

Problems

5.1 高度 120 km の乱流圏界面より上で等温を仮定し、ヘリウムが主要な大気成分となるような高度を異なる太陽活動度に対して見積もれ。

[解] ここでは図 5.2 から酸素 (O) とヘリウムの密度比を考えれば十分であろう。高度 $z_0 = 120$ km ではヘリウムの混合比は地上と同じである (Appendix 3) とし、その高度では酸素はすべて電離しているものとする。酸素とヘリウムに対して式 (5.2) より

$$\frac{n_0(\text{He})}{n_0(\text{O})} \frac{n(\text{O})}{n(\text{He})} = \exp \left[-(z - z_0) \left\{ \frac{1}{H(\text{O})} - \frac{1}{H(\text{He})} \right\} \right] \quad (\text{P5.1})$$

である。 $\frac{n(\text{O})}{n(\text{He})} = e^{-1}$ であれば、大気的主要成分がヘリウムであるといえるそのときの高度 z を求める。上式の両辺の \log をとって整理すると

$$z = z_0 - \frac{\log \left(\frac{n_0(\text{He})}{n_0(\text{O})} \frac{n(\text{O})}{n(\text{He})} \right)}{\left(\frac{1}{H(\text{O})} - \frac{1}{H(\text{He})} \right)} \quad (\text{P5.2})$$

となる。

スケールハイト $H = \frac{kT}{mg}$ を異なる太陽活動度 (温度) に対して求める。

$$m_{\text{He}} = \frac{4}{6.02 \times 10^{23}} \times 10^{-3} = 6.64 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad (\text{P5.3})$$

$$m_{\text{O}} = \frac{16}{6.02 \times 10^{23}} \times 10^{-3} = 2.65 \times 10^{-26} \text{ kg} \quad (\text{P5.4})$$

$$k = 1.36 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1} \quad (\text{P5.5})$$

– $T = 800\text{K}$ の時

$$H(\text{He}) = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 800}{6.64 \times 10^{-27} \times 9.8} = 1.696 \times 10^5 \quad (\text{P5.6})$$

$$H(\text{O}) = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 800}{2.65 \times 10^{-26} \times 9.8} = 4.251 \times 10^4 \quad (\text{P5.7})$$

– $T = 1000\text{K}$ の時

$$H(\text{He}) = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 1000}{6.64 \times 10^{-27} \times 9.8} = 2.120 \times 10^5 \quad (\text{P5.8})$$

$$H(\text{O}) = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 1000}{2.65 \times 10^{-26} \times 9.8} = 5.313 \times 10^4 \quad (\text{P5.9})$$

– $T = 1400\text{K}$ の時

$$H(\text{He}) = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 1400}{6.64 \times 10^{-27} \times 9.8} = 2.969 \times 10^5 \quad (\text{P5.10})$$

$$H(\text{O}) = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 1400}{2.65 \times 10^{-26} \times 9.8} = 7.439 \times 10^4 \quad (\text{P5.11})$$

次に Appendix 3 より $\frac{n_0(\text{He})}{n_0(\text{O})}$ は

$$\frac{n_0(\text{He})}{n_0(\text{O})} = \frac{5.2 \times 10^{-6}}{0.209 \times 2} = 1.244 \times 10^{-5} \quad (\text{P5.12})$$

である¹。

以上の値を (P5.2) に代入すると

– $T = 800\text{K}$ の時

$$\begin{aligned} z &= 1.2 \times 10^5 - \frac{\log\left(1.244 \times 10^{-5} \times \frac{1}{2.718}\right)}{\left(\frac{1}{4.251 \times 10^4} - \frac{1}{1.696 \times 10^5}\right)} \\ &= 1.2 \times 10^5 - \frac{\log(0.4576 \times 10^{-4})}{\left(\frac{1}{4.251 \times 10^4} - \frac{1}{1.696 \times 10^5}\right)} \\ &= 1.2 \times 10^5 - \frac{-9.992}{2.352 \times 10^{-5} - 0.5896 \times 10^{-5}} \\ &= 1.2 \times 10^5 + \frac{9.992}{1.762} \times 10^5 \\ &= 1.2 \times 10^5 + 5.670 \times 10^5 \\ &= 6.870 \times 10^5 \\ &= 687 \text{ km} \end{aligned} \quad (\text{P5.13})$$

– $T = 1000\text{K}$ の時

$$\begin{aligned} z &= 1.2 \times 10^5 - \frac{\log\left(1.244 \times 10^{-5} \times \frac{1}{2.718}\right)}{\left(\frac{1}{5.655 \times 10^4} - \frac{1}{2.120 \times 10^5}\right)} \\ &= 1.2 \times 10^5 - \frac{\log(0.4576 \times 10^{-4})}{\left(\frac{1}{5.655 \times 10^4} - \frac{1}{2.120 \times 10^5}\right)} \\ &= 1.2 \times 10^5 - \frac{-9.992}{1.768 \times 10^{-5} - 0.4716 \times 10^{-5}} \\ &= 1.2 \times 10^5 + \frac{9.992}{1.296} \times 10^5 \\ &= 1.2 \times 10^5 + 7.709 \times 10^5 \\ &= 8.909 \times 10^5 \\ &= 890 \text{ km} \end{aligned} \quad (\text{P5.14})$$

¹体積混合比と数密度混合比は等しいとする。(∵ 温度・圧力が一定の時、数密度は体積に比例する)

– $T = 1400\text{K}$ の時

$$\begin{aligned} z &= 1.2 \times 10^5 - \frac{\log \left(1.244 \times 10^{-5} \times \frac{1}{2.718} \right)}{\left(\frac{1}{7.439 \times 10^4} - \frac{1}{2.969 \times 10^5} \right)} \\ &= 1.2 \times 10^5 - \frac{\log (0.4576 \times 10^{-4})}{\left(\frac{1}{7.439 \times 10^4} - \frac{1}{2.969 \times 10^5} \right)} \\ &= 1.2 \times 10^5 - \frac{-9.992}{1.344 \times 10^{-5} - 0.3368 \times 10^{-5}} \\ &= 1.2 \times 10^5 + \frac{9.992}{1.007} \times 10^5 \\ &= 1.2 \times 10^5 + 9.922 \times 10^5 \\ &= 11.12 \times 10^5 \\ &= 1112 \text{ km} \end{aligned} \tag{P5.15}$$

5.2 (1) 密度 ρ の気体中を速度 V で飛行中の断面積 A の物体が受ける抵抗は $\frac{1}{2}\rho A c_D V^2$ となることを示せ。なお、 c_D は抵抗係数である。

(2) 高度 600 km の円軌道上にある $A = 1 \text{ m}^2$, $c_D = 2$, 質量 100 kg の人工衛星の、標準大気における 1 回転あたりの軌道周期の変化を求めよ。衛星軌道を精密に観測することは、熱圏の密度を測定するのに重要な手段である。

[解]

(1) 抵抗係数 c_D は以下のように定義される。

$$c_D \equiv \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}. \quad (\text{P5.16})$$

D は抵抗である。この定義からして当然、

$$D = \frac{1}{2}\rho A c_D V^2 \quad (\text{P5.17})$$

となる。

ただ、これではあまりにも物理とかけ離れた説明なので、少々補足する。まず、図 P5.1 のように、断面積 A の物体が、単位時間で V 進んだ場合を考える。物体が単位時間に通過した体積は AV なので、質量に換算すると、 $AV\rho$ となる。物体から見ると、流体が速度 V で物質に衝突するように見えるので、単位時間あたりに受ける力 F は以下ようになる。

$$F \propto AV\rho \times V = \rho AV^2. \quad (\text{P5.18})$$

ただし、正確には流体の粘性なども考慮しなければならない。そういったものは抵抗係数 c_D で表されているものと考える (...がこの解釈が正しいのかは良く分からない)。また、係数 $1/2$ も何を反映しているのか良く分からない。

$$D = \frac{1}{2}\rho A c_D V^2.$$

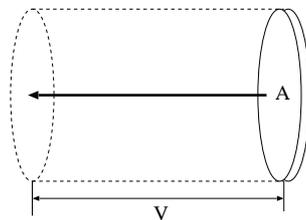


図 P5.1: 断面積 A の物体が単位時間あたり V 進んだ際の様子。

(2) 人工衛星の速度 V は、遠心力と引力との釣り合いの式 $mV^2/R = GMm/R^2$ から知ることができる。

$$V = \sqrt{\frac{GM}{R}}. \quad (\text{P5.19})$$

m は人工衛星の質量で $m = 100 \text{ kg}$, R は地球中心から人工衛星までの距離で $R = 7.0 \times 10^6 \text{ m}$ である (問題文より). G は重力定数, M は地球の質量である.

