の変化かもしくは分子の解離によって生じている。

ハートレー帯：200 – 300 nm の最も強い吸収帯。紫外線 (UV-B/C) に位置し、中心は 255.3 nm。他の二つに比べ連続的。 $\text{O}_3 \rightarrow \text{O}(^1\text{D})$ 。

ハギンス帯：300 – 360 nm 波長が延びるにしたがい吸収が弱くなる領域。紫外領域 (UV-A/B) に位置する。スペクトルは不連続。 $\text{O}_3 \rightarrow \text{O}(^3\text{P})$ 。

シャピユイ帯：440 – 1180 nm の近赤外領域にある弱い吸収帯。中心はおよそ 600 nm で可視領域に位置する。スペクトルは若干不連続。

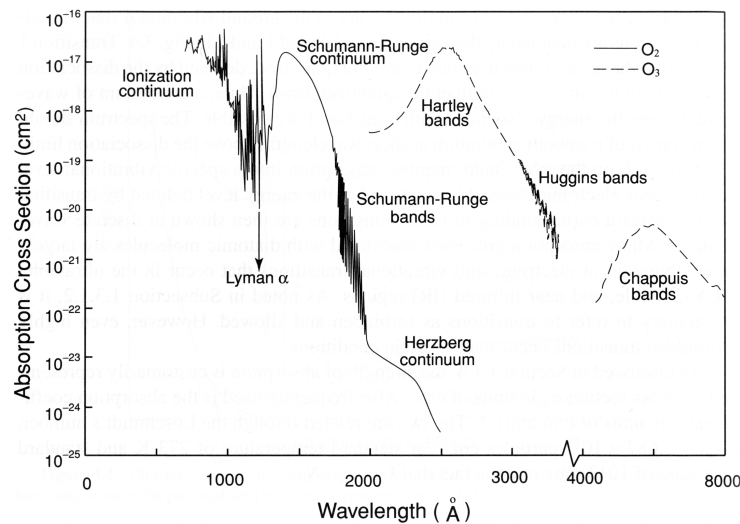


Figure 3.5 Absorption cross section of ozone and molecular oxygen in the ultraviolet spectral region. Data taken from Brasseur and Solomon (1986), Vigroux (1953), and Griggs (1968).

図 4.1: オゾンの吸収帯 (破線) と酸素の吸収帯 (実線)。 (Liou(2002), fig3.5)

また、赤外領域にも回転/振動吸収帯が存在している。 ν_1, ν_2, ν_3 は基本振動のモードを示しており、 ν_1 は対称伸縮モード、 ν_2 は変角モード、 ν_3 は反対称伸縮モードである²⁷。

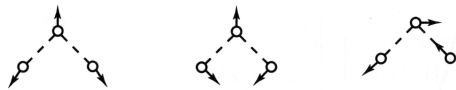
表 5.8 オゾン ($^{16}\text{O}_3$) の回転-振動帯

吸収帯	吸収帯 の中心 (cm^{-1})	上位 準位 ($\nu_1 \nu_2 \nu_3$)	下位 準位 ($\nu_1 \nu_2 \nu_3$)	吸収強度 $\text{cm} \times 10^{21}$ at 296K
回転	0.00	000	000	41.3
14 μm	700.93	010	000	62.8
9.6 μm	1015.81	002	001	17.4
	1025.60	011	010	45.0
	1042.08	001	000	1394.0
	1103.14	100	000	67.1
倍音振動	2057.89	002	000	11.1
と結合振動	2110.79	101	000	113.4
	3041.20	003	000	11.0

S_n のカットオフ値は 10^{-19}cm である (Goody and Yung, 1989)²⁴).

図 4.2: オゾンのエネルギー準位の変化と吸収帯との対応 (柴田 (2000), 表 5.8)

²⁷モードの振動を示す。左から ν_1 (対称振動モード), ν_2 (変角モード), ν_3 (非対称振動モード)。 (Liou(2002), fig 3.3)



4.3 単一の吸収線による吸収

赤外領域のスペクトルでは分子の吸収帯における吸収係数は、振動数に強く依存する。分子は、様々な振動/回転状態に関連した不連続なエネルギー準位を持っている；振動-回転帯には、非常に多くの吸収線が含まれている（図 4.1 参照）。吸収帯の構造はとても複雑であり、その中の各吸収線は、衝突による広がりやもしくはドップラー効果による広がりの為にさらに複雑になっている。；広がるメカニズムは温度と圧力によって変化し、それゆえに大気全体で一定ではない²⁸。

与えられたスペクトル領域において、大気平均透過率を計算するために、多くの個々の吸収線の和を取る必要がある。

使用される最も単純な吸収帯モデルは、独立した（すなわち非重畳な）多くの吸収線からなり、また衝突による広がりのみ考慮する。大気で重要な二酸化炭素及び水蒸気の吸収帯を考える場合、成層圏の高度 20 – 60 km の領域では、このモデルはよい近似を与えるだろう。より高い高度では、ドップラー効果による広がりが重要になってくるし（問題 4.7）、低

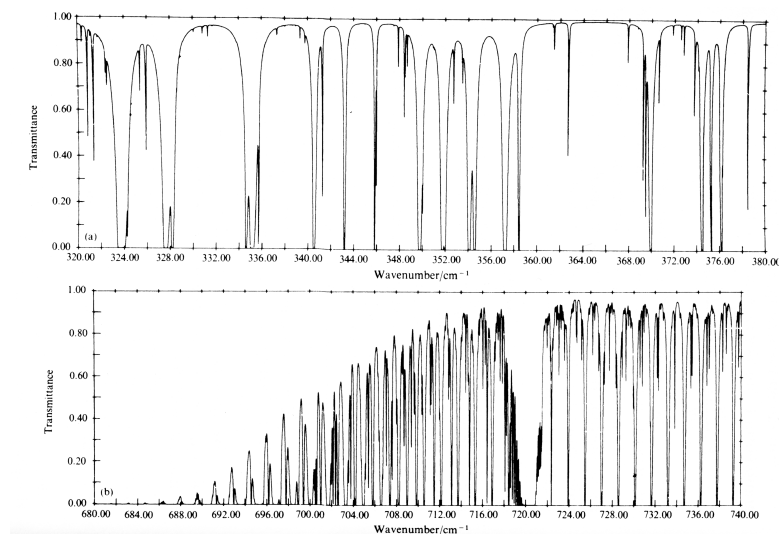


図 4.1: 分子吸収帯のグラフ。高度 12 km での水平過程 10 km における大気伝達で、McCatchey & Selby (1972) によって計算された。(a) 波数 $320 - 380 \text{ cm}^{-1}$ (波長 $31 - 26 \mu\text{m}$) 領域の吸収線は、水蒸気に起因している。(b) 波数 $680 - 740 \text{ cm}^{-1}$ (波長 $15 - 13 \mu\text{m}$) 領域は主に CO_2 に起因している。このダイアグラムはスペクトルのほんの一部しか示していない。振動数に伴う大気透過率は非常に粗いスケールである 図 4.2 と比較せよ。

²⁸衝突による広がり: 分子間の衝突や相互作用によるもの。衝突によってすなわち単色波の光が分断されることから生じる。

ドップラー効果による広がり: 分子の熱運動によって生じるドップラー効果によるもの。分子のもつ速度に依存するため、40 km 以上上空で顕著になる

い高度では吸収線が十分重なっている²⁹. 単純な理論で, 波数 $\tilde{\nu}$ における吸収係数 $k_{\tilde{\nu}}$ を導くことができる. 衝突広がり吸収線の中心波数を $\tilde{\nu}_0$ とすると, (Houghton and Smith, 1966 ; Eisberg, 1961 参照)

$$k_{\tilde{\nu}} = \frac{s\gamma}{\pi\{(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)^2 + \gamma^2\}} \quad (4.5)$$

