

Problems

- 4.1 波長 λ に対する Rayleigh 散乱の散乱係数の表式 (4.2) 及び appendix1 のデータを用いて, Rayleigh 散乱による鉛直円柱大気の減光度を波長 0.3, 0.6, 1 μm について計算せよ.

[解]

(4.2) 式より, 波長 λ に対する Rayleigh 散乱係数は

$$\sigma_R = \frac{32\pi^3}{3N_0\lambda^4\rho_0}(n-1)^2 \quad (4.2)$$

で与えられる. ここで N_0 は標準状態での散乱粒子の数密度で, これは標準状態での密度を粒子 1 個の質量で割ったものに等しく, 従って平均分子量を M とすると

$$\begin{aligned} N_0 = \frac{\rho_0}{M} &= \frac{\rho_0}{28.964} [\text{kmol}] \\ &= \frac{\rho_0}{28.964} \times 10^3 \times N_A [\text{個}] \end{aligned} \quad (\text{P4.1})$$

となる. また n は屈折率で, 101.3kPa, 288K (密度 1.22kgm⁻³) での波長 λm に対する n は Edlen の式

$$(n(\lambda) - 1) \times 10^6 = 64.328 + 29498.1(146 - \lambda^{-2})^{-1} + 255.4(41 - \lambda^{-2})^{-1} \quad (\text{P4.2})$$

で与えられ, 0.3, 0.6, 1 μm の波長に対してそれぞれ $n' - 1 = 290.5 \times 10^{-6}$, 277.7×10^{-6} , 272.5×10^{-6} を与える. appendix 1 によると $n' - 1$ は密度に比例するとあるので, 標準状態での値は 237.7×10^{-6} , 227.0×10^{-6} , 223.3×10^{-6} となる.

入射強度を I_0 , 大気を通り抜けた後の強度を I とすると, 減光率は

$$\begin{aligned} 1 - \frac{I}{I_0} &= 1 - \exp\left(-\int_0^\infty \sigma_R \rho dz\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\sigma_R \int_0^\infty \rho dz\right) \end{aligned} \quad (\text{P4.3})$$

となり, 計算するとそれぞれ 0.637, 0.061, 0.008 となる.

4.2 問題 4.1 の計算において 2,3 の他の波長、いろいろな太陽高度について計算を続けなさい。またそれを用い、晴天大気においてレイリー散乱される太陽放射と、入射太陽放射との割合を見積もりなさい。

[解] レイリー散乱の散乱係数は式 (4.2) より

$$\sigma_R = \frac{32\pi^3}{3N_0\lambda^4\rho_0}(n-1)^2 \quad (4.2)$$

と与えられる。ただし N_0, ρ_0, n は標準状態での大気の数密度、密度、屈折率、 λ は波長である。

放射強度 I_{top} の太陽放射が天頂角 θ 方向で大気上端から差し込む場合を考える。大気による放射の減衰はレイリー散乱のみであると仮定すると地表面へ差し込む放射強度は太陽天頂角に依存し

$$\begin{aligned} I_{surf}(\theta) &= I_{top} \exp\left(-\int_0^\infty \sigma_R \rho \frac{dz}{\cos \theta}\right) \\ &= I_{top} \exp\left(-\frac{\sigma_R}{\cos \theta} \int_0^\infty \rho dz\right) \\ &= I_{top} \exp\left(-\frac{\sigma_R P_s}{\cos \theta g}\right) \end{aligned} \quad (P4.4)$$

表される。ただし、最後の変形には静水圧平衡を仮定し

$$\int_0^\infty \rho dz = \frac{P_s}{g} \quad (P4.5)$$

を用いている (P_s は地表面気圧、 g は重力加速度)。 I_{top} は単位面積あたりの太陽放射の入射量であり、太陽表面からの黒体放射が地球軌道上まで到達する間での減衰を考慮することで求まる。

$$I_{top} = B(T_{sun}) * \left(\frac{R_{earth}}{r_{sun}}\right)^2 \quad (P4.6)$$

ただし、 B_λ はプランク関数、 T_{sun} は太陽の表面温度、 R_{earth} は地球の軌道上半径、 r_{sun} は太陽表面の半径である。

次に半球全体の地表面へ入射するの太陽放射を足し合わせる。太陽天頂角 θ をもつ地表面の面積は $2\pi r_{earth} \sin \theta$ なので、半球積分の式は、

$$I_{surf,sun} = \int_0^{\pi/2} I_{surf}(\theta) 2\pi r_{earth} \sin \theta (r_{earth} d\theta) \quad (P4.7)$$

である。また、地球へ入射する全太陽放射 $T_{top,sum} = \pi r_{earth}^2 I_{top}$ である。

以上の放射強度の波数積分を行う事で太陽放射がレイリー散乱で消散される比率が求まる。

$$\begin{aligned} \frac{\int I_{surf,sum} d\lambda}{\int I_{top,surf} d\lambda} &= \frac{\int \int_0^{\pi/2} B_\lambda(T_{sun}) * (R_{earth}/r_{sun})^2 \exp\left(-\frac{(32\pi^3/3N_0\lambda^4\rho_0)(n-1)^2 P_s}{\cos \theta g}\right) 2\pi r_{earth}^2 \sin \theta d\theta d\lambda}{\int \pi r_{earth}^2 B_\lambda(T_{sun}) * (R_{earth}/r_{sun})^2 d\lambda} \\ &= \frac{\int \int_0^{\pi/2} B_\lambda(T_{sun}) \exp\left(-\frac{(32\pi^3/3N_0\lambda^4\rho_0)(n-1)^2 P_s}{\cos \theta g}\right) 2 \sin \theta d\theta d\lambda}{\int B_\lambda(T_{sun}) d\lambda} \end{aligned} \quad (P4.8)$$

後は各自数値計算されたい。計算で与える値は以下に示した通り (標準状態での各値は appendix 1 を参照した) であり, その場合の太陽放射がレイリー散乱される割合は本の巻末で記述された 7.5 % になると期待される。

$$N_0 = 2.687 \times 10^{25} \text{ [m}^{-3}\text{]} \quad (\text{P4.9})$$

$$\rho_0 = 1.293 \text{ [kgm}^{-3}\text{]} \quad (\text{P4.10})$$

$$(n(\lambda[\mu\text{m}]) - 1) \times 10^6 = (64.328 + 29498.1(146 - \lambda^{-2})^{-1} + 255.4(41 - \lambda^{-2})^{-1}) \\ * \frac{\rho_0}{\rho(T = 283\text{K}, P = 1013\text{hPa})} \quad (\text{P4.11})$$

$$P_s = 1.013 \times 10^5 \text{ [Pa]} \quad (\text{P4.12})$$

$$g = 9.8 \text{ [ms}^{-2}\text{]} \quad (\text{P4.13})$$

$$B_\lambda(T) = \frac{c_1}{\lambda^5(\exp(c_2/\lambda T) - 1)} \text{ [Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}(\text{cm}^{-1})^{-4}\text{]} \quad (\text{P4.14})$$

$$c_1 = 1.1911 \times 10^{-8} \text{ [Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}(\text{cm}^{-1})^{-4}\text{]},$$

$$c_2 = 1.439 \text{ [Kcm]}$$

なお, この演習問題のレジユメは, セミナー開催時のものから光田によって大幅な改変が加えられていることを付け加えておく。このレジユメはセミナー参加者による査読が行われていないだけでなく, 数値計算による確認も行っていないため内容は完全に無保証である。

4.3 エアロゾルを含む大気の Angström 混濁度は、エアロゾルの散乱による鉛直円柱の光学的厚さ τ_A によって定義される．粒子の散乱係数 (散乱断面積) はその粒子の幾何学断面積を 2 倍したものとすると、大気の下層 1km で (in the lowest kilometre of the atmosphere), 混濁度が 1 となるための、直径 $1 \mu\text{m}$ のエアロゾルの密度を見積もれ．

[解] 混濁度は光学的厚さに相当するとして、光学的厚さ $\tau_A = 1$ となることを考える．問題文より、粒子の散乱係数 (散乱断面積) はその 1 粒子の幾何学断面積を 2 倍したものとするので、1 粒子について考えて、 σ を 1 粒子あたりの散乱係数、 N_0 を粒子の数密度とし¹、大気の下層 1km を考えているので²、積分範囲は $0 \rightarrow 1000$ [m] とすると³

$$\begin{aligned}\tau_A = \int_0^{1000} \sigma N_0 dz &= 1 \\ \sigma N_0 \times 10^3 &= 1\end{aligned}\tag{P4.15}$$

ここで σ は問題文より粒子の幾何学断面積の 2 倍なので $\sigma = 2\pi r^2$ ．式 (P4.1) より、

$$N_0 = \frac{1}{2\pi r^2} \times 10^{-3}\tag{P4.16}$$

粒子の半径 $r = 0.5[\mu\text{m}] = 0.5 \times 10^{-6}[\text{m}]$ を代入すると、 $N_0 = 6.4 \times 10^8[\text{個}/\text{m}^3]$ ⁴

¹前回から訂正、1 粒子あたりの散乱係数を考え、密度 $[\text{kg}/\text{m}^3]$ でなく数密度 $[\text{個}/\text{m}^3]$ をとる．

²この条件でいいそうです．

³前回から訂正、ここで km 単位でなく m 単位で書きました．

⁴解答を見ると、 $7.0 \times 10^8[\text{個}/\text{m}^3]$ となっています．6.4 を切り上げて 7.0 にしたのでしょう．

4.4 Angström 混濁度は波長 λ によって変化, 具体的には $\lambda^{-1.3}$ に比例すると考えられている. 波長 $0.6 \mu\text{m}$ でのエアロゾルの存在による光学的深さが 0.3 である大気の場合, $0.3 \mu\text{m}$ および $1 \mu\text{m}$ での混濁係数の値はそれぞれどうなるか. 問題 4.1 の結果から, それぞれの大気でのレイリー散乱およびエアロゾル散乱による合計の消散量を計算しなさい.

[解]

混濁度は大気中でのエアロゾルが存在することによる光学的深さに相当する⁵. したがって波長 $0.6 \mu\text{m}$ での混濁度は 0.3 である. 問題文にこの混濁度が $\lambda^{-1.3}$ に比例するとあるから波長 $0.3 \mu\text{m}$, および $1 \mu\text{m}$ の光に対する混濁係数をそれぞれ $\tau_{0.3}$, τ_1 とすると

$$\tau_{t0.3} = 0.3 \times \left(\frac{0.3}{0.6} \right)^{-1.3} = 0.74 \quad (\text{P4.17})$$

$$\tau_{t1} = 0.3 \times \left(\frac{1}{0.6} \right)^{-1.3} = 0.15 \quad (\text{P4.18})$$

となる.

次にエアロゾルによる拡散に起因する消散量を求める. 消散量は

$$\frac{I_0 - I}{I_0} \quad (\text{P4.19})$$

で与えられる. ただし, I_0 は大気上端に入射する太陽放射の量, I は大気下端に届く太陽放射の量である.

散乱については式 (4.1) が成り立つ;

$$\frac{I}{I_0} = \exp(-\tau). \quad (\text{P4.20})$$

ここで τ は光学的深さである. この光学的深さはレイリー散乱による光学的深さ $\int \sigma_R \rho dz$ と先程求めた混濁係数 τ_t の和で表されるから

$$I = I_0 \exp\left(-\tau_t - \int \sigma_R \rho dz\right) = \exp(-\tau_t) \exp\left(-\int \sigma_R \rho dz\right) \quad (\text{P4.21})$$

となる. これより消散量は

$$\frac{I_0 - I}{I_0} = 1 - \exp(-\tau_t) \exp\left(-\int \sigma_R \rho dz\right) \quad (\text{P4.22})$$

⁵参考文献より引用すると

turbidity(an indication of the amount of aerosol loadings in the atmosphere)

とある. すなわち混濁度は大気中でエアロゾル存在量の指標である. したがって混濁度はエアロゾルが存在することによる光学的深さに相当すると考えた.

と表される.

この式に先に求めた混濁係数の値および問題 4.1 の結果 (レイリー散乱による散乱量の値) を代入すれば消散量を求めることができる.