また, 人工衛星の周期 T は, 軌道の距離を速度で割れば良いので,

$$T = \frac{2\pi R}{V} \quad (\text{P5.20})$$

である.

大気による抵抗 D は (1) より

$$D = \frac{1}{2}\rho A c_D V^2 \quad (\text{P5.21})$$

である. ρ は高度 600 km の大気の密度で, $\rho = 1.137 \times 10^{-13} \text{ kg m}^{-3}$ である (『理科年表 2003』より). $A = 1 \text{ m}^2$, $c_D = 1$ は問題文より与えられている. この式から, 人工衛星の加速度を a とすると, 関係式

$$ma = -D \quad (\text{P5.22})$$

が得られる. (P5.20) と (P5.21) と (P5.22) から, 人工衛星の, 1 回転あたりの速度変化 ΔV が分かる. (本当は, 1 回転する間に徐々に V が減少するため, 以下の式は厳密には正しくないが, $V \gg \Delta V$ と考え, 近似してしまう).

$$\Delta V = aT = -\frac{D}{m} \frac{2\pi R}{V} = -\frac{\rho A c_D V^2}{2m} \frac{2\pi R}{V} = -\frac{\pi R \rho A c_D V}{m} \quad (\text{P5.23})$$

次に, 1 回転して ΔV だけ減速した場合の, 人工衛星の地球中心からの距離 R' を考える. (P5.19) と同様に釣り合いの式を用いると,

$$\begin{aligned} V + \Delta V &= \sqrt{\frac{GM}{R'}} \\ R' &= \frac{GM}{(V + \Delta V)^2} \end{aligned} \quad (\text{P5.24})$$

となる. その場合の周期 T' も (P5.20) と同様に,

$$T' = \frac{2\pi R'}{V + \Delta V} \quad (\text{P5.25})$$

となる.

最後に, (P5.20) と (P5.23) と (P5.24) と (P5.25) を用い, 軌道周期の変化 $T' - T$ を求める. 以下では規格化し, 変化を T で割る.

$$\begin{aligned}
 \frac{T' - T}{T} &= \frac{\frac{2\pi R'}{V + \Delta V} - \frac{2\pi R}{V}}{\frac{2\pi R}{V}} \\
 &= \frac{V}{V + \Delta V} \frac{R'}{R} - 1 \\
 &= \frac{V}{V - \Delta V} \frac{\frac{GM}{(V + \Delta V)^2}}{\frac{GM}{V^2}} - 1 \\
 &= \left(\frac{V}{V - \Delta V} \right)^3 - 1 \\
 &= \left(\frac{V}{V - \frac{\pi R \rho A c_D V}{m}} \right)^3 - 1 \\
 &= \frac{1}{1 - \left(\frac{\pi R \rho A c_D}{m} \right)^3} - 1 \tag{P5.26}
 \end{aligned}$$

後は, この式に実際に数値を代入する. 再掲すると,

| | |
|------------------|--|
| 円周率 | $\pi = 3.14$ |
| 人工衛星の地球中心からの距離 | $R = 7.0 \times 10^6 \text{ m}$ |
| 高度 600 km の大気の密度 | $\rho = 1.137 \times 10^{-13} \text{ kg m}^{-3}$ |
| 人工衛星の断面積 | $A = 1.0 \text{ m}^2$ |
| 抵抗係数 | $c_D = 2.0$ |
| 人工衛星の質量 | $m = 100 \text{ kg}$ |

である. 代入した結果は以下ようになる.

$$\frac{T' - T}{T} \simeq 1.5 \times 10^{-7}. \tag{P5.27}$$

ちなみに巻末の解答は -1.3×10^{-7} である. 絶対値はほぼ一緒なのだが, 巻末の解答では周期が短くなるのに対し, 実際に計算してみた結果は周期が長くなってしまった.

5.3 $T = 1000 \text{ K}$ のヘリウム原子に対して (5.9) の β の値を計算せよ。

ヘリウムに対する β の値が 1.6 m s^{-1} となる、すなわち $T = 1000 \text{ K}$ での水素の β の値と等しくなるために必要な温度を計算せよ。

[解]

・「 $T = 1000 \text{ K}$ のヘリウム原子に対して (5.9) の β の値を計算せよ」について。

レジュメ p.7 より、

$$\beta = \frac{1}{8} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{1/2} \left(V_{zc}^2 + \frac{1}{\alpha} \right) \exp(-\alpha V_{zc}^2) \quad (*)$$

であるから、 $\alpha = m/2kT$, $m/k = M_r/R = (4 \times 10^{-3})/8.31$, $T = 1000 \text{ K}$, $V_{zc} = 11 \times 10^3 \text{ [m/s]}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{8} \left(\frac{4 \times 10^{-3}}{2 \times 8.31 \times 1000 \times \pi} \right)^{1/2} \times \left((11 \times 10^3)^2 + \frac{2 \times 8.31 \times 1000 \times \pi}{4 \times 10^{-3}} \right) \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{4 \times 10^{-3}}{2 \times 8.31 \times 1000 \times \pi} \times (11 \times 10^3)^2 \right) \\ &= 1.0 \times 10^{-9} \end{aligned}$$

となる。

・「ヘリウムに対する β の値が 1.6 m s^{-1} となる、すなわち $T = 1000 \text{ K}$ での水素の β の値と等しくなるために必要な温度を計算せよ」について。

直接解くのが困難なので、数値的に求める。下図は式 (*) について、 T を変化させたときの β の値を描かせたものである。これによると、 $\beta = 1.6$ になるのは、約 4000 K であることがわかる。

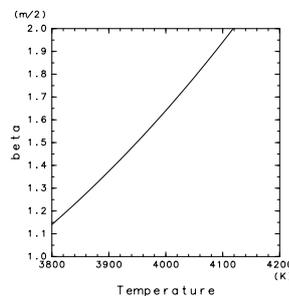


図: ヘリウム原子に対する T と β の関係

- 5.4 温度 T , 全数密度 n の大気中に少量含まれる水素原子の拡散係数 D は, $T^{1/2}n^{-1}$ に比例する形で書けることを気体分子運動論を用いて示せ. さらに, 乱流圏界面上層の大気においてスケールハイト H 一定を仮定すると, 水素分子の数密度 n_H は以下の微分方程式で与えられることを示せ. ただし, n_0 は乱流圏界面における全数密度, C は定数である.

$$\frac{dn_H}{dz} + \frac{n_H}{H_H} = -\frac{\dot{N}n_0}{CT^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(z-z_c)}{H}\right\} \quad (\text{P5.28})$$

[解]

まず, 拡散係数 D を示す. 光田氏のレジュメの 5.2 節脚注 1, 2 より, 分子拡散係数 D は 3 次元の場合,

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{3}vl \\ &\simeq \frac{1}{3} \frac{v}{n\sigma} \end{aligned} \quad (\text{P5.29})$$

と近似される. ここで, v は水素分子の速度, l は平均自由行程, σ は衝突断面積である. ところで, 水素分子 1 個あたりの運動エネルギーは, 水素分子 1 個の質量 m , ボルツマン定数 k , T を用いて

$$\frac{m}{2}v^2 = \frac{3}{2}kT$$

と書ける. 上式を v について解いて, P5.29 に代入すると

$$\begin{aligned} D &\simeq \frac{1}{3} \frac{\sqrt{\frac{3kT}{m}}}{n\sigma} \\ &= \frac{1}{3\sigma} \sqrt{\frac{3k}{m}} \frac{\sqrt{T}}{n} \end{aligned} \quad (\text{P5.30})$$

を得る. σ, m は分子の種類に対して一意に決まる定数なので, 結局 D は $T^{1/2}n^{-1}$ に比例する形で書ける.