である^{30 31}. ただし,

$$s = \int_0^{\infty} k_{\tilde{\nu}} d\tilde{\nu} \quad (4.6)$$

は吸収線の強度であり, $\gamma = (2\pi t c)^{-1}$ は波数の半幅幅³²である. t は吸収気体の平均衝突時間であり, 大気中では, 数桁のオーダーで変化する (圧力に逆比例するため). γ の温度依存性は圧力と比較して小さいので無視し³³, 以下のように書くことができる.

$$\gamma = \gamma_0 p / p_0 \quad (4.7)$$

γ_0 は標準圧力 p_0 における値である. 多くの気体に対して, STP³⁴ では, $\gamma_0 \simeq 0.1 \text{ cm}^{-1}$, 高度 50 km のような圧力 0.1 kPa では, $\gamma \simeq 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$ の値を取る.

密度 ρ の吸収気体を含む長さ l の経路を通った, 高解像度の実験室の分光計で見える吸収線を考える. このような経路の透過率 $\tau_{\tilde{\nu}}$ は,

$$\tau_{\tilde{\nu}} = \exp(-k_{\tilde{\nu}} \rho l) \quad (4.8)$$

また, 図 4.2 で与えられた吸収線の等価幅もしくは積分吸収率 W は, 以下のように定義される³⁵.

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\infty} d\tilde{\nu} (1 - \tau_{\tilde{\nu}}) \\ &= \int_0^{\infty} d\tilde{\nu} \{1 - \exp(-k_{\tilde{\nu}} \rho l)\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

²⁹ 吸収線が重なりやすいということは, 吸収線の幅が広いということ. 下層では衝突による広がりが生じているため, 幅が広く, 吸収線が重なりやすい

³⁰ 実際の観測値と (4.5) を比較した場合, 極大値は一致しているが, $(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)$ の値が大きくなるにつれ, 観測値の方が小さくなる.

³¹ 導出は Appendix 参照

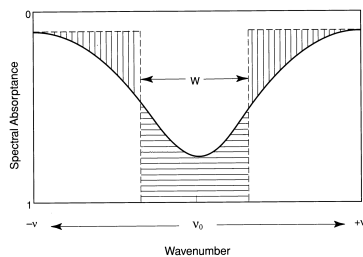
³² $k_{\tilde{\nu}}$ は, $(\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0)$ のとき, 最大値 $(S/\pi\gamma)$ を示すのに対し $(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0) = \gamma$ のとき, $(S/2\pi\gamma)$ と, 最大値の 1/2 を示すことから半幅値と呼ばれる.

³³

$$\gamma \propto \frac{1}{t} \propto N\bar{v} \propto \frac{P}{RT} \sqrt{\frac{3kT}{m}} \propto \frac{P}{T} \sqrt{T} \propto \frac{P}{\sqrt{T}}$$

ただし, N : 数密度, \bar{v} : 平均速度, R : 気体定数, k : ボツルマン定数, m : 分子の質量

³⁴ Standard Temperature and Pressure: 標準状態



二つの W の近似は非常に有効である：(1) 弱吸収近似は、(4.9) の指数関数をテイラー展開し第 2 項目までで近似を行い、(4.6) から $k_{\bar{\nu}}$ を置き換えると、以下ようになる³⁶。

$$W = s\rho l \quad (4.10)$$

また、(2) 強吸収近似は、吸収線の中央付近の領域では、全く透過しないとする（この吸収線の中央はこのとき黒体であると言う）。吸収線中心付近の実際の $k_{\bar{\nu}}$ は、それゆえに、 γ^2 が (4.5) から省略されるのに十分なほど大きい場合、重要な値ではない。

(4.9) の積分は実行すると以下ようになる。（問題 4.9）,

$$W = 2(s\gamma\rho l)^{1/2} \quad (4.11)$$

幅 W を吸収過程 l に対してプロットすると、吸収曲線を得る。（図 4.2）。

吸収帯の主要部分の幅 $\Delta\bar{\nu}$ であり、中に多くの非重合である吸収線が存在する場合、スペクトル間隔における平均透過率 $\bar{\tau}$ は、以下のように書けるだろう。

$$\bar{\tau} = 1 - \frac{\sum_i W_i}{\Delta\bar{\nu}} \quad (4.12)$$

ただし、 W_i は i 番目の吸収線の等価幅である。

³⁶(4.10) を導出する。吸収が弱い場合、 $k_{\bar{\nu}}\rho l \ll 1$ として近似することができる。 $\exp(-k_{\bar{\nu}}\rho l)$ をテイラー展開して、

$$\begin{aligned} \exp(-k_{\bar{\nu}}\rho l) &= 1 - k_{\bar{\nu}}\rho l + \frac{1}{2}(k_{\bar{\nu}}\rho l)^2 \dots \\ &\simeq 1 - k_{\bar{\nu}}\rho l \end{aligned}$$

これと、(4.6) の式を (4.9) へ代入して整理すると

$$W = \int_0^\infty d\bar{\nu} \{1 - \exp(-k_{\bar{\nu}}\rho l)\} \simeq \int_0^\infty d\bar{\nu} \{1 - (1 - k_{\bar{\nu}}\rho l)\} = \int_0^\infty d\bar{\nu} (k_{\bar{\nu}}\rho l) = \rho l \int_0^\infty d\bar{\nu} k_{\bar{\nu}} = s\rho l$$

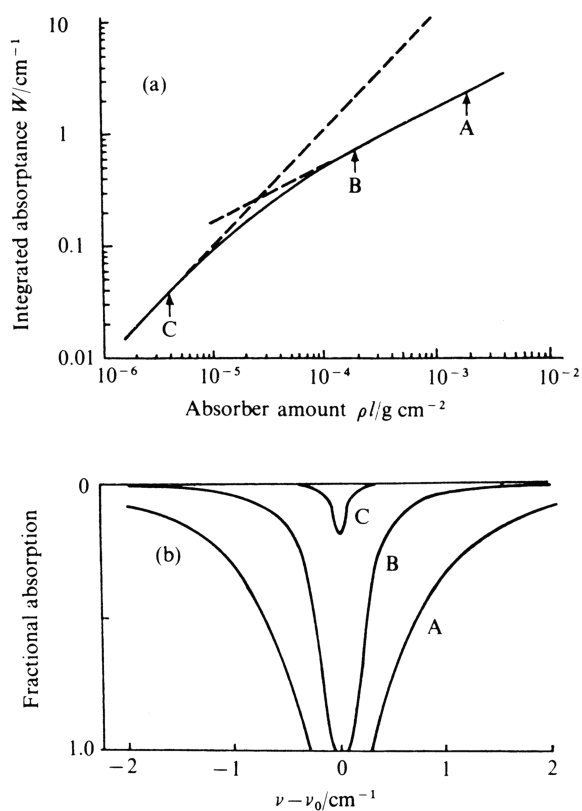


図 4.2: 典型的なスペクトル線の吸収曲線 ($s=10^4\text{cm}^{-1}, (\text{g cm}^{-2})^{-1}, \gamma_0=0.06\text{ cm}^{-1}$). 成長曲線に基に対して, 線形比例及び平方根比例のように見える. (b) ρl を変化させた場合のスペクトルの実際の形状. (a) で示された値と一致している.