・波長 $0.3 \mu\text{m}$ の光の場合

$$\tau_{t0.3} = 0.74, \exp(\int \sigma_R \rho dz) = 0.637$$

$$1 - \exp(-0.74) \times 0.637 = 0.826 \quad (\text{P4.23})$$

・波長 $0.6 \mu\text{m}$ の光の場合

$$\tau_{t0.6} = 0.3, \exp(\int \sigma_R \rho dz) = 0.939$$

$$1 - \exp(-0.3) \times 0.939 = 0.304 \quad (\text{P4.24})$$

・波長 $0.1 \mu\text{m}$ の光の場合

$$\tau_{t0.6} = 0.15, \exp(\int \sigma_R \rho dz) = 0.992$$

$$1 - \exp(-0.15) \times 0.992 = 0.146 \quad (\text{P4.25})$$

参考文献

K. N. LIOU, 2002: An Introduction to Atmospheric Radiation second edition.
Academic Press, 583pp.

4.5 太陽の方向に 90° の角度で観測された散乱太陽光は、なぜとても強い偏光を示すか。なぜ偏光は 100%ではなく 90%なのか。

[解]

・「太陽の方向に 90° の角度で観測された散乱太陽光は、なぜとても強い偏光を示すか」について。

偏光の度合いを示す値として、偏光度というものがあり、

$$P = \frac{I_r - I_l}{I_r + I_l} \quad (1)$$

で与えられる。 I_r, I_l はそれぞれ §4.1 の Appendix 「レイリー散乱の散乱係数導出」に出てきた、散乱波の散乱面に垂直および平行な成分のエネルギー、

$$I_r = I_0 r k^4 \alpha^2 / r^2 \quad (2)$$

$$I_l = I_0 l k^4 \alpha^2 \cos^2 \Theta / r^2 \quad (3)$$

である。ここで I_0, k, α, r はそれぞれ入射波のエネルギー、入射波の波数、粒子の分極率、粒子から観測地点までの距離であり、 Θ は散乱角である。

(2),(3) を (1) に代入すると、

$$P(\Theta) = \frac{1 - \cos^2 \Theta}{1 + \cos^2 \Theta}$$

となるから、 $P(\Theta)$ は $\Theta = 90^\circ$ のとき最大値 1 をとることがわかる。

おそらく、偏光度が 1 のことを「偏光が 100 % である」という意味で使うのだろう。

・「なぜ偏光は 100 % ではなく、90 % になるか」について。

§4.1 の散乱係数の導出は、実は散乱を引き起こす粒子が等方的な場合について行っていた。実際の大気では、一般に粒子は非等方的だから、偏光の仕方も非等方的となって、偏光度が減少する。

- 4.6 太陽が天頂にあり、等温大気を仮定すると、オゾンの数密度 n_3 の分布が気圧 p の関数として $n_3 = n_0 p^{\frac{3}{2}}$ (オゾン層の上部には非常に良い近似となっている) で与えられる場合に、オゾンによる日射の吸収による加熱率 h は次式となることを示せ。

$$\frac{h}{h_m} = \left(\frac{p}{p_m}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{3}\left[\left(\frac{p}{p_m}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]\right\}$$

ここで p_m は最大加熱率 h_m の起こる高度の気圧である。この計算では、オゾンの吸収帯内で波長の依存しない単一の吸収係数を仮定せよ。

最大加熱率が 0.1kPa の高度で起こり、オゾン吸収帯域の太陽放射が $0.7 \times 10^{-3} \text{Wcm}^{-2}$ であるとして、 h_m を計算せよ。

[解]

はじめに、高度 z におけるオゾン吸収による加熱率 h を求める。加熱に伴う気層の温度上昇は、(4.4) 式より、

$$c_p \rho_{all} \frac{dT}{dt} = \cos \theta \int_{band} \frac{dF_{S\tilde{\nu}}}{dz} d\tilde{\nu} \quad (\text{P4.26})$$

の関係にある。このとき、左辺の密度 ρ_{all} は高度 z での密度を表している。つまり、オゾンもそれ以外の成分も全て含めた密度であることに留意されたい。

この右辺に (4.3) 式を高度 z で微分した値を代入し、加熱率 $h = \frac{dT}{dt}$ を表す。

まず、(4.3) 式を変形し、微分すると、

$$F_{S\tilde{\nu}}(z) = F_{S\tilde{\nu}}(\infty) \exp\left(-\int_z^\infty k_{\tilde{\nu}} \rho_{o_3} \sec \theta dz'\right),$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_{S\tilde{\nu}}(z)}{dz} &= \frac{d}{dz} \left\{ F_{S\tilde{\nu}}(\infty) \exp\left(-\int_z^\infty k_{\tilde{\nu}} \rho_{o_3} \sec \theta dz'\right) \right\} \\ &= F_{S\tilde{\nu}}(\infty) \frac{d}{dz} \left\{ \exp\left(-\int_z^\infty k_{\tilde{\nu}} \rho_{o_3} \sec \theta dz'\right) \right\} \\ &= F_{S\tilde{\nu}}(\infty) (-k_{\tilde{\nu}} \rho_{o_3} \sec \theta) \exp\left\{-\int_z^\infty k_{\tilde{\nu}} \rho_{o_3} \sec \theta dz'\right\}. \end{aligned}$$

吸収係数 $k_{\tilde{\nu}}$ は高度 z には依存しないとし、これを (p4.1) 式に代入すると、

$$c_p \rho_{all} \frac{dT}{dt} = \cos \theta \int_{band} \left(-F_{S\tilde{\nu}}(\infty) k_{\tilde{\nu}} \rho_{o_3} \sec \theta \exp\left(-\int_z^\infty k_{\tilde{\nu}} \rho_{o_3} \sec \theta dz'\right) \right) d\tilde{\nu}$$

となり、波数 $\tilde{\nu}$ の関数であるのは、大気上限におけるオゾン吸収帯域の太陽放射 $F_{\tilde{\nu}}(\infty)$ のみであるので ($k_{\tilde{\nu}}$ は題意より単一吸収係数とする)、

$$\begin{aligned} c_p \rho_{all} \frac{dT}{dt} &= -\cos \theta \cdot k_{\tilde{\nu}} \rho_{o_3} \sec \theta \exp\left(-\int_z^\infty k_{\tilde{\nu}} \rho_{o_3} \sec \theta dz'\right) \int_{band} F_{S\tilde{\nu}}(\infty) d\tilde{\nu} \\ &= -k_{\tilde{\nu}} \rho_{o_3} \exp\left(-\int_z^\infty k_{\tilde{\nu}} \rho_{o_3} \sec \theta dz'\right) F_s(\infty). \end{aligned}$$

題意より $\int_{band} F_{S\tilde{\nu}}(\infty) d\tilde{\nu} = (\text{定数}) = F_s(\infty)$ である。オゾン密度 ρ_{o_3} 、全成分の大気密度 ρ_{all} は後ほど代入するとして、静力学方程式を用いてさらに式を変形すると、

積分範囲は $z \rightarrow p, \infty \rightarrow 0$ と置き換えられるので,

$$\begin{aligned} c_p \rho_{all} \frac{dT}{dt} &= \rho_{o_3} k_{\bar{v}} \exp\left\{-\int_p^0 k_{\bar{v}} \rho_{o_3} \sec \theta \left(-\frac{dp'}{\rho_{all} g}\right)\right\} F_s(\infty) \\ &= \rho_{o_3} k_{\bar{v}} \exp\left\{k_{\bar{v}} \sec \theta \frac{1}{g} \int_p^0 \frac{\rho_{o_3}}{\rho_{all}} dp'\right\} F_s(\infty) \end{aligned}$$

ここで両密度に, $\rho_{o_3} = n_3 m_{o_3} = n_0 m_{o_3} p^{\frac{3}{2}}$ (m_{o_3} はオゾンの分子量), $\rho_{all} = \frac{m_{all} p}{RT}$ (m_{all} は大気分子量) を代入する. よって,

$$\begin{aligned} c_p \frac{m_{all} p}{RT} \frac{dT}{dt} &= n_0 m_{o_3} p^{\frac{3}{2}} k_{\bar{v}} \exp\left\{k_{\bar{v}} \sec \theta \frac{1}{g} \int_p^0 \frac{n_0 p'^{\frac{3}{2}} m_0}{\frac{m_{all} p'}{RT}} dp'\right\} F_s(\infty) \\ &= n_0 m_{o_3} p^{\frac{3}{2}} k_{\bar{v}} \exp\left\{k_{\bar{v}} \sec \theta \frac{1}{g} \frac{RT n_0 m_0}{m_{all}} \frac{2}{3} p^{\frac{3}{2}}\right\} F_s(\infty) \\ &= n_0 m_{o_3} p^{\frac{3}{2}} k_{\bar{v}} \exp\left\{\frac{2k_{\bar{v}} \sec \theta RT n_0 m_0}{3g m_{all}} p^{\frac{3}{2}}\right\} F_s(\infty) \end{aligned}$$

$$\frac{dT}{dt} = h = \frac{RT n_0 m_{o_3} k_{\bar{v}}}{c_p m_{all}} p^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{2k_{\bar{v}} \sec \theta RT n_0 m_0}{3g m_{all}} p^{\frac{3}{2}}\right\} F_s(\infty). \quad (\text{P4.27})$$

次に加熱率が最大になる高度 h_m を求める. h_m は上式を圧力 p で微分して 0 になる値であるから, 次のように簡略化して考えると,

$$\begin{aligned} \frac{RT n_0 m_{o_3} k_{\bar{v}}}{c_p m_{all}} &= A \\ -\frac{2k_{\bar{v}} \sec \theta RT n_0 m_0}{3g m_{all}} &= B, \end{aligned} \quad (\text{P4.28})$$

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dp} &= F_s(\infty) \left\{ A p^{\frac{1}{2}} \cdot \exp(B p^{\frac{3}{2}}) \right\}' \\ &= F_s(\infty) \left\{ \frac{1}{2} A p^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp(B p^{\frac{3}{2}}) + A p^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{2} B p^{\frac{1}{2}} \exp(B p^{\frac{3}{2}}) \right\} \\ &= F_s(\infty) \left\{ \frac{1}{2} A \exp(B p^{\frac{3}{2}}) (p^{-\frac{1}{2}} + 3B p) \right\} \\ &= F_s(\infty) \left\{ \frac{1}{2} A \exp(B p^{\frac{3}{2}}) p (p^{-\frac{3}{2}} + 3B) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^{-\frac{3}{2}} + 3B &= 0 \\ B &= -\frac{1}{3} p_m^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (\text{P4.29})$$

(p4.3) の 2 式は, $c_p A = \frac{RT n_0 m_{o_3} k_{\bar{v}}}{m_{all}}$, $-\frac{3g}{2 \sec \theta} B = \frac{RT n_0 m_{o_3} k_{\bar{v}}}{m_{all}}$ と変形すると,

$$\begin{aligned} c_p A &= -\frac{3g}{2 \sec \theta} B \\ A &= -\frac{3g \cos \theta}{2} B. \end{aligned}$$

これに (p4.4) 式を代入すると,

$$\begin{aligned} A &= -\frac{3g \cos \theta}{2} \left(-\frac{1}{3} p_m^{-\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{g \cos \theta}{2} p_m^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

これで最大加熱高度 h_m は, 最大加熱高度の圧力 p_m のみで表すことができる. よって,

$$\begin{aligned} h_m &= F_s(\infty) \left(\frac{g \cos \theta}{2c_p} p_m^{-\frac{3}{2}} p_m^{\frac{1}{2}}\right) \exp\left(-\frac{1}{3} p_m^{-\frac{3}{2}} p_m^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= F_s(\infty) \left(\frac{g \cos \theta}{2c_p p_m}\right) \exp\left(-\frac{1}{3}\right). \end{aligned} \quad (\text{P4.30})$$

加熱率 h (4.2) 式も同様に置き換え, 最大加熱率 h_m と加熱率 h の比をとると,

$$h = \left(\frac{g \cos \theta}{2c_p} p_m^{-\frac{3}{2}}\right) p_m^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{3} p_m^{-\frac{3}{2}} p_m^{\frac{3}{2}}\right) F_s(\infty) \quad (\text{P4.31})$$

$$\begin{aligned} \frac{h}{h_m} &= \frac{\left(\frac{g \cos \theta}{2c_p} p_m^{-\frac{3}{2}}\right) p_m^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{3} p_m^{-\frac{3}{2}} p_m^{\frac{3}{2}}\right) F_s(\infty)}{\left(\frac{g \cos \theta}{2c_p p_m}\right) \exp\left(-\frac{1}{3}\right) F_s(\infty)} \\ &= \frac{g \cos \theta p_m^{\frac{1}{2}} 2c_p p_m \exp\left(-\frac{p^{\frac{3}{2}}}{3p_m^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{3}\right)}{2c_p p_m^{\frac{3}{2}} (g \cos \theta)} \\ &= \left(\frac{p}{p_m}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{3} \left[\left(\frac{p}{p_m}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]\right\} \end{aligned}$$

以上で加熱率 h が上式で示されることがわかった.

次に, 最大加熱率 (p4.5) 式に $p_m = 0.1 \text{ kPa}$, $\int_{\text{band}} F_{S\nu}(\infty) d\nu = 0.7 \times 10^{-3} \text{ Wcm}^{-2}$, $\cos \theta = 1$ とし, 計算すると, $h_m = 0.9 \text{ Khr}^{-1}$ ($\sim 20 \text{ Kday}^{-1}$). この値は, 本文の中緯度における温度変化率 ($\sim 8 \text{ Kday}^{-1}$) に比べ 2.5 倍ほど大きい. つまり, 天頂角の小さい赤道域では中緯度よりもオゾンの太陽放射吸収によって大きく加熱されていることがわかる.