次いで, (P5.1) を求める. (P5.10) より

$$\dot{N} = D \left\{ \frac{dn_H}{dz} - \left(\frac{dn_H}{dz} \right)_e \right\}$$

となる. ここで, 右辺第 2 項の添字の e は散逸平衡状態にあることを意味する. 両辺を D で割り, 先の拡散係数の比例関係を用いると,

$$\frac{dn_H}{dz} + \frac{n_H}{H_H} = \frac{n}{CT^{1/2}} \dot{N} \quad (\text{P5.31})$$

と書ける. ただし, 平衡状態における n_H の鉛直勾配は本文同様 $(dn_H/dz)_e = -n_H/H_H$ とした.

ところで、静水圧平衡下において、

$$\frac{dn}{dz} = -\frac{n}{H}$$

が成り立つ²。上式を dn/n について解き、臨界高度 z_c から任意の高度 z まで積分する；

$$\int_{n(z_c)}^{n(z)} \frac{dn}{n} = \int_{z_c}^z -\frac{dz}{H}$$

$$\ln \frac{n}{n(z_c)} = -\frac{z - z_c}{H}$$

上式を n について解くと、

$$n = n(z_c) \exp \left\{ -\frac{z - z_c}{H} \right\}.$$

上式を (P5.4) に代入すると、(P5.1) を得る。

²静水圧平衡の式

$$dp = \rho g dz$$

に気体の状態方程式

$$p = nkT$$

を代入すると

$$kT dn = \rho g dz,$$

$$\frac{dn}{dz} = \frac{\rho g}{kT}$$

$$= \frac{g}{kT} \frac{M_r p}{RT}$$

$$= -\frac{n}{H}$$

を得る。ただし、等温大気を仮定する。

5.5 式 (5.46) を積分せよ. 求めた解から, 脱出高度での n_H の値を求め, これから水素原子の散逸率を求めよ. ただし, $n_H(120 \text{ km}) = 2 \times 10^{11} \text{ m}^{-3}$, $C = 2 \times 10^{20} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1/2}$ と与えられているとし, その他の量は表やダイアグラムから適当な値を探すこと.

[解]

式 (5.46) の積分 式 (5.46)

$$\frac{dn_H}{dz} + \frac{n_H}{H_H} = -\frac{\dot{N}n_0}{CT^{1/2}} \exp\left\{\frac{-(z-z_0)}{H}\right\} \quad (5.46)$$

に式 (5.9)

$$\dot{N} = \beta n_H$$

を代入して変数分離すると

$$\frac{dn_H}{n_H} = -\left(\frac{1}{H_H} + \frac{\beta n_0}{CT^{1/2}} \exp\left\{\frac{-(z-z_0)}{H}\right\}\right) dz \quad (P5.32)$$

となる. 両辺を高度 z_0 から z までの範囲で積分すると

$$\int_{n_H(z_0)}^{n_H(z)} \frac{dn_H}{n_H} = -\int_{z_0}^z \left(\frac{1}{H_H} + \frac{\beta n_0}{CT^{1/2}} \exp\left\{\frac{-(z-z_0)}{H}\right\}\right) dz \quad (P5.33)$$

左辺の積分を計算すると

$$\left[\ln n_H \right]_{n_H(z_0)}^{n_H(z)} = \ln \frac{n_H(z)}{n_H(z_0)} \quad (P5.34)$$

となる. また, 右辺の積分を計算すると

$$\begin{aligned} & -\left[\frac{z}{H_H} - \frac{\beta n_0 H}{CT^{1/2}} \exp\left\{\frac{-(z-z_0)}{H}\right\} \right]_{z_0}^z \\ &= \frac{-(z-z_0)}{H_H} + \frac{\beta n_0 H}{CT^{1/2}} \left(\exp\left\{\frac{-(z-z_0)}{H}\right\} - 1 \right) \end{aligned} \quad (P5.35)$$

従って,

$$\ln \frac{n_H(z)}{n_H(z_0)} = \frac{-(z-z_0)}{H_H} + \frac{\beta n_0 H}{CT^{1/2}} \left(\exp\left\{\frac{-(z-z_0)}{H}\right\} - 1 \right) \quad (P5.36)$$

となる. $n_H(z)$ について解くと

$$n_H(z) = n_H(z_0) \exp\left[\frac{-(z-z_0)}{H_H} + \frac{\beta n_0 H}{CT^{1/2}} \left(\exp\left\{\frac{-(z-z_0)}{H}\right\} - 1 \right) \right] \quad (P5.37)$$

となる.

脱出高度での水素原子の数密度 式 (P5.37) に脱出高度 $z = z_c$ を代入すると,

$$n_H(z_c) = n_H(z_0) \exp \left[\frac{-(z_c - z_0)}{H_H} + \frac{\beta n_0 H}{CT^{1/2}} \left(\exp \left\{ \frac{-(z_c - z_0)}{H} \right\} - 1 \right) \right] \quad (\text{P5.38})$$

ここでは、各パラメータの値は以下のようにおくことにする。

- 問題文中より, $n_H(120 \text{ km}) = 2 \times 10^{11} \text{ m}^{-3}$
- 問題文中より, $C = 2 \times 10^{20} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1/2}$
- 太陽活動は平均程度と仮定すると, Fig.5.3(a) から $T = 1000 \text{ K}$.
- 5.3 節から, $T = 1000 \text{ K}$ では, $\beta = 1.6 \text{ m s}^{-1}$.
- H_H の値は 1.3 節から

$$H_H = \frac{RT}{M_H g} = \frac{8.32 \times 10^3 \times 1000}{1 \times 9.8} = 8.5 \times 10^5 \text{ m} = 850 \text{ km}$$

- 5.3 節から, $T = 1000 \text{ K}$ を仮定した場合, 脱出高度近辺では $H = 53 \text{ km}$
- 分子拡散をするようになる高度として, $z_0 = 120 \text{ km}$ とおく.
- 脱出高度は Fig. 5.2 から $z_c = 500 \text{ km}$ とおく.
- 乱流圏界面での全数密度は Fig. 5.2 から $n_0 = 10^{17} \text{ m}^{-3}$ とおく.

以上を (P5.38) に代入すると,

$$\begin{aligned} n_H(z_c) &= 2 \times 10^{11} \exp \left[\frac{-(500 \times 10^3 - 120 \times 10^3)}{850 \times 10^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1.6 \times 10^{17} \times 53 \times 10^3}{2 \times 10^{20} \times 1000^{1/2}} \left(\exp \left\{ \frac{-(500 \times 10^3 - 120 \times 10^3)}{53 \times 10^3} \right\} - 1 \right) \right] \\ &= 3.3 \times 10^{10} \text{ m}^{-3} \end{aligned} \quad (\text{P5.39})$$

水素原子の脱出率 脱出高度での水素原子の数密度 $n_H(z_c)$ が求められたら, 式 (5.9) を用いて水素原子の脱出率を求めることができる.

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \beta n_H \\ &= 1.6 \times 3.3 \times 10^{10} \\ &= 5.3 \times 10^{10} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{P5.40})$$

解答の値について 教科書巻末の解答は水素原子の数密度が $1.36 \times 10^{11} \text{ m}^{-3}$, 水素原子の脱出率が $2.2 \times 10^{11} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ であった. 今, ここで求めた値は巻末の解答に比べて約 4 倍違う. この違いの原因として水素原子の数密度を求めるときに用いたパラメータ取り方により生まれた誤差が考えられる. とくに乱流圏界面での全密度 n_0 の値の取り方が怪しいのではないだろうか.