Appendix (4.5) ローレンツ線型の導出

衝突によって広げられた吸収線の形をローレンツ線型という。この節では、衝突広がりによって広がった、(4.5) ローレンツ線型の吸収係数 $k_{\tilde{\nu}}$ 、すなわち吸収されるエネルギーの波数分布を導出する。

まず、衝突から次の衝突までの時間を T と置く。すると、時刻 $0 - T$ でブツ切れになった波が存在することになる。その波をフーリエ変換し、波数空間で展開すると衝突時間が T の場合におけるエネルギーの波数依存性がわかる。最後に衝突間の時間が T である確率を求め、吸収されるエネルギーの期待値を導出する。

ある分子で吸収される単色光を、

$$f(t) = A \cos 2\pi\tilde{\nu}_0 ct \quad (\text{A.1})$$

と置く。ただし、 A は振幅、 $\tilde{\nu}_0$ は波数、 c は光の速度、 t は時間である。衝突が起きた瞬間、分子が吸収する波の位相は不規則に変化する。

この分子は時間間隔 T で他分子と衝突している状態を考える。その波は時刻 T の間だけしか持続することができない。すなわち、波数 $\tilde{\nu}_0$ の波が吸収し得る時間は、 $-T/2 - T/2$ の間のみである。これを波数空間に分解するため、フーリエ余弦変換を行う³⁷。

$$\begin{aligned} g(\tilde{\nu}) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos 2\pi\tilde{\nu} ct \, dt \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos 2\pi\tilde{\nu}_0 ct \cos 2\pi\tilde{\nu} ct \, dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{T/2} A \cos 2\pi\tilde{\nu}_0 ct \cos 2\pi\tilde{\nu} ct \, dt \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{T/2} \{ \cos 2\pi(\tilde{\nu}_0 + \tilde{\nu}) ct + \cos 2\pi(\tilde{\nu}_0 - \tilde{\nu}) ct \} \, dt \\ &= \frac{A}{(2\pi)^{3/2} c} \left\{ \frac{\sin \pi(\tilde{\nu}_0 + \tilde{\nu}) cT}{(\tilde{\nu}_0 + \tilde{\nu})} + \frac{\sin \pi(\tilde{\nu}_0 - \tilde{\nu}) cT}{(\tilde{\nu}_0 - \tilde{\nu})} \right\} \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

今考えている吸収線の幅 $\tilde{\nu}_0 - \tilde{\nu}$ は、 $\tilde{\nu}_0$ よりもずっと小さい為、第 1 項は第 2 項と比べ無視できる。

$$g(\tilde{\nu}) \simeq \frac{A}{(2\pi)^{3/2} c} \frac{\sin \pi(\tilde{\nu}_0 - \tilde{\nu}) cT}{(\tilde{\nu}_0 - \tilde{\nu})} \quad (\text{A.3})$$

ここで求めている値 $g(\tilde{\nu})$ は光の電場、もしくは磁場の変動であるから、エネルギーは $g(\tilde{\nu})^2$ に比例する。よって、吸収係数も同様に比例する。

$$k_{\tilde{\nu}} \propto \{g(\tilde{\nu})\}^2 \quad (\text{A.4})$$

³⁷4 段目への変形は積和の公式を用いた。

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))$$

しかし、まだ与えた変数 T の依存性が残っているため、衝突間隔が T である確率を $P(T)$ とし、 T におけるエネルギーの平均値をとる。

$$k_{\bar{\nu}} = A' \int_0^{\infty} \{g(\bar{\nu})\}^2 P(T) dT \quad (\text{A.5})$$

ただし、 A' は

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_{\bar{\nu}} d\bar{\nu} = S \quad (\text{A.6})$$

の関係から分布の形を吸収線強度 S に規格化するための定数である。また、衝突間隔が T である確率 $P(T)$ は以下の式で与えられる³⁸

$$P(T) dT = \frac{1}{\tau} \exp(-T/\tau) \quad (\text{A.8})$$

³⁸時刻 T までにある事象が起きている確率を $p(T)$ と置くと、

$$p(T + dT) = p(T) + (1 - p(T)) \frac{dT}{\tau}$$

と置く。これは、ある時間 dT の間に事象が生じる確率は、 dT/τ とした。時刻 $T + dT$ までに事象が生じている確率は、 T までに事象が生じている確率 (第 1 項) と、 $T - T + dT$ の間に初めて事象が生じている確率 (第 2 項) で表される。後者は T までに事象が起きていない確率 $(1 - p(T))$ とある任意の時間 dT の間に事象が生じる確率 dT/τ の積となる。

この式を解くと、

$$\begin{aligned} p(T + dT) &= p(T) + (1 - p(T)) \frac{dT}{\tau} \\ \frac{dp(T)}{1 - p(T)} &= \frac{dT}{\tau} \\ \text{よって、} \quad p(T) &= 1 - \exp(-T/\tau) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

が得られる。次に、事象が生じる平均時間を導出する。時刻 $T - T + dT$ である確率 $P(T) dT$ は、

$$P(T) dT = p(T + dT) - p(T) = dp(T)$$

で表されるため、

$$\text{事象が生じる平均時間} = \int_0^{\infty} TP(T) = \int_0^{\infty} T dp(T) = \int_0^{\infty} T \frac{dp(T)}{dT} dT = \int_0^{\infty} \frac{T}{\tau} \exp(-T/\tau) dT = \tau$$

となる。よって先程比例定数の逆数として置いた τ は事象が生じる平均時間を示している。時刻 T で事象が生じる確率は以下の通り。

$$P(T) dT = \frac{dp(T)}{dT} = \frac{\exp(-T/\tau)}{\tau}$$

ただし, τ は平均の衝突間隔時間である. これを代入し積分すると, 吸収係数を得る³⁹.

$$k_{\tilde{\nu}} = \frac{s\gamma}{\pi\{(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})^2 + \gamma^2\}} \quad (\text{A.11})$$

39

$$\begin{aligned} k_{\tilde{\nu}} &= A' \int_0^{\infty} \{g(\tilde{\nu})\}^2 P(T) dT \\ &= A'' \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \pi(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})cT}{(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})^2} \exp(-T/\tau) dT \\ &= \frac{A''}{(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})^2} \int_0^{\infty} \sin^2 \pi(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})cT \exp(-T/\tau) dT \\ &= \frac{A''}{(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})^2} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos 2\pi(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})cT}{2} \exp(-T/\tau) dT \\ &= \frac{A''}{2(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})^2} \tau - \int_0^{\infty} \{\cos 2\pi(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})cT\} \exp(-T/\tau) dT \\ &= \frac{A''}{2(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})^2} \tau - \frac{\tau}{1 + (\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})^2/\gamma^2} \\ &= \frac{\tau A''}{2(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})^2} \frac{(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})^2/\gamma^2}{1 + (\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})^2/\gamma^2} \\ &= \frac{\tau A''}{2} \frac{1}{\gamma^2 + (\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})^2} = A''' \frac{1}{\gamma^2 + (\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})^2} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

5 段目の導出には部分積分を用いた.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \{\cos 2\pi(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})cT\} \exp(-T/\tau) dT &= -\tau [\{\cos 2\pi(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})cT\} \exp(-T/\tau)]_0^{\infty} \\ &\quad - 2\pi(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})c\tau \int_0^{\infty} \{\sin 2\pi(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})cT\} \exp(-T/\tau) dT \\ &= \tau + 2\pi(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})c\tau^2 [\{\sin 2\pi(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})cT\} \exp(-T/\tau)]_0^{\infty} \\ &\quad - \{2\pi(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})c\tau\}^2 \int_0^{\infty} \{\cos 2\pi(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})cT\} \exp(-T/\tau) dT \\ &= \tau + 2\pi(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})c\tau^2 \\ &\quad - \{2\pi(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})c\tau\}^2 \int_0^{\infty} \{\cos 2\pi(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})cT\} \exp(-T/\tau) dT \\ \int_0^{\infty} \{\cos 2\pi(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})cT\} \exp(-T/\tau) dT &= \frac{\tau}{1 + \{2\pi(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})c\tau\}^2} \\ &= \frac{\tau}{1 + \{(\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})/\gamma\}^2} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

(4.6) の条件を用いて, 比例定数 A''' を決定する. ただし, 積分範囲は, $-\infty-\infty$ とし, $\nu < 0$ の時の $k_{\tilde{\nu}} = 0$ と

定義する.