($g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$, $c_p = 1005 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $F_s(\infty) = 0.7 \times 10^{-3} \times 10^{-4} \text{ Wm}^{-2}$).

4.7 地球軌道が楕円形であるため、地球に入射してくる太陽放射量は、6月より12月の方がおよそ7%多い。オゾン量は1年を通じて一定とすると、 $15\ \mu\text{m}$ でのプランク関数の温度変化から北極と南極のそれぞれの夏で、成層圏界面(温度の極大をとる高度50 km付近)の温度差を見積りなさい。

[解]

成層圏界面付近では放射平衡であり、オゾンによる加熱と二酸化炭素による冷却が平衡状態にあることからその高度の温度は求められる。成層圏界面での太陽加熱率は、等温大気を仮定しオゾンの数密度 n_3 は $n_3 = n_o P^{3/2}$ で近似されるとすると、前問の解答から

$$h_m = \frac{gF_s(\infty) \cos \theta}{2C_p p_m} \exp(-1/3) \quad [\text{Ks}^{-1}]$$

で与えられる。また、二酸化炭素の熱放射による冷却率を対空間冷却近似を用いて表すと、

$$\frac{dT}{dt} = -2.16\pi B_{\tilde{\nu}}(T) \quad [\text{Ks}^{-1}] \quad (4.27)$$

である。よって、冷却率と加熱率を等しいとすると以下の式が成り立つ。

$$h_m = 2.16\pi B_{\tilde{\nu}}(T)$$

これを T について解くと

$$T = \frac{c_2 \tilde{\nu}}{\log\left(\frac{2.16\pi c_1 \tilde{\nu}^3}{h_m} + 1\right)} = \frac{c_2 \tilde{\nu}}{\log\left(\frac{2.16\pi c_1 \tilde{\nu}^3 2C_p p_m}{gF_s(\infty) \cos \theta \exp(-1/3)} + 1\right)}$$

となる⁶。ただし、プランク関数は Appendix 7 より

$$\begin{aligned} B_{\tilde{\nu}}(T) &= \frac{2hc^2 \tilde{\nu}^3}{\exp(hc\tilde{\nu}/kT) - 1} = \frac{c_1 \tilde{\nu}^3}{\exp(c_2 \tilde{\nu}/T) - 1} \\ c_1 &= 1.911 \times 10^{-12} \quad [\text{W cm}^{-2} \text{ sr}^{-1} (\text{cm}^{-1})^{-4}] \\ c_2 &= 1.439 \quad [\text{K} (\text{cm}^{-1})^{-1}] \end{aligned}$$

で与えた。各値 $C_p = 1005\ \text{Jkg}^{-1}$, $p_m = 1.0\ \text{mb}$, $g = 9.8\ \text{m s}^{-2}$, $\theta = 66.6^\circ$, $F_s(\infty) = 6.76\ \text{W m}^{-2}$ (北極), $7.23\ \text{W m}^{-2}$ (南極)⁷ を代入すると、温度を得る。

$$T = \begin{cases} 292.2 \quad [\text{K}] & (\text{北極}) \\ 298.0 \quad [\text{K}] & (\text{南極}) \end{cases}$$

以上より、夏の北極、南極の成層圏界面の温度差は、およそ6 Kである。

$$h_m = \frac{2.16\pi c_1 \tilde{\nu}^3}{\exp(c_2 \tilde{\nu}/T) - 1} \rightarrow \exp\left(\frac{c_2 \tilde{\nu}}{T}\right) = \frac{2.16\pi c_1 \tilde{\nu}^3}{h_m} + 1 \rightarrow \frac{c_2 \tilde{\nu}}{T} = \log\left(\frac{2.16\pi c_1 \tilde{\nu}^3}{h_m} + 1\right) \rightarrow T = \frac{c_2 \tilde{\nu}}{\log\left(\frac{2.16\pi c_1 \tilde{\nu}^3}{h_m} + 1\right)}$$

⁷これは、前問で与えられたオゾン吸収帯での太陽入射フラックスの値 $7.0\ \text{W m}^{-2}$ を平均値として用い、 $2F_{\text{平均}} = F_{\text{北極}} + F_{\text{南極}}$ 及び $F_{\text{南極}} = 1.07F_{\text{北極}}$ より導出した。

[補足]

しかし、実際の観測値 (図 5.1 参照) と比較しておよそ 10 K 弱低くなっている (特に南極の場合). 考えられることとしては,

1. 力学の効果 (温度風の存在) を無視した.
2. オゾン (及び二酸化炭素) の数密度の季節変化を無視した (オゾンの数密度分布の近似式 $n_3 = n_0 p^{3/2}$ での誤差)
3. 対空間冷却での近似の誤差
4. 強吸収近似の誤差
5. 与えた太陽入射フラックスの誤差

ただし、力学効果が要因である場合、この高度の温度分布の近似は放射平衡から求まるとは言えなくなるだろう.

最も要因として可能性が高いのは 2 である. 太陽入射フラックスが変化した場合、光化学的な反応により平均分子組成も変化することは十分考えられる. また、3,4 という数式の導出段階よりもこのような季節変動による誤差のほうが両極での誤差の程度が等しくなかったこととも一致する.

4.8 ドップラー効果によって広げられる吸収線の形は以下のように与えられる.

$$k_{\tilde{\nu}} = \frac{s}{\gamma_D \pi^{1/2}} \exp \left\{ - \left(\frac{\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0}{\gamma_D} \right)^2 \right\}. \quad (4.30)$$

$$\text{ここでは, } \gamma_D = \frac{\tilde{\nu}_0}{c} \left(\frac{2RT}{M_r} \right)^{1/2}. \quad (M_r \text{ は分子量である}) \quad (4.31)$$

(a) 以下の場合に, 衝突によって広げられる吸収線の半値幅が, ドップラー効果によって広げられる吸収線の半値幅と等しくなるところの気圧を求めよ.

- (1) 667 cm^{-1} の CO_2 の吸収線
- (2) 1600 cm^{-1} の H_2O の吸収線
- (3) 100 cm^{-1} の H_2O の吸収線

なお, 標準気圧 (1 気圧) での, 衝突によって広げられた全ての吸収線の半値幅は 0.1 cm^{-1} であると仮定する.

(b) この 2 つの吸収線の形に関して, それぞれ吸収線の中央での吸収係数と半値幅の数倍のところでの吸収係数の比を求め, その 2 つを比較せよ. 衝突によって広げられた吸収線のウィングでの吸収係数はドップラー効果によって広げられた吸収線のウィングのものよりも相対的に非常に大きい. 従って, ドップラー半値幅が衝突半値幅よりかなり大きい状態であっても, 衝突の吸収線のウィングの放射輸送は重要である.

[解]

(a) (4.31) の γ_D はドップラー幅 (会田 (1982)⁸参照) と呼ばれるもので, ドップラー半値幅 γ'_D は

$$\gamma'_D = 0.8325 \gamma_D = 0.8325 \times \frac{\tilde{\nu}_0}{c} \left(\frac{2RT}{M_r} \right)^{1/2} \quad (\text{P4.32})$$

である⁹. また §4.3 より, 衝突半値幅は,

$$\gamma = \gamma_0 p / p_0 \quad (4.7)$$

⁸参考文献

会田 勝, 1982: (気象学のプロムナード 8) 大気と放射過程—大気の熱源と放射収支を探る—, (5 章 気体吸収帯と透過関数, 5.2 吸収帯の透過関数). 東京堂出版, 280pp.

⁹(4.30) では, $\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0 = 0$ で $k_{\tilde{\nu}}(0) = s / (\gamma_D \pi^{1/2})$ であることを考慮すると, $\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0 = \gamma_D$ では $k_{\tilde{\nu}}(\gamma_D) = e^{-1} s / (\gamma_D \pi^{1/2})$ であるから, γ_D とはドップラー吸収線の形の中心の e^{-1} になるところの幅である. さらに中心の $1/2$ になるところの幅を求めると $\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0 = \gamma'_D$ で

$$k_{\tilde{\nu}}(\gamma_D) = \frac{s}{\gamma_D \pi^{1/2}} \exp \left\{ - \frac{\gamma'_D}{\gamma_D} \right\}^2 = \frac{s}{\gamma_D \pi^{1/2}} \times \frac{1}{2}$$

とおくと, 本来の意味のドップラー半値幅は

$$\gamma'_D = \gamma_D (\ln 2)^{1/2} = 0.8325 \gamma_D$$

となる. なお, 本文の図 P4.1 はドップラー吸収線の形と衝突吸収線の形を相対的に示した図で, 半値幅が異なることも示してある (会田 (1982) より).

である。標準気圧 p_0 は $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ で、 $\gamma_0 = 0.1 \text{ cm}^{-1} = 10 \text{ m}^{-1}$ である。この、衝突半値幅 γ とドップラー半値幅 γ'_D が等しい場合の p は、(4.7) と (P4.32) より、

$$\begin{aligned} \gamma_0 \frac{p}{p_0} &= 0.8325 \times \frac{\tilde{\nu}_0}{c} \left(\frac{2RT}{M_r} \right)^{1/2} \\ p &= 0.8325 \times \frac{p_0 \tilde{\nu}_0}{\gamma_0 c} \left(\frac{2RT}{M_r} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{P4.33})$$

となる。光速は $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ 、気体定数は $R = 8.3143 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ である。温度 T は、地球表面の有効温度 $T = 256 \text{ K}$ を仮定する¹⁰。

- (1) 波長は $\tilde{\nu}_0 = 667 \text{ cm}^{-1} = 6.67 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$ 、分子量は $M_r = 44 \text{ g mol}^{-1} = 4.4 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$ である。これを (P4.33) に代入することで、 $p \simeq 583.59 \simeq 584 \text{ Pa} = \underline{0.584 \text{ kPa}}$ が得られる。
- (2) 波長は $\tilde{\nu}_0 = 1600 \text{ cm}^{-1} = 1.6 \times 10^5 \text{ m}^{-1}$ 、分子量は $M_r = 18 \text{ g mol}^{-1} = 1.8 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$ である。これを (P4.33) に代入することで、 $p \simeq 2188.73 \simeq 2189 \text{ Pa} = \underline{2.19 \text{ kPa}}$ が得られる。
- (3) 波長は $\tilde{\nu}_0 = 100 \text{ cm}^{-1} = 1.0 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$ 、分子量は $M_r = 18 \text{ g mol}^{-1} = 1.8 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$ である。これを (P4.33) に代入することで、 $p \simeq 136.80 \simeq 137 \text{ Pa} = \underline{0.137 \text{ kPa}}$ が得られる。

これらは、概ね巻末の解答と一致する。

なお、この「衝突半値幅とドップラー半値幅が等しくなる気圧 (高度)」は衝突による広がりやドップラー効果による広がりのどちらが支配的になるかという、しきい値として考えることができる。半値幅が大きいほど吸収線の形は横に大きく広がるので、非常に大雑把に (... というかむしろ間違っているのだが) 言うと、上記の (1) ~ (3) の気圧よりも大きい (高度が低い) ところでは衝突による広がりが支配的となり、その気圧よりも小さい (高度が高い) ところではドップラー効果による広がりが支配的となる、と考えれば良いだろう。

ただ、これは間違いである。その理由に関しては次の問題 (b) を参照して頂きたい。

(b) §4.3 の (4.5) より、衝突によって広げられた吸収線の吸収係数を、

$$k_{\tilde{\nu}_0 C} = \frac{s\gamma}{\pi \left\{ (\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)^2 + \gamma^2 \right\}} = \frac{s}{\pi\gamma \left\{ \left(\frac{\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0}{\gamma} \right)^2 + 1 \right\}}, \quad (\text{P4.34})$$

(4.30) よりドップラー効果によって広げられた吸収線の吸収係数を

$$k_{\tilde{\nu}_0 D} = \frac{s}{\gamma_D \pi^{1/2}} \exp \left\{ - \left(\frac{\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0}{\gamma_D} \right)^2 \right\} \quad (\text{P4.35})$$

¹⁰本当はもう少し低くても良いかも知れない。ちなみに、 $T = 243 \text{ K}$ にすると、ちょうど巻末の答えと一致する。

とする。吸収線の中央, すなわち, $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0$ における $k_{\tilde{\nu}_0 C}$ と $k_{\tilde{\nu}_0 D}$ の比をとると,

$$\begin{aligned} \frac{k_{\tilde{\nu}_0 C}}{k_{\tilde{\nu}_0 D}} &= \frac{\frac{s}{\pi\gamma \left\{ \left(\frac{\tilde{\nu}_0 - \tilde{\nu}_0}{\gamma} \right)^2 + 1 \right\}}}{\frac{s}{\gamma_D \pi^{1/2} \exp \left\{ - \left(\frac{\tilde{\nu}_0 - \tilde{\nu}_0}{\gamma_D} \right)^2 \right\}}} \\ &= \frac{\gamma}{\gamma_D \sqrt{\pi}} = \frac{1}{0.8325 \times 1.7725} \times \frac{\gamma}{\gamma'_D} \\ &\simeq 0.68 \times \frac{\gamma}{\gamma'_D} \end{aligned}$$