- 5.6 現在地球大気に存在している酸素は、水素の散逸を伴う高層大気の水分子の解離の結果もたらされたと提唱されてきた。定常状態を仮定し、地球の歴史を通じた ($\sim 4.5 \times 10^9$ 年) 水素の消失量を計算し、この仮説の妥当性を検討せよ。(現在ではこの問題で想定される酸素の起源は光合成から生ずる酸素に比べて小さいと信じられている。)

[解]

前問 (5.5) より $\dot{N}_H = 2.2 \times 10^{11} [\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}]$. 地球の半径 $R_e = 6371 \text{ km}$, エグゾベースを地表面から $z_c = 450 \text{ km}$ にとると単位時間に散逸する H 原子は,

$$\begin{aligned} D_H &= \dot{N}_H \cdot 4\pi(z_c + R_e)^2 \\ &= 8.8 \times 10^{11} (4.5 \times 10^5 + 6.371 \times 10^6)^2 \pi \\ &= 1.286 \times 10^{15} [\text{s}^{-1}] \end{aligned} \quad (\text{P5.41})$$

散逸率が一定であると仮定して 45 億年間の H 原子の消失量 L_H は,

$$\begin{aligned} L_H &= D_H \cdot 3.6 \times 10^3 \times 24 \times 365 \times 4.5 \times 10^9 \\ &= 1.824 \times 10^{43} \end{aligned} \quad (\text{P5.42})$$

このが全て H_2O の解離に由来すると想定すると生成する O_2 の質量 M_{O_2} は, H 原子 4 個につき 1 つの O_2 が生成するから,

$$\begin{aligned} M_{\text{O}_2} &= \frac{L_H}{4} \cdot 32 \cdot m_p \\ &= 8 \cdot 1.824 \times 10^{43} \cdot 1.672 \times 10^{-27} \\ &= 2.44 \times 10^{17} [\text{kg}] \end{aligned} \quad (\text{P5.43})$$

ただし m_p は陽子の静止質量. この時地表面での O_2 の分圧 P_{O_2} は,

$$\begin{aligned} M_{\text{O}_2}/4\pi R_e^2 &= \frac{2.44 \times 10^{17}}{5.1 \times 10^{14}} \\ &= 4.784 \times 10^2 [\text{Pa}] \\ &= 4.784 \times 10^{-3} [\text{bar}] \end{aligned} \quad (\text{P5.44})$$

一方現在大気に含まれる酸素の分圧は ~ 0.2 [bar] である. 地球大気の O_2 の起源を考える上で H_2O の解離による寄与は小さいと言える.

5.7 以下の方法で式 (5.11) を数値的に解きなさい (簡単なコンピュータプログラムを書く必要がある). 下部境界 $z = 120 \text{ km}$, $T = 300 \text{ K}$ より上での酸素原子だけの大気を仮定し, 静力学方程式から等温大気における高度方向の関数として酸素原子の数密度を計算しなさい. 酸素原子の吸収断面積を $1.2 \times 10^{-21} \text{ m}^2$, 積 ϵI_∞ の値を $1.1 \times 10^{-3} \text{ W m}^{-3}$, $\lambda = AT^{1/2}$ ($A = 3.6 \times 10^{-3} \text{ J m}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-3/2}$) と仮定し, 下部境界からそれぞれの層について式 (5.11) を解きなさい. T の計算結果から新しい密度プロファイルを求め, 式を満足する解が得られるまで計算を続けなさい.

[解] 以下のような手順で次の式を満足する温度を計算する.

$$\epsilon \{ \bar{I}(\infty) - I(z) \} = \lambda(z) \frac{dT(z)}{dz} \quad (\text{P5.45})$$

- (1) 温度の高度分布から密度を計算 (初期値は $T=300\text{K}$ の等温大気)
- (2) 計算した密度から太陽放射強度の高度分布を計算
- (3) 計算した太陽放射強度から温度の高度分布を求める
- (4) 新たに計算された温度の高度分布と初期値として使った温度の高度分布を比べる
- (5) 比べた結果同じであれば計算終了, 違っていれば (1) へ戻る

太陽放射強度および酸素原子数密度は

$$I(z) = I_\infty \exp \left\{ - \int_\infty^z \sigma n(z) dz \right\}$$

$$n(z) = n_0 \exp \left\{ - \int_{z_0}^z \frac{mg}{k_B T(z)} dz \right\}$$

を使う. いま $n(z)$ は酸素原子の数密度高度分布, n_0 は 120 km での酸素数密度 (10^{17} m^{-3}) とした. その結果は以下の図に示すとおりである. 温度は 400 km まで付近まで急激に上昇しその後はほぼ等温 (1400 K) になることがわかる.

```
--- ThermosphereTemp.java ---

import java.math.*;
import java.io.*;
import java.text.DecimalFormat;

/**
 * @author Y. Kakinami
 * @version 1.0
 */

public class ThermosphereTemp {
    // 物理定数
    //double g = 9.806659;      // 重力加速度
    double g = 9.514;          // 重力加速度@100km
    double m = 2.6762376e-26;  // 酸素原子の質量
    double k = 1.3806626e-23;  // ボルツマン定数
    double mgk = m * g / k;

    // 問題設定
    double sigma = 1.2e-21;    // 酸素原子吸収断面積
    double A = 3.6e-3;         // 熱伝導係数
    double rho0;               // 下部境界での密度
    double linf;               // 上部境界での太陽放射

    // シミュレーション設定
    // high - low が def の整数倍になっている必要がある。計算はできる
    double low;                // 下部境界の高度
    double high;               // 上部境界の温度
    double def;                // 計算格子間隔
    int s;                      // 計算格子数
}
```

```
/**
 * インスタンス
 * シミュレーションの枠組みを設定
 * @param low : 下部境界高度
 * @param high : 上部境界高度
 * @param def : 計算格子間隔
 */
public ThermosphereTemp(double low, double high, double def) {
    this.low = low;
    this.high = high;
    this.def = def;
    this.s = (int)(( this.high - this.low ) / this.def ) + 1; // 高度幅から必要な配
列の個数を計算
}

double[] calculateTemp(double t, double rhoL, double Iinf){
    double[] t0 = new double[this.s]; // 計算前の温度
    double[] t1 = new double[this.s]; // 計算後の温度
    double[] rho = new double[this.s]; // 密度
    double[] rad = new double[this.s]; // 太陽放射量

    this.rho0 = rhoL;
    this.Iinf = Iinf;

    // 初期値として下部境界の温度であるとする
    for(int i=0; i<this.s ; i++){
        t1[i] = t;
    }

    // 温度が収束するまで繰り返す
    int b=0;
    do{
        System.arraycopy(t1,0,t0,0,t1.length);
        // 密度を計算
        rho = this.calDensity(t0);

        // 高度ごとの太陽放射量を計算
        rad = this.calRadiation(rho);

        // 温度を計算
        t1 = calTemp(t0,rad);

        if(b%1 == 0){
            b = 0;
        }
        b++;
    }
    while(check(t0,t1,0.0)); // 終了条件のチェック

    return t1;
}

/**
 * 温度分布から密度を計算
 * @param t : 温度高度分布
```

```

    * @return 密度高度分布
    */
double[] calDensity(double[] t){
    double[] integ = new double[this.s];
    double[] rVal = new double[this.s];

    // 1/T の配列をつくる
    t = inverse(t);

    // 1/T を積分する
    integ = integration(t);

    // 下部境界から密度を計算
    rVal[0] = this.rho0;
    for(int i=1;i<this.s;i++){
        rVal[i] = this.rho0 * Math.exp(-integ[i] * this.mgk);
    }

    return rVal;
}

/**
 * 放射強度計算
 * @param rho : 密度高度分布
 * @return 放射強度分布
 */
double[] calRadiation(double[] rho){
    double[] integ = new double[this.s];
    double[] rVal = new double[this.s];

    // 放射は上部境界から入ってくるので積分を上部境界からしていく必要がある
    // 積分を実行するメソッドの関係上配列の順番を入れ替える
    rho = upsetArray(rho);
    integ = integration(rho);

    rVal[0] = this.Iinf;
    for(int i=1; i<this.s; i++){
        rVal[i] = this.Iinf * Math.exp( -integ[i] * this.sigma );
    }

    // 順番を入れ替えて計算したので元に戻す
    rVal = upsetArray(rVal);

    return rVal;
}

/**
 * 温度の高度分布を計算
 * @param t0 : 計算前の温度
 * @param rad : 太陽放射量高度分布
 * @return 計算された温度高度分布
 */
double[] calTemp(double[] t0, double[] rad){
    double[] rVal = new double[this.s];

    // 下部境界から順番に温度を計算
    rVal[0] = t0[0];
    for(int i=1; i<this.s; i++){