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-\infty}^{\infty} k_{\tilde{\nu}} d\tilde{\nu} \\
 &= A''' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma^2 + (\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})^2} d\tilde{\nu} \\
 &= A''' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma dx}{\gamma^2(1+x^2)} \\
 &= \frac{A'''}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)} \\
 &= \frac{A'''}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\tan \theta)}{(1+\tan^2 \theta)} \\
 &= \frac{A'''}{\gamma} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{(1+\tan^2 \theta)} \frac{d(\tan \theta)}{d\theta} d\theta \\
 t &= \frac{A'''}{\gamma} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \\
 &= \frac{A''' \pi}{\gamma}
 \end{aligned}$$

ただし, $x = (\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})/\gamma$, $d\tilde{\nu} = \gamma dx$

ただし, $x = \tan \theta$

よって, $A''' = \frac{S\gamma}{\pi}$

$$k_{\tilde{\nu}} = \frac{S\gamma}{\pi\{\gamma^2 + (\tilde{\nu}_o - \tilde{\nu})^2\}}$$

4.4 大気経路の透過率

前説の結果を圧力 p_1 から p_2 ($p_1 > p_2$) における鉛直大気経路に適用しよう. 弱い吸収の場合は前説の内容がそのまま適用でき, 等価幅が経路の吸収物質のみの関数として表される.

$$W = s \int_{\text{path}} c \rho dz \quad (4.13)$$

ただし, c は吸収物質の相対質量濃度, ρ は全密度である. 静水圧の式 (??) を用い, また経路では c が一定であると仮定すると, 次式を得る.

$$W = sc(p_1 - p_2)/g \quad (4.14)$$

吸収が強い場合, どのように透過するのはあまり明らかではない. それは, 経路において圧力 (それゆえに γ も) が変化するためである. よってこの場合, 経路での平均圧力 \bar{p} を以下のように定義した *Curtis-Godson* 近似を適用する.

$$\bar{p} = \frac{\int p c \rho dz}{\int c \rho dz} \quad (4.15)$$

すなわち, この平均圧力は, 圧力に経路での吸収物質の重みをつけたものからなる. この近似を強吸収近似に適用した場合でも, 厳密解を得る (問題 4.13); もちろん, 弱吸収近似でも等価幅が圧力に依存しない為, 厳密解を得る⁴⁰.

一様な組成の場合 $\bar{p} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ であり, (4.11) に (4.7), (4.15) を代入すると 1 本の

⁴⁰要するに, 吸収が強くも弱くもない場合, この近似は若干ずれる

吸収線に対する強吸収近似における次式を得る⁴¹ .

$$W = 2 \left\{ \frac{s\gamma_0 c}{2gp_0} (p_1^2 - p_2^2) \right\}^{1/2} \quad (4.16)$$

この場合, 吸収帯での平均透過率は, (4.12) と (4.16) から

$$\bar{\tau} = 1 - \frac{1}{\Delta\tilde{\nu}} \left\{ \frac{2c}{gp_0} (p_1^2 - p_2^2) \right\}^{1/2} \sum_i (s_i \gamma_{0i})^{1/2} \quad (4.17)$$

ただし, $\sum_i (s_i \gamma_{0i})^{1/2}$ は, 吸収帯に存在するスペクトル線の強さ及び標準状態での半幅との積の平方根の和をとったものである⁴² .

式 (4.17) によって透過率が与えられれば, 任意の経路に対する透過率や, 異なる高度の太陽放射到達率を求めることが出来る (問題 4.15). 多くの吸収線が重複している領域での, 簡単な理論の拡張は, 4.9 節で述べる.

⁴¹前説では ρ を吸収物質の密度と定義していたため, (4.11) の中の ρ は, $c\rho$ と置き換えて求める.

$$W = 2(s\gamma\rho l)^{1/2} \rightarrow 2(s\gamma c\rho l)^{1/2} \quad (4.11)$$

$$\gamma = \frac{\gamma_0 p}{p_0} \quad (4.7)$$

(4.11) で l のかわりに z 積分を行う.

$$W = 2 \int_{z_1}^{z_2} s\gamma c\rho dz \quad {}^{1/2} = 2 \quad s\bar{\gamma}c \int_{z_1}^{z_2} \rho dz \quad {}^{1/2} \quad (*)$$

z に依存するのは, γ, ρ であるが, うち γ は, (4.7) と (4.15) より, 平均値を代入し z の依存性を考慮せず扱う.

$$\bar{\gamma} = \frac{\gamma_0 \bar{p}}{p_0} = \frac{\gamma_0}{p_0} \frac{1}{2} (p_1 + p_2)$$

また静水圧の式より,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \rightarrow \int_{z_1}^{z_2} \rho dz = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{g} = \frac{p_1 - p_2}{g}$$

以上を (*) に代入.

$$W = 2 \quad s\bar{\gamma}c \int_{z_1}^{z_2} \rho dz \quad {}^{1/2} = 2 \quad s \quad \frac{\gamma_0}{p_0} \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \quad c \quad \frac{p_1 - p_2}{g} \quad {}^{1/2} = 2 \quad \frac{s\gamma_0 c}{2gp_0} (p_1^2 - p_2^2) \quad {}^{1/2}$$

⁴²吸収線が多数ある領域の平均透過率を出すのは非常に困難である. (4.17) のようになると, 吸収線ごとに値が変わるのは, Σ の中身だけになる. 実際の大気に用いる場合, ある温度, ある波数間での Σ の中身を吸収線一つ一つの値ではなくて, それらの和として与えることが可能である.