となる。(a) で考えたような, 衝突半値幅 γ とドップラー半値幅 γ'_D が $\gamma = \gamma'_D$ となるような状況を考えると, ドップラー吸収係数の方が大きいことが分かる。ただし, 係数が 0.68 程度なので, 衝突半値幅がドップラー半値幅に比べて多少大きい場合には衝突吸収係数の方が大きくなる場合も考えられる。

次に, 半値幅の数倍のところでの比をとってみる。簡単に見積もるため, (γ_D は正確には半値幅じゃないけど) $\tilde{\nu} = 3\gamma_D + \tilde{\nu}_0$ で考えてみる。この場合,

$$\begin{aligned} \frac{k_{\tilde{\nu}_0 C}}{k_{\tilde{\nu}_0 D}} &= \frac{\frac{s}{\pi\gamma \{9(\gamma_D/\gamma)^2 + 1\}}}{\frac{s}{\gamma_D \pi^{1/2} e^{-9}}} \\ &= \frac{e^9}{\sqrt{\pi}} \frac{\gamma_D}{\gamma} \frac{1}{9(\gamma_D/\gamma)^2 + 1} \\ &\simeq 4572 \times \frac{\gamma_D/\gamma}{9(\gamma_D/\gamma)^2 + 1} \end{aligned}$$

となる。もしも $\gamma = \gamma_D$ ならば, 圧倒的に衝突吸収係数の方が大きい。また, 係数も 4572 と非常に大きいため, 多少 γ_D が大きい程度では, この関係は覆らない。

これらの見積もりの結果は, 問題文の内容を良く反映している。以下の図 P4.1 はこの関係を分かりやすく図示したものである。

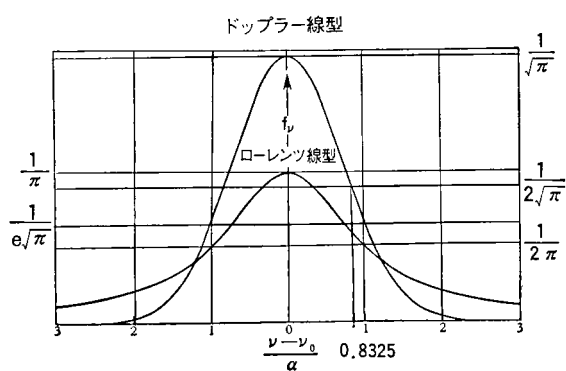


図 5.14 同一の線強度と線幅をもつローレンツ線型とドップラー線型の比較.

図 P4.1: ドップラー吸収線と衝突吸収線 (図中では「ローレンツ線形」と示してある) の形を相対的に示した図. 本文と対応させることを考えると, この図中では, $s = 1, \gamma = \gamma_D = 1$ と規格化されていると考えられると良いだろう ((P4.34) および (P4.35) 参照). また, 横軸の $(\nu - \nu_0)/\alpha$ は $(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)/\gamma$ および $(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)/\gamma_D$ に読みかえて頂きたい. (会田 (1982) より).

4.9 式 (4.10) を得るために, 弱吸収近似を用いて式 (4.9) を積分しなさい.

[解]

$$s = \int_0^{\infty} k_{\tilde{\nu}} d\tilde{\nu} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\infty} d\tilde{\nu}(1 - \tau_{\tilde{\nu}}) \\ &= \int_0^{\infty} d\tilde{\nu}\{1 - \exp(-k_{\tilde{\nu}}\rho l)\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

まず, 弱吸収近似なので $k_{\tilde{\nu}}$ が十分小さいとして $\exp(-k_{\tilde{\nu}}\rho l)$ をテイラー展開する.

$$\exp(-k_{\tilde{\nu}}\rho l) \cong 1 - k_{\tilde{\nu}}\rho l$$

これを式 (4.9) に代入し, 式 (4.6) を使うと

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\infty} d\tilde{\nu}\{1 - \exp(-k_{\tilde{\nu}}\rho l)\} \\ &= \int_0^{\infty} \rho l k_{\tilde{\nu}} d\tilde{\nu} \\ &= \rho l \int_0^{\infty} k_{\tilde{\nu}} d\tilde{\nu} \\ &= s\rho l \end{aligned}$$

となり, 式 (4.10) が得られた.

4.10 式 (4.11) を得るために, 強吸収近似を用いて式 (4.9) を積分しなさい.

[解] 式 (4.5) 式より強吸収近似なので, 吸収線中心付近の値はあまり重要でなく, 両翼の部分が重要になってくるので, $(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)^2 \gg \gamma^2$ とおける. よって

$$\begin{aligned} k_{\tilde{\nu}}\rho l &= \frac{s\rho l\gamma}{\pi\{(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)^2 + \gamma^2\}} \\ &\cong \frac{s\rho l\gamma}{\pi(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)^2} \end{aligned}$$

なので,

$$\int_0^\infty \{1 - \exp(-a^2/x^2)\} dx = a\sqrt{\pi}$$

ただし, $a \geq 0$

を使うと, 図 4.2 に注意して

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty d\tilde{\nu} \{1 - \exp(-k_{\tilde{\nu}}\rho l)\} \\ &= \int_0^\infty d\tilde{\nu} \left[1 - \exp\left\{ \frac{s\gamma\rho l}{\pi(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)^2} \right\} \right] \\ &= \int_{-\nu_0}^\infty dx \left[1 - \exp\left\{ \frac{s\gamma\rho l}{\pi x^2} \right\} \right] \end{aligned}$$

いま, $\infty \sim -\nu_0$ ではほとんど吸収が起こらず, その区間での吸収量は 0 であると考え, 非積分関数が偶関数であることを考慮すると

$$\begin{aligned} W &\cong \int_{-\infty}^\infty dx \left[1 - \exp\left\{ \frac{s\gamma\rho l}{\pi x^2} \right\} \right] \\ &= 2 \int_0^\infty dx \left[1 - \exp\left\{ \frac{s\gamma\rho l}{\pi x^2} \right\} \right] \\ &= 2\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{s\gamma\rho l}{\pi}} \\ &= 2(s\gamma\rho l)^{1/2} \end{aligned}$$

となり, 式 (4.11) が得られた.

- 4.11 吸収気体の圧力が変化するような場合の修正された光路長について考察せよ。気体分子の衝突によって吸収線が拡大する場合、吸収帯の中心での吸収は圧力に依存しないことを示せ。

[解]

テキスト (4.5) 式よりローレンツ線形は

$$k_\nu = \frac{s}{\pi} \frac{\gamma}{(\nu - \nu_0)^2 + \gamma^2} \quad (\text{P4.36})$$

$$s = \int_0^\infty k_\nu d\nu \quad (\text{P4.37})$$

($\tilde{\nu}$ を ν と表した.) ν_0 は吸収線の中心波長, γ は吸収線の半値幅で温度依存性を無視すると

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{p_0} p \quad (\text{P4.38})$$

γ_0 は標準圧力 p_0 での半値幅である。吸収線中心部での吸収係数は (P4.36) で $\nu = \nu_0$ として,

$$k_{\nu_0} = \frac{s}{\pi\gamma}$$

(P4.38) を代入して

$$k_{\nu_0} = \frac{sp_0}{\pi\gamma_0} \frac{1}{p}$$

ここで吸収物質の密度が ρ である気層内を光路長 l で通過する波長 ν_0 の電磁波の吸収量を a とすれば,

$$a = k_{\nu_0} \rho l = \frac{sp_0}{\pi\gamma_0} \frac{\rho}{p} l$$

これに, 同一気層での状態方程式 $p = \rho RT$ を用いれば

$$a = \frac{sp_0}{\pi\gamma_0} \frac{l}{RT} \quad (\text{P4.39})$$

s は吸収気体分子が永久双極子である場合圧力には依存しないことが知られている。(誘起双極子の場合は圧力に依存) したがって, 永久双極子分子を考えるならば吸収量 a は圧力 p に依存しないと言える。

4.12 (1) 衝突によって広がった単一の吸収線に対して, (4.9) の積分が

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ 1 - \exp\left(\frac{-2u\gamma^2}{x^2 + \gamma^2}\right) \right\} \quad (\text{P4.40})$$

と書ける事を示せ. ここで $x = \tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0$, $u = s\rho l/2\pi\gamma$ である.¹¹

(2) 上で示した積分値は変形ベッセル関数 (*modified Bessel functions*)

$I_n(u) = i^{-n} J_n(iu)$ を用いて,

$$\begin{aligned} W &= 2\pi\gamma u \exp(-u) \{I_0(u) + I_1(u)\} \\ &= 2\pi\gamma L(u) \end{aligned}$$

となることを示せ¹². ここで $L(u)$ はラーデンベルグ・レイヒエ関数

(*Ladenberg and Reiche function*) として知られる.

[解]

(1)(4.9) を以下に再掲する.

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\infty} d\tilde{\nu} (1 - \tau_{\tilde{\nu}}) \\ &= \int_0^{\infty} d\tilde{\nu} \{1 - \exp(-k_{\tilde{\nu}}\rho l)\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

まず (4.9) の積分領域を $-\infty$ から ∞ へと拡張する. ただし, $\tilde{\nu} < 0$ において $k_{\tilde{\nu}} = 0$ と定義する.

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\nu} \{1 - \exp(-k_{\tilde{\nu}}\rho l)\}$$

これに (4.5)¹³ を代入し, 問題文中で与えられた x, u を用いて式を整理する:

¹¹ $\tilde{\nu}$ は吸収される放射の波数, $\tilde{\nu}_0$ は吸収線の中心波数,

¹²教科書では変形ベッセル関数の定義は $I_n(u) = i^{-n} J_n(iu)$ となっていた. また, W の定義も

$$W = 2\pi\gamma l u \exp(-u) \{J_0(u) + I_1(u)\}$$

となっていたが, 問題を解いた結果, これらは明らかに誤植と思われる. よって, ここでは参照した以下の文献の定義を用いることにした.

[参考文献] K. N. Liou(2002), "An Introduction to Atmospheric Radiation" 2nd ed, p138, Academic Press.

¹³

$$k_{\tilde{\nu}} = \frac{s\gamma}{\pi\{(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)^2 + \gamma^2\}} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
W &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\nu} \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{s\gamma}{\pi\{(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)^2 + \gamma^2\}} \rho l \right) \right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{s\gamma}{\pi\{x^2 + \gamma^2\}} \rho l \right) \right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{2\gamma^2}{\{x^2 + \gamma^2\}} \frac{s\rho l}{2\pi\gamma} \right) \right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ 1 - \exp \left(\frac{-2u\gamma^2}{\{x^2 + \gamma^2\}} \right) \right\}. \tag{P4.41}
\end{aligned}$$

ただし, $dx = d\tilde{\nu}$ を用いた. (P4.2) は問題の与式と一致する.

(2)

(P4.1) において $x = \gamma t$ という変数変換を施す.

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ 1 - \exp \left(\frac{-2u\gamma^2}{x^2 + \gamma^2} \right) \right\} \tag{P4.1}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} d(\gamma t) \left\{ 1 - \exp \left(\frac{-2u\gamma^2}{\gamma^2 t^2 + \gamma^2} \right) \right\} \\
&= \gamma \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ 1 - \exp \left(\frac{-2u}{t^2 + 1} \right) \right\}. \tag{P4.42}
\end{aligned}$$

部分積分を実行する.

$$\begin{aligned}
W &= \gamma \left[t \left\{ 1 - \exp \left(\frac{-2u}{t^2 + 1} \right) \right\} \right]_{-\infty}^{\infty} - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{\partial}{\partial t} \left\{ 1 - \exp \left(\frac{-2u}{t^2 + 1} \right) \right\} \\
&= \gamma \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \frac{4ut^2}{(t^2 + 1)^2} \exp \left(\frac{-2u}{t^2 + 1} \right) \right\}. \tag{P4.43}
\end{aligned}$$

さらに $t = \tan \frac{\theta}{2}$ として変数変換を行う. このとき,

$$\begin{aligned}
dt &= d\left(\tan \frac{\theta}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\tan^2 \frac{\theta}{2} + 1 \right) d\theta, \\
t^2 + 1 &= \tan^2 \frac{\theta}{2} + 1 \\
&= \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}, \\
\frac{t^2}{t^2 + 1} &= \frac{\tan^2 \frac{\theta}{2}}{\tan^2 \frac{\theta}{2} + 1} \\
&= \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&= \frac{1 - \cos \theta}{2}
\end{aligned}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
 W &= \gamma \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \{u(1 - \cos \theta) \exp(-u[1 + \cos \theta])\} \\
 &= \gamma u e^{-u} \int_{-\pi}^{\pi} \{(1 - \cos \theta) e^{-u \cos \theta}\} d\theta \\
 &= \gamma u e^{-u} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{-u \cos \theta} - e^{-u \cos \theta} \cos \theta) d\theta \\
 &= 2\gamma u e^{-u} \int_0^{\pi} (e^{-u \cos \theta} - e^{-u \cos \theta} \cos \theta) d\theta \quad (\text{P4.44})
 \end{aligned}$$

と書ける。ただし、最後行への変形の際には被積分関数が偶関数であることを用いている。

ここで、 ν 次の第 1 種変形ベッセル関数 $I_\nu(x)$ は ν が整数の時、

$$I_\nu(x) = \frac{(-1)^\nu}{\pi} \int_0^\pi e^{-x \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta \quad (\text{P4.45})$$

と書ける¹⁴ことを用いると、

$$\begin{aligned}
 W &= 2\pi\gamma u \exp(-u) \{I_0(u) + I_1(u)\} \\
 &= 2\pi\gamma L(u)
 \end{aligned}$$

と書ける。これは問題の与式と一致する。

¹⁴積分表示でのベッセル関数

$$J_\nu(x) = \frac{i^{-\nu}}{\pi} \int_0^\pi e^{-x \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta$$

を用いると、第一種変形ベッセル関数は、

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = \frac{(-1)^\nu}{\pi} \int_0^\pi e^{-x \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta$$

となる。

[参考文献] 森口他 (1999), 『岩波 数学公式 III 特殊関数』, p178, 岩波書店.