```

```

        rVal[i] = 1.0 / ( this.A * Math.sqrt(t0[i]) )
                * ( this.Iinf - rad[i] ) * this.def + rVal[i-1];
    }
    return rVal;
}

/**
 * 終了条件の判定.
 * 計算前の温度と計算後の温度の差の合計が condition 以下になったら false を返す
 * @param oldTemp : 計算前の温度
 * @param newTemp : 計算後の温度
 * @return 収束判定結果
 */
boolean check(double[] oldTemp, double[] newTemp, double condition){
    double def = 0.0;

    // 温度差の絶対値を足し合わせる
    for(int i=0; i<oldTemp.length; i++){
        def = Math.abs( newTemp[i] - oldTemp[i] );
    }

    // 条件の判定
    // 判定条件より小さければ false を返す = 計算終了
    if( def <= condition ){
        return false;
    }
    else{
        return true;
    }
}

/**
 * 値の逆数の配列を返す
 * @param f : 逆数をとられる配列
 * @return 逆数をとった配列
 */
public double[] inverse(double[] f){
    int s = f.length;
    double[] rVal = new double[s];

    for(int i=0; i<s; i++){
        rVal[i] = 1.0 / f[i];
    }
    return rVal;
}

/**
 * 配列の順序を入れ替える
 * @param f : 順番を入れ替えられる配列
 * @return 順番を入れ替えた配列
 */
public double[] upsetArray(double[] f){
    int s = f.length;
    int j = s-1;
    double[] rVal = new double[s];

```

```

    for(int i=0; i<s; i++){
        rVal[j] = f[i];
        j--;
    }
    return rVal;
}

/**
 * 台形近似を用いて積分を実行
 * 0 から z までの積分を z の関数とする
 * @param f : 被積分関数
 */
double[] integration(double[] f){
    int s = f.length;           // 配列の長さ
    double[] rVal = new double[s]; // 積分実行後の値

    rVal[0] = 0.0;             // 下部境界の値を設定

    // 積分後の i 番目の値を計算するために、被積分関数の
    // 0 から i までの値を用いて計算をする。それぞれの微
    // 小区間の積分を足し合わせる。
    for(int i=1; i<s; i++){

        for(int j=0; j<i; j++){
            rVal[i] = rVal[i] + ( f[j] + f[j+1] ) / 2.0 * this.def; // 台形で近似
        }

    }
    return rVal;
}

/**
 * ファイル出力
 * @param fileName : 出力ファイル名
 * @param data : 出力される温度データ
 */
void writeFile(String fileName, double[] data){
    try {
        DecimalFormat df1 = new DecimalFormat("###.0");
        double alt;
        PrintStream ps = new PrintStream(new FileOutputStream(fileName, false));
        for(int i=0; i<data.length; i++){
            alt = ( this.low + i * this.def ) / 1000.0; // km 単位で出力
            ps.println(df1.format(alt)+", "+data[i]); // 改行コードを含んだ文字列
        }
    }
    catch (Exception ex) {
        ex.printStackTrace(); // エラーの表示
    }
}

/**
 * メイン関数
 * プログラムはここから開始
 */
public static void main(String[] args) {

```

```
double low = 120000.0; // 下部境界の高度 (m)
double high = 600000.0; // 上部境界の高度 (m)
double def = 5000.0; // 計算間隔 (m)
// high - low が def の整数倍になっている必要がある. 計算はできる

double t = 300.0; // 下部境界での温度 (K)
double rho = 1.0e17; // 下部境界での数密度 (1/m^3)
double Iinf = 1.1e-3; // 上部境界での太陽入射 (W/m^3)

double[] res1;

// シミュレーション条件の設定
ThermosphereTemp tTemp = new ThermosphereTemp(low,high,def);

// 境界値設定および計算
res1 = tTemp.calculateTemp(t,rho,Iinf);

// 計算結果出力
tTemp.writeFile("dat.csv",res1);

}

}

--- プログラムここまで ---
```

5.8 Appendix 6 の温度分布に対して, (3.19) 式で与えられたように高度 120 km 以上の全位置エネルギー (熱と重力による) を計算せよ. この値を 8 時間で吸収される太陽エネルギーと比較せよ (太陽は天頂にあるものとする). そして, 外圏の日変化の振幅を大まかに見積り, その結果を図 5.4 と比較してみよ.

[解] 題意に従い, 単位断面積を持つ気柱の全位置エネルギー

$$E = c_p g^{-1} \int_0^{p_0} T dp \quad (3.19)$$

を計算する. Appendix 6 の数値を用いて, 後述のプログラム内 (1) で計算を行うと, $E = 130.4 \text{ J m}^{-2}$ を得る.

次にプログラム内 (2) によって, 8 時間で吸収される太陽エネルギーを計算する. 太陽が天頂にある場合, 大気上端に入射する太陽放射フラックスを I_∞ と置くと, 高度 120 km 以上で単位時間・単位面積に吸収されるエネルギーは

$$I_\infty - I_{120} = I_\infty \left[1 - \exp \left(- \int_{120}^{\infty} \sigma n(z) dz \right) \right] \quad (\text{P5.1})$$

と表される. ここで, σ は酸素原子の吸収断面積, $n(z)$ は数密度である. 酸素原子が吸収するのは波長 91 nm 以下の遠紫外域の太陽放射である. 訳書の付録 A.8 によると, 中心波長 115 nm の小波長領域における平均分光放射フラックス密度は $7 \times 10^{-6} \text{ W m}^{-2} \text{ nm}^{-1}$ である. 簡単のため, 波長 0 ~ 91 nm の分光放射フラックス密度を平均して $3.5 \times 10^{-6} \text{ W m}^{-2} \text{ nm}^{-1}$ と置くことにすれば (いい加減?), この波長帯の放射フラックスは $3.5 \times 10^{-6} \times 91 = 3.19 \times 10^{-4} \text{ W m}^{-2}$ となる. これを I_∞ に用いて, (P5.1) の積分をプログラム内 (2) で実行する. これにより, 単位面積に 8 時間で吸収されるエネルギーが 90 J m^{-2} と求まる.