4.5 積分形の放射伝達方程式

これまでこの章では、太陽放射での散乱と、紫外、赤外部分で吸収があるスペクトル領域の透過を扱って来た。今、スペクトルの赤外部分では、放射過程と吸収過程の両方を考える必要がある。私達は、非常に簡略化した大気モデルを想定した2章の放射伝達の議論をたどろう。前回は、大気は放射平衡が成立し、また吸収係数は振動数に依存しないと想定した。今回は、任意の大気に対して高度と振動数による積分を実行する、より一般的な問題を構築しよう。しかしまだ吸収及び放射過程のみの、いわゆる非散乱大気に議論を限定する。

大気において放射伝達の影響を評価するために、任意の構造や構成をした大気の任意の高度における放射強度を求める必要がある。§2.2で仮定した平行平板大気では、放射強度は積分形の Schwarzschild の方程式 (??)⁴³ の中に含まれており、積分因子 $\exp(-\chi)$ を用いると容易に導かれる (問題 4.16)。積分方程式は、含まれる物理過程を図示することで直接的にも得られる。

吸収係数の振動数 (もしくは波数) 依存性に注意して、最初に波数 $\tilde{\nu}$ 領域で伝達される放射強度 $I_{\tilde{\nu}}$ を考える。 $I_{\tilde{\nu}}$ の単位は、単位面積、単位立体角、単位波数間隔におけるエネルギー [W] である。

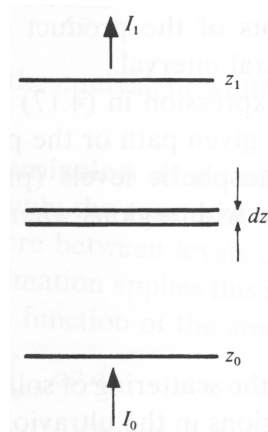


図 4.3:

高度 z_0 から z_1 までの薄い平板大気を考え、放射強度 $I_{\tilde{\nu}0}$ が鉛直上向きに入射しているとする。平板大気の上端から出て行く放射強度 $I_{\tilde{\nu}1}$ を計算するために、高度 z ($z_0 < z < z_1$) における非常に薄い平板大気を考える。また、その大気は温度 $T(z)$ によって上方向に強度 $k_{\tilde{\nu}}\rho dz B_{\tilde{\nu}}(z)$ で放射している (§2.2 参照) とする。ただし、 $k_{\tilde{\nu}}$ は波数 $\tilde{\nu}$ における吸収係

43

$$dI = -Ik\rho dz + Bk\rho dz \quad \text{or} \quad \frac{dI}{d\chi} = I - B \quad (2.3)$$

数であり,

$$B_{\tilde{\nu}} = 2\tilde{\nu}^2 \frac{hc^2\tilde{\nu}}{\exp(hc\tilde{\nu}/kT) - 1} \quad (4.18)$$

は, 波数 $\tilde{\nu}$ でのプランク関数 (Appendix 7 参照) である (定義は §2.2 と同様)⁴⁴. この大気からの放射は z_1 へ到達する前に減衰するため, 透過率 (2.2 節) は以下の量となる.

$$\tau_{\tilde{\nu}}(z, z_1) = \exp\left(-\int_z^{z_1} k_{\tilde{\nu}}\rho dz'\right) \quad (4.19)$$

平板大気 dz の熱放射による $I_{\tilde{\nu}1}$ への寄与は,

$$\begin{aligned} dI_{\tilde{\nu}1} &= k_{\tilde{\nu}}\rho dz B_{\tilde{\nu}}(z) \exp\left(-\int_z^{z_1} k_{\tilde{\nu}}\rho dz'\right) \\ &= B_{\tilde{\nu}}(z) d\tau_{\tilde{\nu}}(z, z_1) \end{aligned} \quad (4.20)$$

となる. これは, (4.19) 式を変形すると簡単に確認されるだろう⁴⁵. それゆえに, 高度 z_1 での放射強度は, 次式のように書ける.

$$I_{\tilde{\nu}1} = I_{\tilde{\nu}0}\tau_{\tilde{\nu}}(z_0, z_1) + \int_{\tau_{\tilde{\nu}}(z_0, z_1)}^1 B_{\tilde{\nu}}(z) d\tau_{\tilde{\nu}}(z, z_1) \quad (4.21)$$

初項は, 高度 z_0 における入射放射強度からの寄与である.

数式 (4.21) は積分形の放射伝達方程式であり, 大気中での放射伝達として重要であるだけでなく, 大気上端から出て行く放射を測定することによって大気構造が解明できる点でも重要である (§12.6 参照)⁴⁶.

⁴⁴ 本文では, $B_{\tilde{\nu}} = 2\tilde{\nu}^2 \frac{hc^2\tilde{\nu}}{\exp(hc\tilde{\nu}/kT) - 1}$ となっていたが, 誤植だと思われる. (4.18) でなければ, 右辺は単位時間あたりのエネルギーであるのに, 左辺は時間の次元がプランク定数 h [Js] と光の速度 c [m/s] の積によって打ち消されてしまう.

⁴⁵ τ を z で微分すると以下の通り. これを用いて (4.20) は変形されている.

$$\frac{d\tau_{\tilde{\nu}}(z, z_1)}{dz} = k_{\tilde{\nu}}\rho \exp\left(-\int_z^{z_1} k_{\tilde{\nu}}\rho dz'\right)$$

⁴⁶ Appendix 参照

Appendix 地球大気上端から出ていく放射

Fig. 12.7. Thermal emission from the earth plus atmosphere emitted vertically upwards and measured by the infrared interferometer spectrometer on Nimbus 4, (a) over Sahara, (b) over Mediterranean, (c) over Antarctica. The radiances of black bodies at various temperatures are superimposed. (From Hanel et al., 1971)

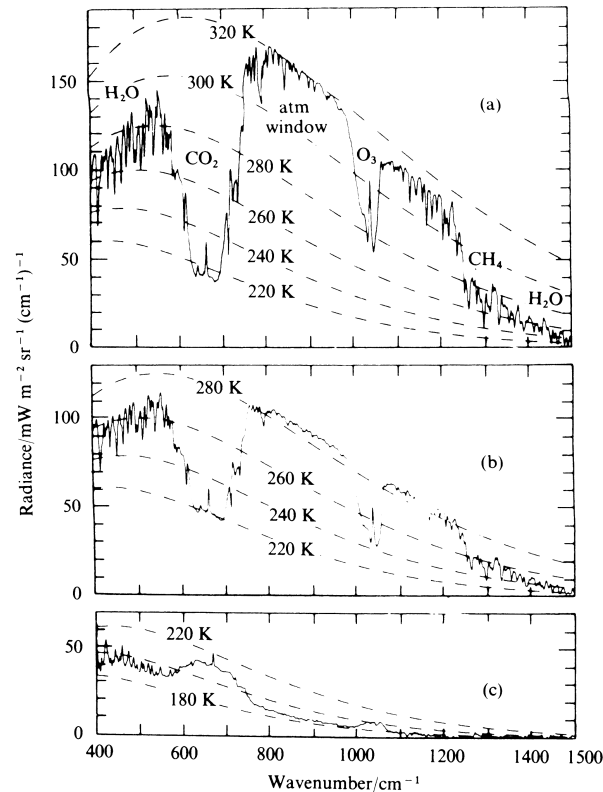


図 A.1: ニンバス 4 号衛星搭載の赤外干渉分光計で観測された地球及びその大気からの上向き放射強度. (a) サハラ砂漠, (b) 地中海, (c) 南極. 様々な温度に対応する黒体放射強度を破線で示す (fig12.7)

大気上端から 図 A.1 のような放射が観測された場合, 大気のどのような情報が得られるか. (a) を例にして考察する.

まず, スペクトルはおおよそ 320 K に沿っており, ところどころに放射強度が小さくなる波数領域がある. これらの領域は大気による吸収が見えており, また大気温度が地表面よりも低いことがわかる (大気温度 > 地表面温度の場合, 地表面からの放射を吸収した大気はそれに応じた $B(T)$ で放射を出す. $B(T)$ は温度が増加すると大きくなるため, 吸収帯での放射強度はより強くなるはずである.).

吸収線がぎざぎざしているのは, H_2O による吸収である. また, 波数 600 – 700 /cm には CO_2 , 波数 1000 /cm 付近には O_3 による吸収スペクトルが目立っており, これらが温室効果気体として働いていることが解る.