4.13 式 (4.5) から強吸収近似における $k_{\tilde{\nu}}$ (すなわち, 分母の γ^2 を省略) を大気経路に沿った透過率式 (4.19) に代入し, Curtis-Godson 近似 (4.15) が強吸収近似の場合, 正確であることを示せ.

[解]

$$k_{\tilde{\nu}} = \frac{s\gamma}{\pi\{(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)^2 + \gamma^2\}} \simeq \frac{s\gamma}{\pi\{(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)^2\}} \quad (4.5)$$

$$\tau_{\tilde{\nu}}(z, z_1) = \exp\left(-\int_z^{z_1} k_{\tilde{\nu}} c \rho dz'\right) \quad (4.19)$$

(4.19) に (4.5) を代入すると,

$$\begin{aligned} \tau_{\tilde{\nu}}(z, z_1) &= \exp\left(-\int_z^{z_1} \frac{s\gamma c}{\pi\{(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)^2\}} \rho dz'\right) \\ &= \exp\left(\int_{P_2}^{P_1} \frac{s\gamma_0 c}{\pi\{(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)^2\}} \frac{P}{P_0} \frac{dP}{g}\right) \\ &= \exp\left(\frac{s\gamma_0 c}{\pi\{(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)^2\}} \frac{1}{P_0 g} \int_{P_2}^{P_1} P dP\right) \\ &= \exp\left(\frac{s\gamma_0 c}{\pi\{(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)^2\}} \frac{1}{P_0 g} \frac{1}{2} (P_2^2 - P_1^2)\right) \end{aligned}$$

これを (4.9) に代入し, 等価幅 W を求めると,

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty d\tilde{\nu} \left\{ 1 - \exp\left(\frac{1}{2gP_0} \frac{s\gamma_0 c}{\pi\{(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)^2\}} (P_2^2 - P_1^2)\right) \right\} \\ &= 2 \left\{ \frac{s\gamma_0 c}{2gP_0} (P_1^2 - P_2^2) \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

この式は, (4.16) に一致する. すなわち Curtis-Godson 近似 (4.15) 式は強吸収近似の場合, 正確である.

4.14 衝突によって広がった吸収線の等価幅 W の二つの有効な近似は、

$$W = s\rho l \left(1 + \frac{s\rho l}{4\gamma}\right)^{-1/2} \quad (\text{P4.1})$$

と、

$$W = s\rho l \left\{1 + \left(\frac{s\rho l}{4\gamma}\right)^{5/4}\right\}^{-2/5} \quad (\text{P4.2})$$

である¹⁵。

これらの表現が正しい弱吸収極限 (4.10) と強吸収極限 (4.11) を持つことを示せ。最初の式は、正しい等価幅とのずれが、すべてのパラメータ範囲で 8 % 未満である。二つめの式は Goldman (1968) によると約 1 % の最大誤差を持つ。

[解]

図 4.2 によると、弱吸収極限は、 $\rho l \rightarrow 0$ のときの近似式と思われる。よって、

$$\begin{aligned} W &= s\rho l \left(1 + \frac{s\rho l}{4\gamma}\right)^{-1/2} \\ &\sim s\rho l \left(1 - \frac{1}{2} \frac{s\rho l}{4\gamma}\right) \\ &= s\rho l - \frac{1}{2} \frac{(s\rho l)^2}{4\gamma} \\ &\sim s\rho l \end{aligned}$$

となつて、(4.10) が得られる。

他方、強吸収極限は ρl が大きいときの近似式と思われる。よって、

$$\begin{aligned} W &= s\rho l \left\{1 + \left(\frac{s\rho l}{4\gamma}\right)^{5/4}\right\}^{-2/5} \\ &\sim s\rho l \left\{\left(\frac{s\rho l}{4\gamma}\right)^{5/4}\right\}^{-2/5} \\ &= s\rho l \left(\frac{s\rho l}{4\gamma}\right)^{-1/2} \\ &= s\rho l \left(\frac{4\gamma}{s\rho l}\right)^{1/2} \\ &= 2(s\gamma\rho l)^{1/2} \end{aligned}$$

となつて、(4.11) が得られる。

¹⁵教科書の本文には式番号は付いてないが、解説の都合上、このような式番号を付けることにする。

これらの式および問題 4-12 で導かれた W の式、

$$W = 2\pi\gamma u \exp(-u)\{I_0(u) + I_1(u)\} \quad (\text{P4.3})$$

を、教科書 Fig.4.2 (a) と同じ ρl の範囲で描かせると、以下の図 (A) のようになる。式 (P4.70) と式 (P4.3) は、有効な近似が弱吸収近似から強吸収近似に変わる図の中央部分でずれが見られるが、式 (P4.71) と式 (P4.3) はほとんど重なっている。そこで、ずれが見られる範囲を拡大してみたものが図 (B) であるが、やはり、式 (P4.71) と式 (P4.3) はほとんど重なっていて、差がわからない。

実際、誤差を計算してみると、問題文に書いてある通り、この ρl の範囲で、式 (P4.70) は誤差が 8 % 未満であるのに対し、式 (P4.71) については最大でも 1 % 台の誤差であった。

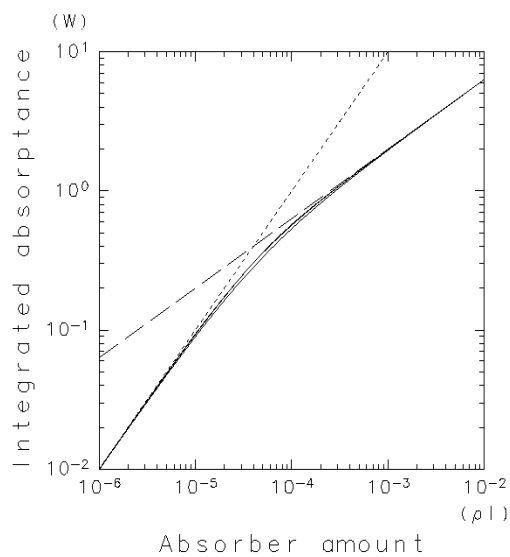


図 (A): 本文の Fig 4-2 (a) と同じ範囲で式 (P4.70) ~ 式 (P4.3) を描かせたもの

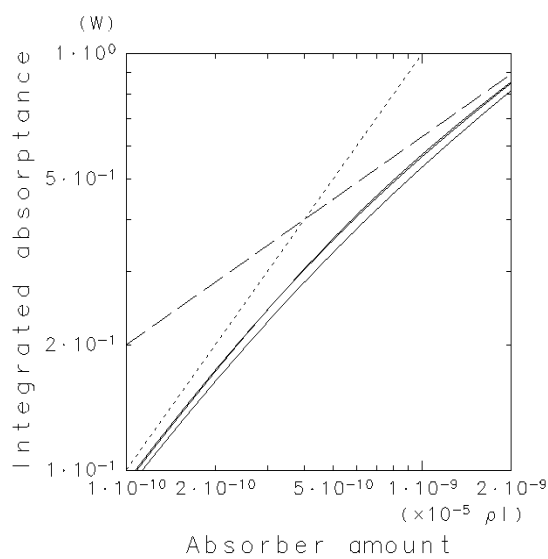


図 (B): 上図を拡大したもの

4.15 (4.17) 式, (4.28) 式と, Appendix 2, 3, 10 のデータから, $525\text{-}550\text{cm}^{-1}$ の波長帯に関して 20kPa から大気上端までの大気中の垂直光路の平均透過率を見積もりなさい.

また, 緯度 60°N でも $775\text{-}800\text{cm}^{-1}$ の波長帯に関して地上までの光路の平均透過率を見積もりなさい.

[解] 上層大気¹⁶では吸収帯の平均透過率は (4.17) 式より,

$$\tilde{\tau} = 1 - \frac{1}{\Delta\tilde{\nu}} \left\{ \frac{2c}{gp_0} (p_1^2 - p_2^2) \right\}^{1/2} \sum_i (s_i \gamma_{oi})^{1/2}.$$

下層大気では吸収線が重なるため上式は使えない. そのような場合には, 吸収線の重合を取り入れた (4.28) 式,

$$\tilde{\tau} = \exp\left(-\sum W_i/\Delta\tilde{\nu}\right)$$

が有効である. ここでは, 前問に関しては (4.17) 式, 後問に関しては (4.28) 式を用いる.

また題意のとおり (4.28) 式を (4.16) 式を用いて書き直すと,

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= \exp\left(-\sum W_i/\Delta\tilde{\nu}\right) \\ &= \exp\left\{-\frac{2}{\Delta\tilde{\nu}} \left(\frac{c}{g} p_0\right)^{1/2} \sum_i (s_i \gamma_{oi})^{1/2}\right\}. \end{aligned}$$

ここでは, 60° に入射する場合の光路長は垂直に入射するときの 2 倍距離が延びることを考慮している¹⁷. 吸収物質は, 二酸化炭素と水蒸気として考える.

実際に, 吸収強度と吸収線幅の値は Appendix 10 にある $T=220\text{K}$ の値 (R) を $525\text{-}550\text{cm}^{-1}$, $775\text{-}800\text{cm}^{-1}$ に関して, 吸収物質の相対濃度は Appendix 3 から (水蒸気に関しては図から) 読み取り代入し求めると,

$525\text{-}550\text{cm}^{-1}$ の光が高度 20kPa まで 垂直に入射する場合
 0.99 (吸収物質が二酸化炭素の場合)
 0.92 (吸収物質が水蒸気 ($c=0.001\text{g/kg}$) の場合)

$775\text{-}800\text{cm}^{-1}$ の光が 60°N に地上まで入射する場合
 0.87 (吸収物質が二酸化炭素の場合)
 0.82 (吸収物質が水蒸気 ($c=0.001\text{g/kg}$) の場合)
 0.76 (吸収物質が水蒸気 ($c=0.002\text{g/kg}$) の場合)
 0.71 (吸収物質が水蒸気 ($c=0.003\text{g/kg}$) の場合)

¹⁶本文では, 適用範囲は高度 30 km 以上と書いている.