前半で求めた全位置エネルギー E は日平均温度 T に, 後半の吸収されるエネルギーは温度の日変動幅 ΔT にそれぞれ対応する. この場合, $\Delta T/T \sim 0.7$ である (解答では 0.6). これは図 5.4 から読み取られる値 0.3 と比較し得る (らしい).

```

#!/usr/bin/perl -w
# prob0508.pl -- 問題 5.8

### データファイル読み込み #####
$i = 0;
while ($line = <>) {
    chomp $line;
    ($z[$i], $T[$i], $p[$i], $n[$i]) = split (/s+/, $line);
    ++$i;
}
#####

### (1) 全位置エネルギーの計算 #####
$c_p = 1005; # 乾燥空気の定圧比熱
$g = 9.807; # 重力加速度

@x = @p;
@f = @T;
$INT = &integrate(); # サブルーチン呼出

print "E_TOTAL=", $c_p / $g * $INT, "\n"; # (3.19) 式
#####

### (2) 吸収される太陽エネルギーの計算 #####
$I_0 = 3.5 * 91 * 10e-6; # 無限遠での放射フラックス
$sigma = 1.2e-21; # 酸素の吸収断面積

@x = @z;
@f = @n;
$INT = 1000 * &integrate(); # サブルーチン呼出
# km -> m

$ABSRP = $I_0 * (1 - exp($sigma * $INT)); # 単位時間の吸収
print "E_ABSRP=", $ABSRP * 3600 * 8, "\n"; # 8時間の合計
#####

### 積分サブルーチン #####
sub integrate
{
    $sum = 0;

    for ( $i=0 ; $i<14 ; ++$i) {
        $dx = $x[$i+1] - $x[$i]; # dx (短冊の幅) の計算
        $f_m = ($f[$i+1] + $f[$i]) / 2; # 隣り合う f の平均値
        $sum += $f_m * $dx; # 短冊の面積の和
    }
    return $sum;
}
#####

```

```
# データファイル prob0508_data.txt
# 高度 [km], 温度 [K], 圧力 [Pa], 数密度 [m^-3]

500 1037 4.2e-7 1.6564538056636394e14
450 1037 8.8e-7 3.154165347307618e14
400 1036 2.0e-6 6.03353115338637e14
350 1034 4.7e-6 1.1651886860401545e15
300 1027 1.2e-5 2.2945547329510625e15
250 1005 3.3e-5 4.70726560184406e15
200 938 1.0e-4 1.0597513899543776e16
190 912 1.3e-4 1.273385957861986e16
180 879 1.7e-4 1.54780277939406e16
170 837 2.3e-4 1.9096057564567392e16
160 783 3.2e-4 2.4033342978927904e16
150 715 4.6e-4 3.109785983715772e16
140 628 6.9e-4 4.1930949684782848e16
130 518 1.1e-3 6.0502586523636704e16
120 377 2.2e-3 1.0e17
```

5.9 (5.15) での D_ν の最大値を考え, (5.16) が得られた. 太陽が天頂にあり, $\nu = 210$ nm の場合, p_m の値を求めよ. ただし, この波数での O_2 一分子の吸収断面積は 10^{-23}cm^{-2} である.

[解]

$$D_\nu = \frac{F_\nu(\infty)M\beta_\nu g}{RT} \left(\frac{k_\nu c p \sec \theta}{g} \right) \exp \left(\frac{-k_\nu c p \sec \theta}{g} \right) \quad (5.15)$$

$$\frac{k_\nu c p_m \sec \theta}{g} = 1 \quad (5.16)$$

(5.16) より,

$$p_m = \frac{g}{k_\nu c \sec \theta} \quad (P5.2)$$

$g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$, $\theta = 0$. 吸収係数は一分子あたりの値から単位質量辺りの値へ変換して, $k_\nu = 10^{-23} \times (6.02 \times 10^{23})/0.032 \text{cm}^2 \text{kg}^{-1}$, また O_2 の相対質量濃度 c は等質圏では一定³とし, 地表での酸素の質量相対濃度, 0.239 をそのまま適用する.⁴ 以上を代入すると,

$$p_m = \frac{9.8[\text{ms}^{-2}]}{10^{-27} \times (6.02 \times 10^{23}/0.032)[\text{m}^2 \text{kg}^{-1}] \times 0.239} = 2174[\text{Pa}] \quad (P5.3)$$

が導出された.

[考察]

図 5.2 によると, 酸素原子存在数の極大は高度 120 km, 気圧にして 10^{-3} Pa のオーダーである. 今回導出された 2.2×10^3 Pa は高度にしておよそ 20 km, にあたる. この領域で酸素原子の数が少ないのは以下の理由が考えられるだろう.

- 酸素原子と酸素分子と第三体との化学反応 (5.18) によってオゾンとなる. 成層圏では, この反応は酸素分子の解離よりも速い. (cf §5.6)
- 今回考えた波長帯はオゾンのハートレー帯と重なっているため, オゾンが存在する高度以下では解離率が小さくなる.

³解離する分子が酸素分子と比べて無視できる程小さいと仮定したことになる. 実際大気の 20% が O_2 であることを考えるとこの仮定を用いても差し支えないだろう.

⁴地表付近の酸素体積率は, 0.20917. よって質量相対濃度は

$$c = \frac{0.0320 \times 0.20917}{0.0228 \times 1.00000} = 0.239$$

5.10 定温の大気を仮定し、式 (5.15) が高度 z によって以下のように表されることを示せ。

$$\frac{D_\nu}{D_\nu(\max)} = \exp\left\{1 - \left(\frac{z - z_m}{H}\right) - \exp\left[-\left(\frac{z - z_m}{H}\right)\right]\right\}$$

ここで z_m は $D_\nu = D_\nu(\max)$ となる高さで、 H はスケールハイトである。

[解] 式 (5.15) は以下のようにになっている。

$$D_\nu = \frac{F_\nu(\infty)M\beta_\nu g}{RT} \left(\frac{k_\nu c p \sec \theta}{g}\right) \exp\left(\frac{-k_\nu c p \sec \theta}{g}\right)$$

ここで、 D_ν は解離率、 $F_\nu(\infty)$ は高さ ∞ で単位面積あたりに入射してくる太陽放射強度、 M は平均分子量、 β_ν は効率因子、 θ は入射する太陽放射の天頂角、 k_ν は酸素分子の波数 ν における吸収係数、 c は酸素分子の混合率、 ρ は高度 z における大気密度、 g は重力加速度、 R は気体定数、 T は大気温度 (一定) である。

圧力 p で書かれている式 (5.15) を、高度 z で書くために、 p を z で表してみる。状態方程式 $\rho = \frac{Mp}{RT}$ とスケールハイト $H = \frac{RT}{Mg}$ より、静水圧平衡の式 $dp = -\rho g dz$ は以下のように表せる。

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dz}{H} \quad (\text{P5.4})$$

高度 z_m での圧力を p_m として z_m から z まで積分して

$$p = p_m \exp\left\{-\int_{z_m}^z \frac{dz}{H}\right\} \quad (\text{P5.5})$$

式 (5.16) より、 $\frac{k_\nu c p_m \sec \theta}{g} = 1$ であるので、式 (P5.5) は以下のようになる。

$$p = \frac{g}{k_\nu c \sec \theta} \exp\left\{-\frac{z - z_m}{H}\right\} \quad (\text{P5.6})$$

圧力を p を高度 z で表すことができた。式 (5.15) に代入して

$$D_\nu = \frac{F_\nu(\infty)M\beta_\nu g}{RT} \exp\left\{-\frac{z - z_m}{H}\right\} \exp\left[-\exp\left\{-\frac{z - z_m}{H}\right\}\right] \quad (\text{P5.7})$$

となる。 $D_\nu(\max)$ は $\frac{k_\nu c p_m \sec \theta}{g} = 1$ より

$$D_\nu(\max) = \frac{F_\nu(\infty)M\beta_\nu g}{RT} \exp(-1) \quad (\text{P5.8})$$

以上より、 $\frac{D_\nu}{D_\nu(\max)}$ は以下のようになる。

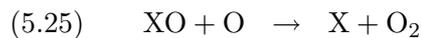
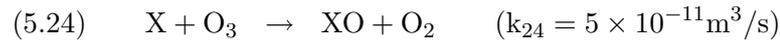
$$\frac{D_\nu}{D_\nu(\max)} = \exp\left\{1 - \left(\frac{z - z_m}{H}\right) - \exp\left[-\left(\frac{z - z_m}{H}\right)\right]\right\}$$