4.6 振動数による積分

任意の高度において全放射強度を含むためには、重要な放射が存在する領域の全振動数で積分する必要がある。積分形の放射伝達方程式 (4.21) を振動数積分すると、以下の式が導かれる。

$$I_1 = \int_0^\infty I_{\tilde{\nu}0} \tau_{\tilde{\nu}}(z_0, z_1) d\tilde{\nu} + \int_0^\infty \int_{\tau_{\tilde{\nu}}(z_0, z_1)}^1 B_{\tilde{\nu}}(z) d\tau_{\tilde{\nu}}(z, z_1) d\tilde{\nu} \quad (4.22)$$

(4.22) の右辺の量において、 $B_{\tilde{\nu}}$ は振動数に対して比較的ゆっくり変化するが、 $\tau_{\tilde{\nu}}$ は激しく変化する (図 4.1 参照)。任意のスペクトル領域でも、適切な放射強度、場所、スペクトルの幅と形を与えれば、原理的に (4.22) を振動数において積分することは可能である。しかしながら、実際に積分をきちんと行うためには、分子吸収帯構造に関連した複雑な構造を取り除き簡略化させる必要がある。

吸収線の非重合近似を用いたそのような簡略化の一つは、§4.3 で議論した；さらなる方法は、§4.9 と問題 4.19 に掲載している。

4.7 放射過程による加熱率

放射伝達計算を行う一番の理由は、大気のエネギー収支に対する放射過程の役割を推測する為である。局所的な加熱率は、上向き放射フラックスと下向き放射フラックスの発散から求めた (2.4)⁴⁷ によって記されている。

大気ほぼ全ての領域に対して、立体角積分をしたものに §2.2 の簡単な近似を用いるのは適切であり、すなわち、(4.22) において τ を τ^* によって置き換え (いわゆる、経路の長さを 5/3 倍する)⁴⁸、 B を πB に置き換える⁴⁹ と、高度 z_1 における上向きフラックスの式は以下のように書くことができる。

$$F^\uparrow = \int_0^\infty F_{\nu 0} \tau_\nu^*(z_0, z_1) d\tilde{\nu} + \int_0^\infty \int_{\tau_\nu^*(z_0, z_1)}^1 \pi B_\nu(z) d\tau_\nu^*(z, z_1) d\tilde{\nu} \quad (4.23)$$

完全に同じ式が下方向のフラックス F^\downarrow にも当てはまる。

47

$$\frac{d}{dz} F^\downarrow - F^\uparrow = \rho c_p \frac{dT}{dt} \quad (2.4)$$

48

$$\begin{aligned} \tau &= \exp - \int_z^{z_1} k_\nu \rho dz' \\ \tau^* &= \exp - \int_z^{z_1} k_\nu \rho d \frac{5}{3} z' \\ &= \exp - \frac{5}{3} \int_z^{z_1} k_\nu \rho dz' \end{aligned}$$

⁴⁹気層からの熱放射は等方向放射である。よって、立体角積分すると半球を平面に投影した π 倍される。

4.8 成層圏上層及び中間圏下層における二酸化炭素の放射冷却

私達は、衝突による広がりを考慮した非重合の強吸収近似を、高度 20 – 60 km 領域における波長 $15\mu\text{m}$ の二酸化炭素 ν_2 ⁵⁰ 吸収帯に適用する。この高度の温度分布は、主に二酸化炭素による赤外領域での放射冷却とオゾンによる太陽放射の吸収 (§4.2 参照) とのバランスで決められている。

放射によるエネルギー流出と冷却率を計算するために、私達は対空間冷却 (*cooling to space*) 近似を用いよう⁵¹。この近似は、直接宇宙空間に流出する放射量と比較して大気層間の放射の交換を無視するものであり、この特殊な大気層ではよい近似を与える。宇宙空間へのエネルギー流出、すなわち (2.4)⁵² の dF^\uparrow/dz は冷却率と等しいとすると、以下のよう⁵³に得られる⁵⁴。

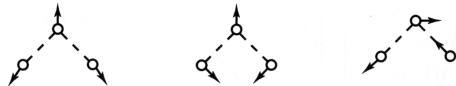
$$\frac{dT}{dt} \rho c_p = - \int_{\Delta\tilde{\nu}} \pi B_{\tilde{\nu}}(T) \frac{d\tau_{\tilde{\nu}}^*(z, \infty)}{dz} d\tilde{\nu} \quad (4.24)$$

ただし、振動数の積分は (4.23) のように二酸化炭素吸収帯 $15\mu\text{m}$ の $\Delta\tilde{\nu}$ 領域にわたるものとする。このスペクトル領域では、 $B_{\tilde{\nu}}(T)$ は振動数に対して定数と考えることができるだろう。強吸収近似の場合の平均透過率 (4.17) を領域 $\Delta\tilde{\nu}$ で振動数積分すると以下の式⁵⁴が得られる⁵⁴。

$$\int_{\Delta\tilde{\nu}} \tau_{\tilde{\nu}}^*(z, \infty) d\tilde{\nu} = \Delta\tilde{\nu} - p \left(\frac{10c}{3gp_0} \right)^{1/2} \sum_i (s_i \gamma_{0i})^{1/2} \quad (4.25)$$

適切なフラックス計算として気層の透過関数 (*slab transmission*) τ^* が要求されるために、因子 $5/3$ が含まれている。また、強吸収近似もこの吸収帯の全ての吸収線において適用さ

⁵⁰左から、対称振動モード ν_1 、変角振動モード ν_2 、非対称振動モード ν_3 (liou(2002), fig 3.3)



⁵¹放射されたものは全て宇宙へ放出される。すなわち透過率 $\tau^*(z, \infty) = 1$ 、光学的深さ $\chi^* \ll 1$ を仮定する。しかし強吸収近似の場合、吸収線の中央付近は $\tau^*(z, \infty) = 0$ が仮定されており、対空間冷却の近似と矛盾する。しかし実際の吸収線の透過率が 0 となる波数は微小間隔であり、多くの領域が吸収線のウィング部分で吸収されるため、 $\tau^*(z, \infty) = 1$ でも差し支えない。

⁵²

$$\frac{d}{dz} F^\downarrow - F^\uparrow = \rho c_p \frac{dT}{dt} \quad (2.4)$$

⁵³(2.4) のうち、宇宙へ放出されるフラックスによる冷却率を求めるため、 $F^\downarrow = 0$ とする。

$$\frac{dT}{dt} \rho c_p dz = -F^\uparrow$$

今回考慮するのは、気層からの熱放射のみである。熱放射のうち、大気上端まで届く放射クラックスは、

$$F^\uparrow = \int_{\Delta\tilde{\nu}} \pi B_{\tilde{\nu}}(T) \frac{5}{3} k_{\tilde{\nu}} \rho dz \tau^*(z, \infty) d\tilde{\nu} = \int_{\Delta\tilde{\nu}} \pi B_{\tilde{\nu}}(T) d\tau^*(z, \infty) d\tilde{\nu}$$

よって、

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} dz = - \int_{\Delta\tilde{\nu}} \pi B_{\tilde{\nu}}(T) d\tau^*(z, \infty) d\tilde{\nu}$$

⁵⁴ただし、考えている大気高度は $z \rightarrow \infty$ であるため、 $p_2 = 0$ とした

れている; 問題 4.20 の結果によると, この近似は妥当である. (4.24) に代入し, 静水圧の式 (1.2) を用いて変形すると大気の温度変化率が得られる⁵⁵.