¹⁷ 60°N の光路長 (p_{21} の footnote 参照 [光田, 2003/11/04])

4.16 積分因子 $\exp(-\chi)$ を用いて Schwarzschild の方程式 (2.3) を積分し積分形の放射伝達方程式 (??) を導出せよ.

$$I_{\bar{\nu}1} = I_{\bar{\nu}0} \tau_{\bar{\nu}}(z_0, z_1) + \int_{\tau_{\bar{\nu}}(z_0, z_1)}^1 B_{\bar{\nu}}(z) d\tau_{\bar{\nu}}(z, z_1) \quad (4.21)$$

[解] Schwarzschild の方程式 (2.3) を光学的厚さ¹を用いて表すと以下ようになる.

$$\begin{aligned} dI &= -Ik\rho dz + Bk\rho dz \\ &= I d\chi - B d\chi \end{aligned}$$

ここで両辺に $\exp(-\chi(z))$ をかけて、高度 $z_0 - z_1$ の領域で積分する.

$$\begin{aligned} \int_{z=z_0}^{z=z_1} dI \exp(-\chi(z)) &= \int_{z=z_0}^{z=z_1} I d\chi(z) \exp(-\chi(z)) - \int_{z=z_0}^{z=z_1} B d\chi(z) \exp(-\chi(z)) \\ &= - \int_{z=z_0}^{z=z_1} I d(\exp(-\chi(z))) + \int_{z=z_0}^{z=z_1} B d(\exp(-\chi(z))) \end{aligned}$$

ただし、2 段目への変形は、 $d \exp(-\chi(z)) / d\chi(z) = -\exp(-\chi(z))$ を用いた。ここで、 $d(I \exp(-\chi(z))) = dI \exp(-\chi(z)) + I d \exp(-\chi(z))$ より、

$$\begin{aligned} \int_{z=z_0}^{z=z_1} d(I \exp(-\chi(z))) &= \int_{z=z_0}^{z=z_1} B d(\exp(-\chi(z))) \\ I_1 \exp(-\chi(z_1)) - I_0 \exp(-\chi(z_0)) &= \int_{z=z_0}^{z=z_1} B d(\exp(-\chi(z))) \\ I_1 &= I_0 \exp(-\chi(z_0)) + \int_{\exp(-\chi(z_0))}^1 B d(\exp(-\chi(z))) \end{aligned}$$

となる。透過率 $\tau(z, z_1) = \exp(-\chi(z))$ であること、及び各パラメータの波数依存性を考慮すると、これは積分形の放射伝達方程式 (4.21) と等価である。

¹ある高度 z_{bottom} から z_{top} まで大気層の光学的厚さは、以下のようにかける。

$$\chi(z_{bottom}, z_{top}) = \int_{z_{bottom}}^{z_{top}} k\rho dz'$$

今回の場合、高度 z_1 での放射強度を求めるために、大気層の下端を変数 z 、大気上端を定数 z_1 として光学的厚さを以下のようにおく。

$$\chi(z) = \int_z^{z_1} k\rho dz'$$

4.17 $8\mu\text{m}$ から $13\mu\text{m}$ の大気の窓における吸収は、そのほとんどが水蒸気のダイマー (§4.10 参照) による。その吸収係数は k_2e の形をしており、 e は水蒸気圧 (kPa) であり、 $k_2 \simeq 10^{-1} (\text{g cm}^{-2})^{-1} \text{kPa}^{-1}$ である。ここで、地表面近くの水蒸気圧が 1 kPa だとして、以下を計算せよ。

- (1) 地表面近くでの、水平方向 1 km の経路の透過率。
- (2) 水蒸気圧の分布が気圧の 4 乗に比例すると仮定した場合の、鉛直方向の大気全体の経路の透過率。

さらに、(上記の仮定を用い)、以下も見積もってみよ。

- (3) 地表面近くの気層での、このスペクトル領域での水蒸気からの放射による冷却率 (K day^{-1})。

[解]

- (1) 吸収気体 (ここでは水蒸気) の密度が一定と考えられる場合の透過率は、

$$\tau_{\bar{\nu}} = \exp(-k_{\bar{\nu}}\rho l) \quad (4.8)$$

で表される (§4.3 参照)。なお、 $k_{\bar{\nu}}$ は吸収係数、 ρ は吸収気体の密度、 l は経路の長さである。今回の場合、問題文より $k_{\bar{\nu}} = k_2e$ である。また、水蒸気による吸収を考えているので $\rho = \rho_v$ (水蒸気の密度) である。よって、(4.8) は以下ようになる。

$$\tau_{\bar{\nu}} = \exp(-k_2e\rho_v l) \quad (\text{P4.46})$$

問題文より、 k_2 、 e 、 l は既知である。 ρ_v に関しては、以下の関係式を用いる。 (§3.2 の (3.11) ¹⁸参照)。

$$\begin{aligned} \frac{\rho_v}{\rho_a} &= \frac{e}{p} \times 0.622 \\ \rho_v &= \frac{\rho_a e}{p} \times 0.622. \end{aligned} \quad (\text{P4.47})$$

ここで、 ρ_a は空気の密度、 p は気圧である。(この問題内では、地表面のみを考えているので、これらの物理量は定数と考えることができる)。(P4.47) を (P4.46) に代入すると、

$$\tau_{\bar{\nu}} = \exp(-k_2el(\rho_a e/p) \times 0.622). \quad (\text{P4.48})$$

この (P4.48) に、問題文で与えられた $k_2 = 10^{-5} (\text{kg m}^{-2})^{-1} \text{Pa}^{-1}$ と $e = 10^3 \text{ Pa}$ 、および $l = 10^3 \text{ m}$ 、さらに、巻末の Appendix 1 にある地表面近くの大気の密度 $\rho_a = 1.293 \text{ kg m}^{-3}$ 、地表面での気圧 $p = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$ を代入する。すると、

$$\begin{aligned} \tau_{\bar{\nu}} &= \exp\left\{-10^{-5} \times 10^3 \times 10^3 \times \frac{1.293 \times 10^3}{1.01325 \times 10^5} \times 0.622\right\} \\ &\simeq 0.9236954059\dots \\ &\simeq \underline{0.924} \end{aligned} \quad (\text{P4.49})$$

となる。(これは巻末の解と一致する)。

¹⁸

$$m = \frac{\rho_v}{\rho_a} = \frac{e}{p-e} \frac{M_{rv}}{M_{ra}} \simeq \frac{e\varepsilon}{p} = \frac{e}{p} \times 0.622 \quad (3.11)'$$

(2) 吸収気体 (ここでは水蒸気) の密度が変化する場合の透過率は,

$$\tau_{\bar{\nu}}(z, z_1) = \exp\left(-\int_z^{z_1} k_{\bar{\nu}} \rho dz'\right) \quad (4.19)$$

で表される (§4.5 参照). 前の問題と同様, $k_{\bar{\nu}} = k_2 e$, および $\rho = \rho_v$ (水蒸気の密度) である. さらに, 積分区間は地表面から大気上端までなので, (4.19) は以下のようになる. (k_2 は z に依存しないので積分の外に出る).

$$\tau_{\bar{\nu}}(0, \infty) = \exp\left(-k_2 \int_0^{\infty} e \rho_v dz'\right). \quad (P4.50)$$

ρ_v に関しては, 前の問題と同様に関係式 (P4.47) を用いる (ただし今回は e も p も z に伴い変化する). すると,

$$\begin{aligned} \tau_{\bar{\nu}}(0, \infty) &= \exp\left(-0.622 \times k_2 \int_0^{\infty} e(\rho_a e/p) dz'\right) \\ &= \exp\left(-0.622 \times k_2 \int_0^{\infty} \frac{e^2}{p} \rho_a dz'\right) \end{aligned} \quad (P4.51)$$

となる. ここで静水圧の式 $\partial p/\partial z = -\rho g$ を用いると, $\rho_a dz' = -dp/g$ なので,

$$\tau_{\bar{\nu}}(0, \infty) = \exp\left(0.622 \times \frac{k_2}{g} \int_{p_0}^{p_{\text{top}}} \frac{e^2}{p} dp\right) \quad (P4.52)$$

となる. なお, p_0 は地表面での気圧, p_{top} は大気上端での気圧である. 水蒸気圧 e は問題文より, 気圧の 4 乗と仮定されているので,

$$e = a p^4, \quad (a \text{ は比例定数}). \quad (P4.53)$$

地表面ではそれぞれ $e = 10^3$ Pa, $p = 1.01325 \times 10^5$ Pa なので, 比例定数は $a = 0.9487 \times 10^{-17}$ となる. (P4.53) を (P4.52) に代入すると,

$$\begin{aligned} \tau_{\bar{\nu}}(0, \infty) &= \exp\left(0.622 \times \frac{k_2 a^2}{g} \int_{p_0}^{p_{\text{top}}} p^7 dp\right) \\ &= \exp\left(0.622 \times \frac{k_2 a^2}{g} \left[\frac{p^8}{8}\right]_{p_0}^{p_{\text{top}}}\right) \\ &= \exp\left(\frac{0.622}{8} \times \frac{k_2 a^2}{g} \{p_{\text{top}}^8 - p_0^8\}\right) \end{aligned} \quad (P4.54)$$

となる. この式に $k_2 = 10^{-5} (\text{kg m}^{-2})^{-1} \text{Pa}^{-1}$, $a = 0.9487 \times 10^{-17}$, および大気上端での気圧 $p_{\text{top}} = 0$ Pa, さらに, 巻末の Appendix 1 にある地表面での重力加速度 $g = 9.80665 \text{ m s}^{-1}$, 地表面での気圧 $p_0 = 1.01325 \times 10^5$ Pa を代入する. すると,

$$\begin{aligned} \tau_{\bar{\nu}}(0, \infty) &= \exp\left(-\frac{0.622}{8} \times \frac{10^{-5} \times (0.9487 \times 10^{-17})^2}{9.80665} \times \{1.01325 \times 10^5\}^8\right) \\ &\simeq 0.9237800859\dots \\ &\simeq \underline{0.924} \end{aligned} \quad (P4.55)$$

となる. (巻末の解は 0.92 である).

(1) と (2) の問題の意味. 以上の問題 (1) と (2) から, 地表面水平方向 1km の透過率と, 大気全体 (およそ 10km) での鉛直方向の透過率とはほとんど等しいことが分かる. (それがどういった意味を持つかまでは... 良く分かりません...)

(3) 冷却率の式として, 以下の式 (§4.8 参照) を用いる.

$$\frac{dT}{dt} \rho_a c_p = - \int_{\Delta\tilde{\nu}} \pi B_{\tilde{\nu}}(T) \frac{d\tau_{\tilde{\nu}}^*(z, \infty)}{dz} d\tilde{\nu}. \quad (4.24)$$

ここで, T は気温, dT/dt は気温の時間変化, ρ_a は空気の密度, c_p は定圧比熱, $\Delta\tilde{\nu}$ は考える波数領域の幅, $B_{\tilde{\nu}}(T)$ はプランク関数, $\tau_{\tilde{\nu}}^*(z, \infty)$ は高度 z から高度 ∞ までの気層の透過関数である. 気層の透過関数 $\tau_{\tilde{\nu}}^*(z, \infty)$ は (P4.51) より以下のように表される.

$$\tau_{\tilde{\nu}}^*(z, \infty) = \exp\left(-\frac{5}{3} \times 0.622 \times k_2 \int_z^{\infty} \frac{e^2(z')}{p(z')} \rho_a(z') dz'\right) \quad (P4.56)$$

なお, この式の因子 $5/3$ に関しては §2.2, §4.8 を参照のこと. この式を z で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_{\tilde{\nu}}^*(z, \infty)}{dz} &= \left[-\frac{5}{3} \times 0.622 \times k_2 \frac{e^2(z')}{p(z')} \rho_a(z')\right]_z^{\infty} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{5}{3} \times 0.622 \times k_2 \int_z^{\infty} \frac{e^2(z')}{p(z')} \rho_a(z') dz'\right) \\ &= \frac{5}{3} \times 0.622 \times k_2 \frac{e^2(z)}{p(z)} \rho_a(z) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{5}{3} \times 0.622 \times k_2 \int_z^{\infty} \frac{e^2(z')}{p(z')} \rho_a(z') dz'\right) \end{aligned} \quad (P4.57)$$

となる. なお, 上記の計算では関係式 $e^2(\infty)\rho_a(\infty)/p(\infty) = e(\infty)\rho_v(\infty) = 0$ を用いた. 水蒸気のダイマーによる吸収の際の吸収係数は, この問題では波数に依存しないと仮定したため, この (P4.57) を (4.24) に代入すると, 以下ようになる.