これで問題文で与えられた式を示すことができた。

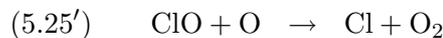
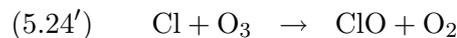
- 5.11 高度 40km において 2 つのオゾンの消失機構の効果 (消失率) を比較しなさい。ひとつは $X = \text{Cl}$ であるときの (5.24), (5.25) 式の触媒反応機構, もう一方は (5.19) 式の機構である。このとき, ClO の濃度を 10^8cm^{-3} , (5.24) 式で $X = \text{Cl}$ としたときの反応係数を $5 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{s}^{-1}$ とし, それ以外は問題 5.13 より値を引用せよ。

[解]

問題 5.13 より $k_3 = 10^{-15} \text{cm}^3/\text{s}$, $J_2 = 10^{-9.4} \text{s}^{-1}$ を引用する。



$X = \text{Cl}$ とすると (5.24)(5.25) 式は,



オゾンの消失機構は次のように表せる。消失ということで符号はマイナスとした。

$$\frac{\partial n_3}{\partial t} = -k_3 n_1 n_3 - k_{24} n_{\text{Cl}} n_3$$

2 機構の効果を比較するためには, 反応係数 (k) と濃度の積であるこの右辺第一項と第二項を比較すればよい。

n_1 は (5.22) 式より, $n_1 = \frac{J_2 n_2}{k_3 n_3}$. n_2, n_3 は理科年表より, それぞれ $1 \times 10^{22} \text{m}^{-3}$, $5 \times 10^{17} \text{m}^{-3}$. したがって 2 項の比は,

$$\frac{k_3 n_1 n_3}{k_{24} n_{\text{Cl}} n_3} = \frac{k_3}{k_{24} n_{\text{Cl}}} n_1 = \frac{k_3}{k_{24} n_{\text{Cl}}} \frac{J_2 n_2}{k_3 n_3}$$

これを解くためには, Cl の濃度が与えられる必要があるが本文では問題としてこの値は与えられていない。⁵ また, 同時に k_{25} の情報が与えられれば化学反応 (4.24) および (4.25) に定常状態近似法⁶ 用い, Cl の濃度を導くことができる。

この場合, n_{Cl} には触媒反応によってできた ClO の消失機構 (5.25') 式より $n_{\text{Cl}} = k_{25}/k_{24} n_{\text{ClO}}$ を代入し,

$$\begin{aligned} \frac{k_3 n_1 n_3}{k_{24} n_{\text{Cl}} n_3} &= \frac{k_3 n_1}{k_{24}} \frac{k_{24}}{k_{25} n_{\text{ClO}}} \\ &= \frac{k_3 n_1}{k_{25} n_{\text{ClO}}}. \end{aligned}$$

これで全項に値を代入できるので 2 項の効果を比較できる。

以上のように, 与えられた条件 (n_{Cl} もしくは k_{25}) が不足しており, 2 つのオゾンの消失機構の消失率は比較できない。

⁵ Cl ではなく ClO の誤植かとも考えたが, この場合, 巻末解とは 7 オーダも値がずれていたため, 誤植ではないだろう

⁶ 中間生成物である ClO の濃度は定常で変化しないとみなす。このとき, $n_{\text{Cl}} = k_{25}/k_{24} n_{\text{ClO}}$ とすることが出来る (慶伊富長著, 反応速度論, 東京化学同人, P31)

- 5.12 §5.6 で述べた Breuer-Dobson 循環によって、成層圏では水蒸気がほとんど含まれないことも説明した。空気はいつも熱帯の対流圏を通して成層圏に入ってくると仮定し、appendix 2 と 5 から成層圏での水蒸気の混合比はどれくらいになると予想できるか見積もれ。

[解]

対流圏界面の高度での大気圧をおよそ 10 KPa とすると appendix 5 から大気の色度はおよそ 196 K である。このとき、appendix 2 より飽和水蒸気圧は 8.894×10^{-2} Pa である。したがって、体積混合率 m は

$$\begin{aligned} m &= \frac{p_{\text{vap}}}{p_{\text{air}}} = \frac{8.894 \times 10^{-2}}{10 \times 10^3} \\ &= 8.894 \times 10^{-6} \end{aligned} \quad (\text{P5.9})$$

となる。

5.13 (1) §5.6 で述べられたようなオゾンの平衡に関して、2つの非常に異なった時定数が存在する。1つ目はOとO₃の相対量の変化に関係するもので、OとO₃を合わせた数密度が一定になるように決められている。2つ目はOとO₃を合わせた量の変化に関係するもので、その変化の間のOとO₃の比は(5.21)⁷で与えられる。この2つの近似を用いた際の、(a)OとO₃の相対量、(b)OとO₃を合わせた量、の変化に関する微分方程式を導き、2つの時定数に関する式を導け。

(2) $k_2 = 10^{-33} \text{ cm}^6 \text{ s}^{-1}$, $k_3 = 10^{-15} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ とし、高度がそれぞれ 40 km, 30 km, 20 km の場合の値を計算せよ。 J_2 と J_3 と n_3 の値は図 5.5 と図 5.6 から求めよ。

なお下層においては、2つ目の時定数は非常に長いため、オゾンの混合比は大気の運動に関する非常に良い「トレーサー」となる。

[解]

(1) §5.6 の時の表記をそのまま引継ぎ、 n_1, n_2, n_3, n_M をそれぞれ O, O₂, O₃, そして全分子の数密度とし、また k_1, k_2, k_3 を (5.17), (5.18), (5.19) での反応率、 J_2, J_3 を (5.12), (5.20) での解離率とする⁸。

式 (5.12), (5.17) ~ (5.20) より、 n_1 と n_3 の変化の式は以下のように表される (ただし、 k_1 は成層圏では無視できるほど小さいので、以下では省略している)。

$$\frac{dn_1}{dt} = 2J_2n_2 - k_2n_1n_2n_M - k_3n_1n_3 + J_3n_3. \quad (\text{P5.10})$$

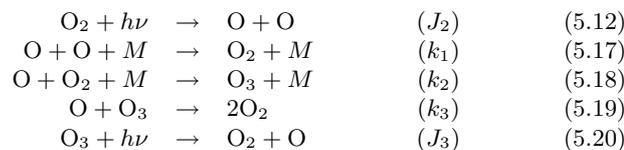
$$\frac{dn_3}{dt} = k_2n_1n_2n_M - k_3n_1n_3 - J_3n_3. \quad (\text{P5.11})$$

時定数とは、ある状態から別の平衡状態になるまでに要する時間である。まずは、平衡状態を考え、 $dn_1/dt = 0$, $dn_3/dt = 0$ とする。そして、この状態から、(P5.10) では $n_1 \rightarrow n_1 + \Delta n_1$ とし、(P5.11) では $n_3 \rightarrow n_3 + \Delta n_3$ とする。すると、以下の関係式が

7

$$J_3n_3 = k_2n_2n_1n_M \quad (5.21)$$

8



成り立つことになる.

$$\begin{aligned} \frac{d(n_1 + \Delta n_1)}{dt} - \frac{dn_1}{dt} &= 2J_2 n_2 - k_2(n_1 + \Delta n_1)n_2 n_M - k_3(n_1 + \Delta n_1)n_3 + J_3 n_3 \\ &\quad - \{2J_2 n_2 - k_2 n_1 n_2 n_M - k_3 n_1 n_3 + J_3 n_3\}, \\ \frac{d\Delta n_1}{dt} &= -k_2 \Delta n_1 n_2 n_M - k_3 \Delta n_1 n_3. \end{aligned} \quad (\text{P5.12})$$

$$\begin{aligned} \frac{d(n_3 + \Delta n_3)}{dt} - \frac{dn_3}{dt} &= k_2 n_1 n_2 n_M - k_3 n_1(n_3 + \Delta n_3) - J_3(n_3 + \Delta n_3) \\ &\quad - \{k_2 n_1 n_2 n_M - k_3 n_1 n_3 - J_3 n_3\}, \\ \frac{d\Delta n_3}{dt} &= -k_3 n_1 \Delta n_3 - J_3 \Delta n_3. \end{aligned} \quad (\text{P5.13})$$

以下ではこれらの関係式を用いて, 2 つの時定数を導く.