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{g\pi B_{\bar{\nu}}(T)}{c_p} \left(\frac{10c}{3gp_0} \right)^{1/2} \sum_i (s_i \gamma_{0i})^{1/2} \quad (4.26)$$

$C_p = 1005 \text{ J kg}^{-1}$, $c = 5.5 \times 10^{-4}$ (360 ppm), $\sum_i (s_i \gamma_{0i})^{1/2} = 1600 \text{ cm}^{-1} (\text{g cm}^{-2})^{-1/2}$ (Appendix 10 参照) の各値を代入すると, 実際の冷却率が得られる^{56 57}.

$$\frac{dT}{dt} = -2.16\pi B_{\bar{\nu}}(T) \quad [\text{K s}^{-1}] \quad (4.27)$$

ただし, $\pi B_{\bar{\nu}}$ の単位は $\text{W cm}^{-2} (\text{cm}^{-1})^{-1}$ である. 冷却率 $B_{\bar{\nu}}$ の係数が高度に依存しないという重要な結果に注意しよう.

高度 50 km 付近の温度の第一次近似は, 放射平衡であること, そしてオゾンによる太陽放射の吸収による加熱 (§4.2) が二酸化炭素の放射による冷却と平衡状態にあることを想定すると得られるだろう. 問題 4.6 で求めたオゾンによる大気加熱率 (0.88 K hr^{-1}) を (4.27) に代入すると, 高度 50 km での $\pi B_{\bar{\nu}}(T)$ の平衡値は, およそ $3.8 \times 10^{-5} \text{ W cm}^{-2} (\text{cm}^{-1})^{-1}$ であるがわかる. これは, この高度での温度, およそ 280 K の温度と同等である. 4 K 程度の温度の日周変化が高度 50 km で存在しているのは, 加熱は日照時しか生じないのに対し, 冷却は常に生じているからである.

⁵⁵(4.24) の右辺のうち, まず波数に依存しない $\pi B_{\bar{\nu}}(T)$ と, z 微分の項を前に出す. 残りの積分部分に, (4.25) を代入. z 微分を行い, 静水圧の式を用いて変形する

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -\frac{1}{\rho c_p} \int_{\Delta\bar{\nu}} \pi B_{\bar{\nu}}(T) \frac{d\tau_{\bar{\nu}}^*(z, \infty)}{dz} d\bar{\nu} \\ &\simeq -\frac{\pi B_{\bar{\nu}}(T)}{\rho c_p} \frac{d}{dz} \int_{\Delta\bar{\nu}} \tau_{\bar{\nu}}^*(z, \infty) d\bar{\nu} \\ &= -\frac{\pi B_{\bar{\nu}}(T)}{\rho c_p} \frac{d}{dz} \left\{ \Delta\bar{\nu} - p \frac{10c}{3gp_0} \sum_i (s_i \gamma_{0i})^{1/2} \right\} \\ &= \frac{\pi B_{\bar{\nu}}(T)}{\rho c_p} \frac{dp}{dz} \frac{10c}{3gp_0} \sum_i (s_i \gamma_{0i})^{1/2} \\ &= -\frac{g\pi B_{\bar{\nu}}(T)}{c_p} \frac{10c}{3gp_0} \sum_i (s_i \gamma_{0i})^{1/2} \end{aligned}$$

⁵⁶本文では, (4.27) から突然 “ π ” が消えている. ここからの $\frac{dT}{dt}$ は冷却率を示している?

⁵⁷実際に計算を行った. なお $B_{\bar{\nu}}(T)$ の単位が cm^{-1} であるので, 係数の単位は $[\text{K/s}^*\text{cm}]$ になる必要がある.

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -\frac{9.8[\text{ms}^{-2}] \times \pi B_{\bar{\nu}}(T)}{1005[\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}]} \times \frac{10 \times 5.5 \times 10^{-4}}{3 \times 9.8[\text{ms}^{-2}] \times 1.013 \times 10^5[\text{Nm}^{-2}]}^{1/2} \times 1600[(10^{-3}\text{kg})^{-1/2}] \times 10^2[\text{cm/m}] \\ &= -2.12 \times \pi B_{\bar{\nu}}(T) [\text{K s}^{-1}] \end{aligned}$$

4.9 吸収帯モデル

吸収帯のもっとも簡単なモデルは, §4.3 で述べた非重畳な吸収線のモデルである. しかしながら, このモデルは吸収線が十分分離している場合にしか適用できない. したがって適用できる大気の範囲は, 30 km より上空に制限される. そこで, 重複を許容する様々な吸収帯モデルが考案されている.

レギュラーモデル: Elsasser によって最初に記述されたモデル. 同じ形, 同じ強さの吸収線が等間隔にあるとした.

ランダムモデル: Goody が提唱したモデル. 吸収線はランダムに分布させ, 吸収線の強さはある統計的な法則に従うとした.

この後者のモデルでは, 多くの吸収線を含む幅 $\Delta\tilde{\nu}$ のスペクトル間隔における平均伝達率 $\bar{\tau}$ は以下のように単純で使いやすい形をしている.

$$\bar{\tau} = \exp\left(-\sum W_i/\Delta\tilde{\nu}\right) \quad (4.28)$$

ただし, $\sum W_i$ は, この間隔での全吸収線を独立した吸収線とみなした場合の等価幅の合計である. 問題 4.19 では, ランダムモデルの理論を更に発展させた. この理論と Appendix 10 で与えられたスペクトルデータから, 任意スペクトルに対して赤外領域における水, 二酸化炭素, オゾンの吸収帯の透過率が計算できるだろう.

4.10 連続吸収帯

赤外領域の波長 $8 - 13 \mu\text{m}$ ⁵⁸は, $9.6 \mu\text{m}$ のオゾン吸収帯は別として大気はほとんど透明である (fig 2.1 参照)⁵⁹. 水蒸気による吸収も存在しているが, より重要なのは, 水蒸気のダイマー (いわゆる水蒸気分子が対になったもの) による吸収である. 後者は吸収係数に対して連続であり, 水蒸気の分圧に比例している; 分圧が高い場合, ダイマーはより発生しやすい. このような理由で連続吸収帯は多湿大気の場合, 特に重要である; 湿った熱帯大気では, この領域において鉛直方向の透明度は 50 % 程度でしかないだろう.

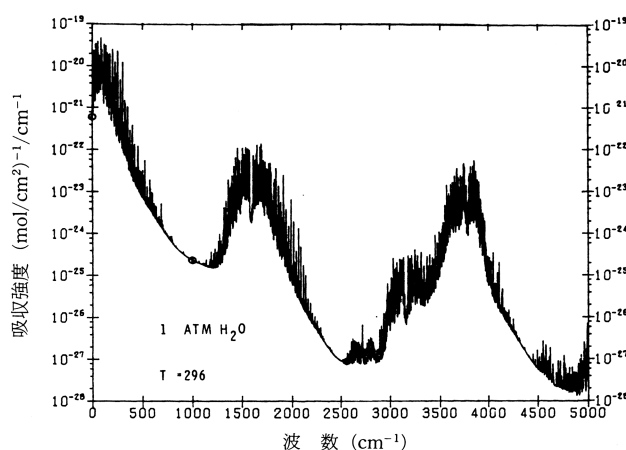


図 5.6 水蒸気の 1 atm, 296 K での吸収強度の波数 ($0 \sim 5000 \text{ cm}^{-1}$) 分布 (Clough *et al.*, 1980)³⁰

図 A.1: H_2O の吸収強度分布 (STP). 波数 $1000, 2400, 4300 \text{ cm}^{-1}$ 付近に連続吸収帯が見れ取れる. うち, 最も大事なものは地球放射のプランク関数のピークと重なる 1000 cm^{-1} である. 柴田 (2000)

⁵⁸地球の地表面からの放射 (300K のプランク関数) のピークは, ほぼ $10 \mu\text{m}$ に存在しているため, この領域の放射特性は特に重要である. また地球大気を灰色大気として扱う場合には, この領域の吸収係数が用いられる.