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -\frac{1}{c_p} \times \frac{5}{3} \times 0.622 \times k_2 \frac{e^2(z)}{p(z)} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{5}{3} \times 0.622 \times k_2 \int_z^{\infty} \frac{e^2(z')}{p(z')} \rho_a(z') dz'\right) \\ &\quad \times \int_{\Delta\tilde{\nu}} \pi B_{\tilde{\nu}}(T) d\tilde{\nu}. \end{aligned} \quad (P4.58)$$

(P4.58) の右辺の指数関数の項は, 問題 (2) における (P4.51) から (P4.54) への変形を用いることで以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{5}{3} \times 0.622 \times k_2 \int_z^{\infty} \frac{e^2(z')}{p(z')} \rho_a(z') dz'\right) \\ = \exp\left(-\frac{5}{3} \times \frac{0.622}{8} \times \frac{k_2 a^2}{g} \times p^8(z)\right) \end{aligned} \quad (P4.59)$$

また、プランク関数 $B_{\tilde{\nu}}(T)$ は、巻末の Appendix 8 より、以下の式で表される。

$$B_{\tilde{\nu}} = \frac{c_1 \tilde{\nu}^3}{\exp(c_2 \tilde{\nu}/T) - 1}. \quad (\text{P4.60})$$

なお、 $c_1 = 1.1911 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ sr}^{-1} (\text{cm}^{-1})^{-4}$ 、および $c_2 = 1.439 \text{ K} (\text{cm}^{-1})^{-1}$ である。(計算のために単位を変換すると、 $c_1 = 1.1911 \times 10^{-16} \text{ W m}^{-2} \text{ sr}^{-1} (\text{m}^{-1})^{-4}$ 、および $c_2 = 1.439 \times 10^{-2} \text{ K} (\text{m}^{-1})^{-1}$)。本当なら (P4.60) を (P4.58) に代入して真面目に積分するべきだが、計算が大変なので、 $\tilde{\nu} = 10^5 \text{ m}^{-1}$ としてしまう¹⁹。また、積分区間は $\Delta\tilde{\nu} = 5 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$ とする²⁰。そう考えると、(P4.58) の右辺の最後の積分の項は以下のように簡単にできる。

$$\int_{\Delta\tilde{\nu}} \pi B_{\tilde{\nu}}(T) d\tilde{\nu} \simeq \pi \times \frac{c_1 \tilde{\nu}^3}{\exp(c_2 \tilde{\nu}/T) - 1} \times \Delta\tilde{\nu}. \quad (\text{P4.61})$$

(P4.59) と (P4.61) を (P4.58) に代入して、 $c_p = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ 、 $k_2 = 10^{-5} (\text{kg m}^{-2})^{-1} \text{ Pa}^{-1}$ 、 $e(z=0) = 10^3 \text{ Pa}$ 、 $p(z=0) = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$ 、 $a = 0.9487 \times 10^{-17}$ 、 $g = 9.80665 \text{ m s}^{-1}$ 、 $T = 300 \text{ K}$ 、および (前述した) c_1 、 c_2 、 $\tilde{\nu}$ 、 $\Delta\tilde{\nu}$ に数値を代入すると、冷却率は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -\frac{1}{c_p} \times \frac{5}{3} \times 0.622 \times k_2 \frac{e^2(z=0)}{p(z=0)} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{5}{3} \times \frac{0.622}{8} \times \frac{k_2 a^2}{g} \times p^8(z=0)\right) \\ &\quad \times \pi \times \frac{c_1 \tilde{\nu}^3}{\exp(c_2 \tilde{\nu}/T) - 1} \times \Delta\tilde{\nu} \\ &= -\frac{1}{1005} \times \frac{5}{3} \times 0.622 \times 10^{-5} \frac{(10^3)^2}{1.01325 \times 10^5} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{5}{3} \times \frac{0.622}{8} \times \frac{10^{-5} (0.9487 \times 10^{-17})^2}{9.80665} \times (1.01325 \times 10^5)^8\right) \\ &\quad \times 3.14 \times \frac{1.1911 \times 10^{-16} \times (10^5)^3}{\exp\left(\frac{1.439 \times 10^{-2} \times 10^5}{300}\right) - 1} \times 5 \times 10^4 \\ &= -1.39 \times 10^{-5} [\text{K/second}] \\ &= -1.2 [\text{K/day}] \end{aligned} \quad (\text{P4.62})$$

なお、巻末の解答は -1.0 K day^{-1} となっている。

これは、水蒸気による放射冷却の効果を数字にしたものである。ただし、地表面は水蒸気よりも比熱が小さいため、地表面からの放射も考えると、水蒸気の放射の効果はかなり小さくなってしまう。(本当かなあ...?)

[いらなと思うけど、冷却率の計算に用いた Ruby Script]

¹⁹問題文で述べられている波長 $8\mu\text{m} \sim 13\mu\text{m}$ を波数に直すと、 $7.69 \times 10^4 \text{ m}^{-1} \sim 12.5 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$ となる。ここでは間をとって 10^5 m^{-1} を用いることにした。

²⁰ $8\mu\text{m} \sim 13\mu\text{m}$ を波数に直すと、 $7.69 \times 10^4 \text{ m}^{-1} \sim 12.5 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$ となるので、差を取ると $(12.5 \times 10^4) - (7.69 \times 10^4) \simeq 5 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$ となる。これを $\Delta\tilde{\nu}$ とした。


```

#!/usr/bin/ruby

# houghton の問題 4.17 の最後の問題（冷却率の導出）の計算

# 指数関数
EXP = Math::E
# 円周率
PI = Math::PI

# 地上の密度
rho = 1.293
# 地表での気圧
p = 1.01325 * 10.0**5
# 吸収係数の係数
k_2 = 10.0**(-5)
# 地表での水蒸気圧
e = 10.0**3
# 典型的な定圧比熱
c_p = 1005.0

#
## 微分の際に外にでた項
#
A = (1/(c_p)) * (5.0/3.0) * 0.622 * k_2 * (e**2 / p)

print " 微分の際に外に出た項      ", A, "\n"

# 水蒸気圧と気圧の比例定数
a = 0.9487 * 10**(-17)
# 重力加速度
g = 9.80665

## 指数関数の項
#
C = EXP**(- (5.0/3.0) * (0.622/8.0) * (k_2 * a**2 / g) * p**8)

print " 指数関数の項              ", C, "\n"

# 波数
nu = 10.0**5
# 地上の温度
T = 300.0
# プランク関数の係数 1
c_1 = 1.1911 * 10**(-16)
# プランク関数の係数 2
c_2 = 1.439 * 10**(-2)
# 波数の幅
Delta_nu = 5.0 * 10**4

## プランク関数
#
B = PI * (c_1 * nu**3)/(EXP**(c_2 * nu / T) - 1.0) * Delta_nu

print " プランク関数              B = ", B, "\n"

## 冷却率 (/秒)
#
dT_sec = A * B * C

print " 冷却率 (/second) dT/dt = ", dT_sec, "\n"

## 冷却率 (/日)
#
dT_day = dT_sec * 24 * 60 * 60

```

```
print " 冷却率 (/day)      dT/dt = ", dT_day, "\n"
```

4.18 (4.21) 式を部分積分し、次の式を求めよ。

$$I_{\bar{\nu}1} = I_{\bar{\nu}0} - B_{\bar{\nu}}(z_0)\tau_{\bar{\nu}}(z_0, z_1) + B_{\bar{\nu}}(z_1) + \int_{z_1}^{z_2} \tau_{\bar{\nu}}(z, z_1) \frac{dB_{\bar{\nu}}(z)}{dz} dz$$

この式をフラックスで書き、(2.4) を用いて、 $I_{\bar{\nu}0} = B_{\bar{\nu}}(z_0)$ のときの、高度 z_1 での大気加熱率が以下のようにかけることを示せ。

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \pi \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\tau_{\bar{\nu}}(z, z_1)}{dz_1} \frac{dB_{\bar{\nu}}(z)}{dz} dz d\tilde{\nu}$$

[解] (4.21) より、

$$I_{\bar{\nu}1} = I_{\bar{\nu}0}\tau_{\bar{\nu}}(z_0, z_1) + \int_{\tau_{\bar{\nu}}(z_0, z_1)}^1 B_{\bar{\nu}}(z) d\tau_{\bar{\nu}}(z, z_1) \quad (4.21)$$

$$\frac{d\tau_{\bar{\nu}}(z, z_1)}{dz} dz = d\tau_{\bar{\nu}}(z, z_1), \tau : \tau_{\bar{\nu}}(z_0, z_1) \rightarrow 1, z : z_0 \rightarrow z_1 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} I_{\bar{\nu}1} &= I_{\bar{\nu}0}\tau_{\bar{\nu}}(z_0, z_1) + \int_{z_0}^{z_1} B_{\bar{\nu}}(z) \frac{d\tau_{\bar{\nu}}(z, z_1)}{dz} dz \\ &= I_{\bar{\nu}0}\tau_{\bar{\nu}}(z_0, z_1) + [B_{\bar{\nu}}(z)\tau_{\bar{\nu}}(z, z_1)]_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} \frac{dB_{\bar{\nu}}(z)}{dz} \tau_{\bar{\nu}}(z, z_1) dz \\ &= I_{\bar{\nu}0}\tau_{\bar{\nu}}(z_0, z_1) + B_{\bar{\nu}}(z_1)\tau_{\bar{\nu}}(z_1, z_1) - B_{\bar{\nu}}(z_0)\tau_{\bar{\nu}}(z_0, z_1) - \int_{z_0}^{z_1} \frac{dB_{\bar{\nu}}(z)}{dz} \tau_{\bar{\nu}}(z, z_1) dz \\ &= \{I_{\bar{\nu}0} - B_{\bar{\nu}}(z_0)\}\tau_{\bar{\nu}}(z_0, z_1) + B_{\bar{\nu}}(z_1) - \int_{z_0}^{z_1} \frac{dB_{\bar{\nu}}(z)}{dz} \tau_{\bar{\nu}}(z, z_1) dz \end{aligned}$$

この式をフラックスで表す。第一項目は、 $I_{\bar{\nu}0} = B_{\bar{\nu}}(z_0)$ の時 0。B を πB , τ を τ^* , $I_{\bar{\nu}0} = F$ で置き換え、全波数で積分すればよい。上向きフラックス, 下向きフラックスは、

$$\begin{aligned} F^\uparrow &= \int_0^\infty \pi B_{\bar{\nu}}(z_1) d\tilde{\nu} - \int_0^\infty \int_{z_0}^{z_1} \frac{d\pi B_{\bar{\nu}}(z)}{dz} \tau_{\bar{\nu}}^*(z, z_1) dz d\tilde{\nu} \\ F^\downarrow &= \int_0^\infty \pi B_{\bar{\nu}}(z_1) d\tilde{\nu} + \int_0^\infty \int_{z_1}^{z_2} \frac{d\pi B_{\bar{\nu}}(z)}{dz} \tau_{\bar{\nu}}^*(z, z_1) dz d\tilde{\nu} \end{aligned}$$

ここで、 z_2 は z_1 以上となる高度。

(2.4) より、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz_1}(F^\downarrow - F^\uparrow) &= \frac{d}{dz_1} \left[\int_0^\infty \int_{z_1}^{z_2} \frac{d\pi B_{\bar{\nu}}(z)}{dz} \tau_{\bar{\nu}}^*(z, z_1) dz d\tilde{\nu} - \int_0^\infty \int_{z_0}^{z_1} \frac{d\pi B_{\bar{\nu}}(z)}{dz} \tau_{\bar{\nu}}^*(z, z_1) dz d\tilde{\nu} \right] \\ &= \int_0^\infty \int_{z_0}^{z_2} \frac{d\pi B_{\bar{\nu}}(z)}{dz} \frac{d\tau_{\bar{\nu}}^*(z, z_1)}{dz_1} dz d\tilde{\nu} \\ &= \rho c_p \frac{dT}{dt} \end{aligned}$$

$z_0 = 0, z_2 = \infty$ をとれば、

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \int_{z_0}^{z_2} \frac{d\pi B_{\bar{\nu}}(z)}{dz} \frac{d\tau_{\bar{\nu}}^*(z, z_1)}{dz_1} dz d\tilde{\nu}$$

4.19 ランダムな吸収線の配列において s から $s + ds$ の間に強度を持っている吸収線の数を $N(s)ds$ とすると,

$$N(s)ds = \frac{N_0}{s} \exp\left(-\frac{s}{\sigma}\right) \quad (4.33)$$

この分布は Malkmus モデル (Malkmus, 1967) として知られており, 実際に見られる吸収線の分布とよく一致する. 吸収体の密度 ρ の経路を通過後のこれら吸収線の等値幅の和 ΣW_i (吸収線の重合は無いものとする) は,

$$\Sigma W_i = \int_0^\infty \frac{N_0}{s} \exp\left(-\frac{s}{\sigma}\right) ds \int_0^\infty [1 - \exp(-k_{\tilde{\nu}}\rho l)] d\tilde{\nu} \quad (4.34)$$

もし吸収線が次の様な形をしていれば,

$$k_{\tilde{\nu}} = sf(\tilde{\nu}) \quad (4.35)$$

s についての積分を実行して次式が得られる.

$$\Sigma W_i = N_0 \int_0^\infty \ln[1 + \sigma\rho f(\tilde{\nu})] d\tilde{\nu} \quad (4.36)$$

$k_{\tilde{\nu}}$ が衝突による吸収線の拡大の式 (4.5) 式で与えられるならば, 次のようになる.

$$\Sigma W_i = 2\pi\gamma N_0 \left[\left(1 + \frac{\sigma\rho l}{\pi\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \quad (4.37)$$

$\rho\sigma l/\pi\gamma \ll 1$ および $\gg 1$ の極限において (4.37) 式から得られる ΣW_i の値と, 弱吸収近似と強吸収近似での (4.10) 式と (4.11) 式から予想される次の式を比較せよ.

$$\Sigma_i W_i(\text{weak}) = \Sigma_i s_i \rho l \quad (4.38)$$

$$\Sigma_i W_i(\text{strong}) = 2\Sigma_i (s_i \gamma_i \rho l)^{1/2} \quad (4.39)$$

ここでそれぞれの和は, 吸収の強さ s_i 半値幅 γ_i で表された全ての吸収線について行うものとする.