⁵⁹いわゆる大気の窓領域

4.11 全球放射収支

この章では、分子のスペクトルに注目して詳細な情報を与えることで、雲のない大気における任意高度の放射フラックスとそれによって放射加熱率が計算できる式を書き下した。雲と雲の放射特性は無視した。雲は、実際下層大気の放射収支に対して支配的な影響をもつだろう。しかし、適切に雲を考慮した場合、§6.4 で短く取り上げた多くの問題が浮かび上がる⁶⁰。

大気のエネギー収支を理解する為には、大気上端における放射収支の構成をよく知る事が基本的に重要である。図 4.4⁶¹ は、入射した太陽放射が平均してどのように振舞っているかを示した。また、宇宙空間へ放出される長波放射も示してある。これらの起源は、放射窓を通った地表面付近もしくは雲頂付近からの放射と、対流圏上層での二酸化炭素及び

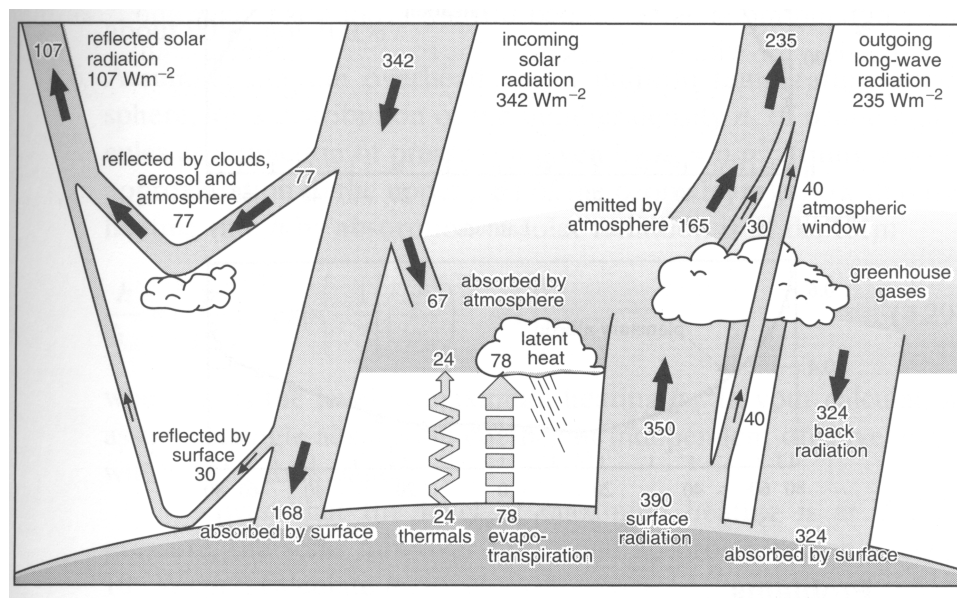


図 4.4: 地球の放射とエネルギー平衡を示した (Kiehl and Trenberth, 1997). 正味の太陽入射 342 Wm^{-2} の一部は雲と大気、地表面によって反射される; 49% が地表面で吸収される。その熱は大気に戻り、一部はそのまま大気を加熱するが、大部分は気化熱が発散熱となり、(これらはまとめて気化発散熱として知られている)。そしてやがて放出され、凝結熱となる。残りは、地表面からの熱赤外放射として放射され、その大部分は大気や雲によって吸収され、また上下方向に再放射される。赤外放射は、雲頂や、地表面よりも冷たい大気部分から宇宙空間へと放出される。

⁶⁰ 散乱過程を考慮する必要があるということ

⁶¹ まずこの図の空間が 3 つの領域に分けられていることに注意する。図上端の宇宙空間、雲を含めた大気層、そして固体地球である。太陽からの放射のうち地表面(すなわち固体地球)まで届くのはおよそ半分であり、およそ 1/5 は反射され(これはアルベドとして与えられる)、また 1/5 は大気に吸収される。また図中の thermals は、地表面の熱が放射を介さず(すなわち熱伝導)でのエネルギー伝達、evapotranspiration は、水の蒸発熱で潜熱輸送をさしている。後者は海洋がある地球特有のエネルギー輸送である。

水蒸気の強い放射帯からの放射である (fig.12.7 参照). 図 4.5 は, 放射収支の主な二つの要素である, 太陽放射と長波放射の衛星観測結果であり, それぞれ経度及び年間で平均をとった. 赤道付近では, 放射に対して過剰な太陽放射の吸収が存在する. これは, 大気の運動や海流によって放射吸収間での不足を補う必要がある極域へ輸送されるだろう. どのように大気の運動がエネルギー輸送を行うかについては, 10 章で議論される.

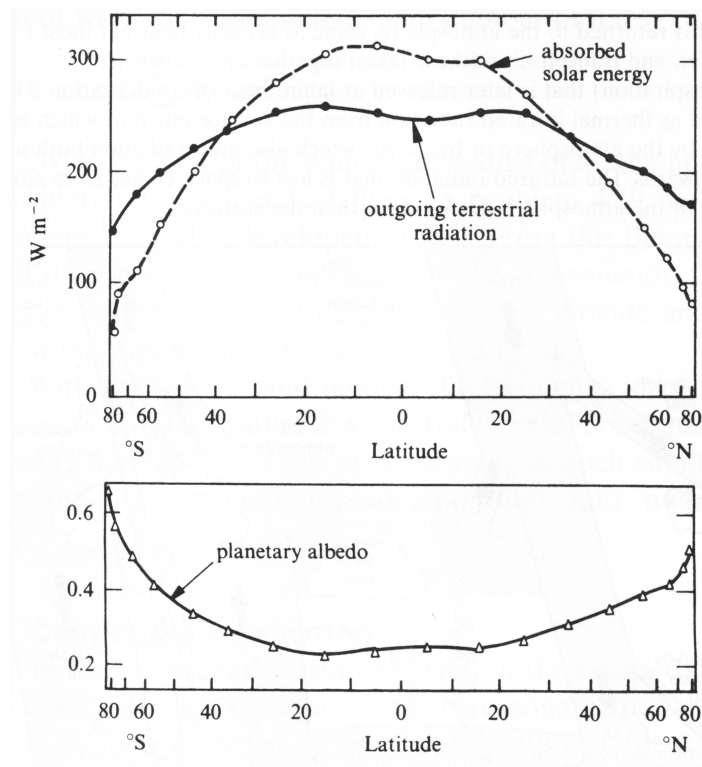


図 4.5: 地球の放射収支の平均構成. 1962–66 間の衛星観測から推論されたもの. (Vonder Haar and Suomi(1971)) まず, 上の図について. これらは大循環, 特に海流の大循環が大きく関与しているため, 海洋がなければ緯度ごとの放射収支はもっと近付くだろう. またエネルギー流出の赤道付近が若干下がるのは, 赤道の晴天率が低い為である. 下図で, 赤道付近のアルベドが若干上がっているのも同様の理由である.