吸収線のデータをランダムモデルに適合する最も良い方法は, モデルの吸収強度分布を実際の分布に合わせようとするのではなく, むしろ (4.37) 式の弱い極限と強い極限を (4.38) 式と (4.39) 式に合わせる方法である. この操作を行うことによって, (4.37) 式の $\pi N_0 \gamma$ と $\sigma/\pi\gamma$ を Σs_i と $\Sigma (s_i \gamma_i)^{1/2}$ で表した式に変換せよ. これより, (4.37) 式は以下のように表される.

$$\Sigma W_i = \frac{2[\Sigma(s_i \gamma_i)^{1/2}]^2}{\Sigma s_i} \left[\left(1 + \frac{\rho l (\Sigma s_i)^2}{[\Sigma(s_i \gamma_i)^{1/2}]^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \quad (4.40)$$

この ΣW_i は非常に便利な形となっている。衝突による吸収線拡大が適応される状況で透過率を計算する際には、どのような波長間隔 $\Delta \tilde{\nu}$ であってもこの ΣW_i を (4.28) 式に代入して求めることができる。多くの吸収帯のうち重要な吸収線で (4.40) 式で利用できるデータを Appendix 10 に掲載しておく。

[解]

本文 4.9 節の band models において多くの吸収線を含む幅 $\Delta \tilde{\nu}$ のスペクトル間隔における平均伝達率 $\tilde{\tau}$ はランダムモデルを用いて以下のように表される。

$$\tilde{\tau} = \exp(-\Sigma W_i / \Delta \tilde{\nu}) \quad (P4.63)$$

ΣW_i はこの間隔での全吸収線について重合がないとみなした場合の等価幅の合計である。ランダムモデルとは、スペクトル間隔 $\Delta \tilde{\nu}$ において吸収線はランダムに分布し、かつ吸収線の強度がある統計的な法則に従って分布していると仮定するものである。いま吸収線の強度分布は Malkmus モデル (4.33) で与えられている。

$$N(s)ds = \frac{N_0}{s} \exp\left(-\frac{s}{\sigma}\right) \quad (P4.64)$$

$N(s)ds$ は s から $s + ds$ の間に強度を持つ吸収線の本数、 N_0 は考えているスペクトル間隔 $\Delta \tilde{\nu}$ に存在する吸収線の合計、 σ は平均の線強度²¹

$$\sigma = \int N(s)sds / \int N(s)ds \quad (P4.65)$$

である。このモデルでは吸収線の数に強度に従って急速に減少していると仮定しており実際に見られる吸収線分布と良く一致する。この分布を用いて吸収線の等価幅の和 ΣW_i を求めるのが本題の目的である。問題より吸収線の重合が無い場合 ΣW_i は (4.34) のような形で書き表される。吸収線の形が (4.35) で与えられると、

$$\begin{aligned} \Sigma W_i &= \int_0^\infty \frac{N_0}{s} \exp\left(-\frac{s}{\sigma}\right) ds \int_0^\infty [1 - \exp(-sf(\tilde{\nu})\rho l)] d\tilde{\nu} \\ &= N_0 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{s} \exp\left(-\frac{s}{\sigma}\right) [1 - \exp(-sf(\tilde{\nu})\rho l)] ds d\tilde{\nu} \quad (P4.66) \end{aligned}$$

s についての積分を実行すれば (4.36) が得られる (はずである)。ここでさらに吸収線の拡大としてローレンツ線形を仮定すれば (4.5) より、

$$k_{\tilde{\nu}} = \frac{s}{\pi} \frac{\gamma}{(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)^2 + \gamma^2} = s \cdot f(\tilde{\nu}) \quad (P4.67)$$

²¹会田 勝, 1982: 大気と放射過程. 東京堂出版, p141, (5.133)

ただし γ は吸収線の半値幅. これを (4.36) に代入すれば,

$$\Sigma W_i = N_0 \int_0^\infty \ln \left[1 + \frac{\sigma \rho}{\pi} \frac{\gamma}{(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)^2 + \gamma^2} \right] d\tilde{\nu} \quad (\text{P4.68})$$

この積分を実行すれば以下の (4.37) 式が得られる.

$$\Sigma W_i = 2\pi\gamma N_0 \left[\left(1 + \frac{\sigma \rho l}{\pi\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \quad (\text{P4.69})$$

この式は考慮しているスペクトル間隔 $\Delta\tilde{\nu}$ にある吸収線について一定の γ を与えた時に求まる ΣW_i を表している. しかし実際の吸収線では様々な γ をとるはずである. ランダムモデルの ΣW_i を実際データに適合させるにはモデルの吸収線強度分布 (P4.64) を実際の吸収線強度分布に合わせるのではなく, むしろ強吸収近似や弱吸収近似の極限で実際の吸収線の ΣW_i と, ランダムモデルから求まる ΣW_i を合わせる方が経験的に良い結果を得ることが知られている.

吸収線一本一本について弱吸収近似, 強吸収近似を考えた時のスペクトル間隔 $\Delta\tilde{\nu}$ における等価幅の和は, 本文 (4.10), (4.11) より次のように書ける ((4.38), (4.39)).

$$\Sigma_i W_i(\text{weak}) = \Sigma_i s_i \rho l \quad (\text{P4.70})$$

$$\Sigma_i W_i(\text{strong}) = 2\Sigma_i (s_i \gamma_i \rho l)^{1/2} \quad (\text{P4.71})$$

一方, ランダムモデルにおける弱吸収近似, 強吸収近似での ΣW_i は,

– 弱吸収近似 ($\rho \sigma l / \pi \gamma \ll 1$)

$$\begin{aligned} \Sigma W_i(\text{weak}) &= 2\pi\gamma N_0 \left[\left(1 + \frac{\sigma \rho l}{\pi\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \\ &\sim 2\pi\gamma N_0 \left[\left(1 + \frac{\sigma \rho l}{2\pi\gamma} \right) - 1 \right] \\ &= N_0 \sigma \rho l \end{aligned} \quad (\text{P4.72})$$

– 強吸収近似 ($\rho \sigma l / \pi \gamma \gg 1$)

$$\begin{aligned} \Sigma W_i(\text{strong}) &= 2\pi\gamma N_0 \left[\left(1 + \frac{\sigma \rho l}{\pi\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \\ &\sim 2\pi\gamma N_0 \left(\frac{\sigma \rho l}{2\pi\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2N_0 \sqrt{\sigma \pi \gamma \rho l} \end{aligned} \quad (\text{P4.73})$$

ここで (P4.70) と (P4.72), (P4.71) と (P4.73) が等しいとすれば,

$$\Sigma_i s_i \rho l = N_0 \sigma \rho l \quad (\text{P4.74})$$

$$2\Sigma_i (s_i \gamma_i \rho l)^{\frac{1}{2}} = 2N_0 (\sigma \gamma \pi \rho l)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{P4.75})$$

(13) より

$$\gamma \pi = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\Sigma (s_i \gamma_i)^{1/2}}{N_0} \right]^2$$

したがって,

$$\begin{aligned} \pi N_0 \gamma &= \frac{1}{\sigma N_0} \left[\Sigma (s_i \gamma_i)^{1/2} \right]^2 \\ &= \frac{\left[\Sigma (s_i \gamma_i)^{\frac{1}{2}} \right]^2}{\Sigma s_i} \end{aligned} \quad (\text{P4.76})$$

二つ目の等号では (12) ($\Sigma_i s_i = N_0 \sigma$) を用いた. さらに,

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\pi \gamma} &= \frac{(\sigma N_0)^2}{\left[\Sigma (s_i \gamma_i)^{\frac{1}{2}} \right]^2} \\ &= \frac{(\Sigma s_i)^2}{\left[\Sigma (s_i \gamma_i)^{\frac{1}{2}} \right]^2} \end{aligned} \quad (\text{P4.77})$$

(14), (15) の結果を用いると (P4.69) は (4.40) のように書き換えられる.

$$\Sigma W_i = \frac{2[\Sigma (s_i \gamma_i)^{1/2}]^2}{\Sigma s_i} \left[\left(1 + \frac{\rho l (\Sigma s_i)^2}{[\Sigma (s_i \gamma_i)^{1/2}]^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \quad (\text{P4.78})$$

4.20 圧力 p の高度から大気上端までの垂直気層の透過率の計算に対して、強吸収近似が非常に良い仮定であることを Appendix. 10 に掲載されている二酸化炭素の $15 \mu\text{m}$ の吸収帯のデータを (4.40) に代入することで示せ。ただし、吸収線の形は衝突幅によるものとする。

[解]

問 4.19 において (4.40) が強/弱吸収大気の双方に対して良い大気層の透過率を表す式であると導入された。よってここでは強吸収近似式 (4.39) との合致性を示すために、Appendix. 10 に掲載される二酸化炭素の吸収線のデータ (表 P4.1 参照) を (4.40) および (4.39) から得られる等価幅 ($\sum W_i$) に代入し、平均透過率を求め、その誤差を検討する²²。

表 P4.1 に二酸化炭素の吸収線の波数域 $650\text{-}675 \text{ cm}^{-1}$ における S および R の値を掲載する (Appendix.10 より抜粋)。

表 P4.1: 二酸化炭素の吸収線の波数域 $650\text{-}675 \text{ cm}^{-1}$ における S および R の値 (Appendix.10 より抜粋)。

温度 (K)	$S(\sum s_i)$	$R(\sum (s_i \gamma_{0i})^{1/2})$	気圧 (kPa)
220	8.839×10^4	8.028×10^2	20
260	8.469×10^4	8.320×10^2	43
300	8.120×10^4	8.705×10^2	100

ここで S は上記波長域に含まれる各吸収線の強度 s_i の和を表し、 R は s_i と各吸収線の標準圧力における半値幅 γ_{0i} の積の平方根 $(s_i \gamma_{0i})^{1/2}$ の和を表す。右端の項目は表中の各温度に対応する北緯 10 度における大気圧。値は Appendix. 5 を参照した。

(4.40) より得られる平均透過率 $\bar{\tau}$ は先述の S, R を用いて書き直すと以下の様に書け

²²波長 $15 \mu\text{m}$ の吸収線のデータは Appendix. 10 の波数 $650\text{-}675 \text{ cm}^{-1}$ のエントリに含まれる。 $15 \mu\text{m} = 15 \times 10^{-4} \text{ cm}$ の逆数は $10000/15=666.66\dots \text{cm}^{-1}$ であるので。

る²³. ただし, γ_i は (4.7) を用いて変形した²⁴.

$$\begin{aligned}\bar{\tau} &= \exp\left(-\sum W_i/\Delta\tilde{\nu}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{\Delta\tilde{\nu}}\left[\left\{1 + \frac{cp}{g} \frac{\sum (s_i)^2}{\frac{p}{2p_0} [\sum (s_i\gamma_{0i})^{1/2}]^2}\right\}^{1/2} - 1\right] \frac{p}{2p_0} \frac{2\{\sum (s_i\gamma_{0i})^{1/2}\}^2}{\sum s_i}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{\Delta\tilde{\nu}}\left[1 - \left\{1 + \frac{2p_0c}{g} \frac{S^2}{R^2}\right\}^{1/2}\right] \frac{pR^2}{p_0S}\right).\end{aligned}\quad (\text{P4.79})$$

同様に (4.39) と (4.16) から得られる平均透過率 $\bar{\tau}_s$ は

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_s &= \exp\left(-\sum W_i(\text{strong})/\Delta\tilde{\nu}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{\Delta\tilde{\nu}}\left\{\frac{2c}{gp_0}(p^2 - 0^2)\right\}^{1/2} \sum (s_i\gamma_{0i})^{1/2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{\Delta\tilde{\nu}}\left\{\frac{2c}{gp_0}\right\}^{1/2} pR\right).\end{aligned}\quad (\text{P4.80})$$

(P4.1), (P4.2) に各値を代入し計算したところ, 表 P4.2 に示す結果が得られた²⁵. ただし, $c = 3.7 \times 10^{-4}$, $p_0 = 100$ kPa, $g = 9.8$ kg m s⁻², $\Delta\tilde{\nu} = 25$ cm⁻¹ を用いた.

表 P4.2: マルクマスモデル (4.40) から求められる平均透過率 τ , 強吸収近似 (4.39) から求められる平均透過率 τ_s の比較.

気圧 (kPa)	温度 (K)	τ	τ_s	τ/τ_s (%)
20	220	0.840	0.839	0.058
43	260	0.678	0.676	0.138
100	300	0.380	0.386	0.368

上記の結果から, マルクマスモデル (4.40) と強吸収近似 (4.39) からそれぞれ求められる平均透過率は最大で 0.3% 程度の差であることがわかる. これより強吸収近似は平均透過率の導出に対して非常に良い近似であることが示される.

²³(4.40) 中の ρl は積分 $\int_z^{z_{top}} c\rho dz = \frac{cp}{g}$ に置き換える. ここで c は二酸化炭素の相対混合比である (Appendix 2 参照). 詳細は本文レジюме脚注 41(03/10/21 光田) 参照.

²⁴

$$\gamma = p\gamma_0/p_0 \quad (4.7)$$

²⁵計算は ruby 1.6.8 [i386-cygwin] を用いて実行した.