(a) O と O₃ の変化量をそれぞれ Δn_1 , Δn_3 とすると, O と O₃ の相対量の変化は $\Delta n_1/\Delta n_3$ で表される⁹. 初期変位をそれぞれ Δn_{10} , Δn_{30} とおくと, 相対量の変化量の時定数 τ_r は以下の式で表される (§2.4 と, §2.5 の最後の「時定数の導出」を参照のこと).

$$\frac{\Delta n_1}{\Delta n_3} = \frac{\Delta n_{10}}{\Delta n_{30}} \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right). \quad (\text{P5.14})$$

t は時間である.

まず, (P5.12) と (P5.13) を以下のように整理する.

$$\frac{1}{\Delta n_1} \frac{d\Delta n_1}{dt} = -k_2 n_2 n_M - k_3 n_3. \quad (\text{P5.15})$$

$$\frac{1}{\Delta n_3} \frac{d\Delta n_3}{dt} = -J_3 - k_3 n_1. \quad (\text{P5.16})$$

(P5.15) から (P5.16) を引くと,

$$\frac{1}{\Delta n_1} \frac{d\Delta n_1}{dt} - \frac{1}{\Delta n_3} \frac{d\Delta n_3}{dt} = -k_2 n_2 n_M + J_3 - k_3 n_3 + k_3 n_1 \quad (\text{P5.17})$$

⁹これは間違いである. 本当は, 相対量の変化は

$$\left(\frac{n_1 + \Delta n_1}{n_3 + \Delta n_3} - \frac{n_1}{n_3}\right)$$

と表されるべきであり,

$$\left(\frac{n_1 + \Delta n_1}{n_3 + \Delta n_3} - \frac{n_1}{n_3}\right) = \left(\frac{n_1 + \Delta n_{10}}{n_3 + \Delta n_{30}} - \frac{n_1}{n_3}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right).$$

が求めるべき時定数の式である. ちゃんとこれを解くべきだが, どうにもうまく解けない. これは担当者 (森川) の力不足が原因である (...と思う. たぶん). 大変申し訳ありません... m(_ _)m.

となる. この式の各項を積分する. 初期状態 $t = 0$ での n_1 と n_3 はそれぞれ Δn_{10} , Δn_{30} としたので,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta n_{10}}^{\Delta n_1} \frac{d\Delta n_1}{\Delta n_1} - \int_{\Delta n_{30}}^{\Delta n_3} \frac{d\Delta n_3}{\Delta n_3} &= \int_0^t (-k_2 n_2 n_M + J_3 - k_3 n_3 + k_3 n_1) dt \\ [\ln \Delta n_1]_{\Delta n_{10}}^{\Delta n_1} - [\ln \Delta n_3]_{\Delta n_{30}}^{\Delta n_3} &= (-k_2 n_2 n_M + J_3 - k_3 n_3 + k_3 n_1) t \\ \ln \left(\frac{\Delta n_1}{\Delta n_3} \frac{\Delta n_{30}}{\Delta n_{10}} \right) &= (-k_2 n_2 n_M + J_3 - k_3 n_3 + k_3 n_1) t \\ \frac{\Delta n_1}{\Delta n_3} &= \frac{\Delta n_{10}}{\Delta n_{30}} \exp \left\{ -\frac{t}{(-J_3 + k_2 n_2 n_M + k_3 n_3 - k_3 n_1)^{-1}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{P5.18})$$

となる. これを (P5.14) と見比べると, 時定数 τ_r は

$$\begin{aligned} \tau_r &= (-J_3 + k_2 n_2 n_M + k_3 n_3 - k_3 n_1)^{-1} \\ &\simeq (-J_3 + k_2 n_2 n_M)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{P5.19})$$

となる. (k_3 は J_3 や k_2 に比べて小さいので, 落した).

なお, 巻末の解答は

$$(J_3 + k_2 n_2 n_M)^{-1} \quad (\text{P5.20})$$

となっている. 微妙に違うなあ....

(b) O と O₃ を合わせた量の変化は $\Delta n_1 + \Delta n_3$ で表される. 初期変位をそれぞれ Δn_{10} , Δn_{30} とおくと, 合わせた量の変化量の時定数 τ_s は以下の式で表される.

$$\Delta n_1 + \Delta n_3 = (\Delta n_{10} + \Delta n_{30}) \exp \left(-\frac{t}{\tau_s} \right). \quad (\text{P5.21})$$

まず, (P5.12) と (P5.13) を足し合わせる.

$$\frac{d(\Delta n_1 + \Delta n_3)}{dt} = -k_2 \Delta n_1 n_2 n_M - J_3 \Delta n_3 - k_3 \Delta n_1 n_3 - k_3 n_1 \Delta n_3 \quad (\text{P5.22})$$

問題文より n_1 と n_3 の比は (5.21) で与えられるので, 以下の関係式が成り立つ.

$$J_3 \Delta n_3 = k_2 n_2 \Delta n_1 n_M \quad (\text{P5.23})$$

よって (P5.22) の右辺の第 1 項, 第 2 項は相殺して消滅する. さらに, (5.23) と (5.21) から以下の式を導入する.

$$n_3 = n_2 \left(\frac{J_2 k_2 n_M}{J_3 k_3} \right)^{1/2} \quad (5.23).$$

$$n_1 = \left(\frac{J_2 J_3}{k_2 k_3 n_M} \right)^{1/2}. \quad (\text{P5.24})$$

これらを, (P5.22) に代入すると,

$$\frac{d(\Delta n_1 + \Delta n_3)}{dt} = -k_3 \left\{ \Delta n_1 n_2 \left(\frac{J_2 k_2 n_M}{J_3 k_3} \right)^{1/2} + \Delta n_3 \left(\frac{J_2 J_3}{k_2 k_3 n_M} \right)^{1/2} \right\} \quad (\text{P5.25})$$

となる. さらに, Δn_3 に (P5.23) を代入することで,

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta n_1 + \Delta n_3)}{dt} &= -k_3 \left\{ \Delta n_1 n_2 \left(\frac{J_2 k_2 n_M}{J_3 k_3} \right)^{1/2} + \Delta n_1 n_2 \frac{k_2 n_M}{J_3} \left(\frac{J_2 J_3}{k_2 k_3 n_M} \right)^{1/2} \right\} \\ &= -2\Delta n_1 n_2 \left(\frac{J_2 k_2 k_3 n_M}{J_3} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{P5.26})$$

となる. (P5.23) より, $\Delta n_1 + \Delta n_3$ は以下のように Δn_1 だけで表現できる.

$$\begin{aligned} \Delta n_1 + \Delta n_3 &= \Delta n_1 + \frac{k_2 n_2 n_M}{J_3} \Delta n_1 \\ &= \Delta n_1 \left(1 + \frac{k_2 n_2 n_M}{J_3} \right) \\ \Delta n_1 &= \frac{\Delta n_1 + \Delta n_3}{\left(1 + \frac{k_2 n_2 n_M}{J_3} \right)} \\ &= J_3 \frac{\Delta n_1 + \Delta n_3}{J_3 + k_2 n_2 n_M}. \end{aligned} \quad (\text{P5.27})$$

(P5.27) を (P5.26) に代入すると,

$$\frac{d(\Delta n_1 + \Delta n_3)}{dt} = -(\Delta n_1 + \Delta n_3) \times 2n_2 \frac{(J_2 J_3 k_2 k_3 n_M)^{1/2}}{J_3 + k_2 n_2 n_M} \quad (\text{P5.28})$$

となる. これを (P5.21) の形まで変形して良く.

$$\begin{aligned} \int_{\Delta n_{10} + \Delta n_{30}}^{\Delta n_1 + \Delta n_3} \frac{d(\Delta n_1 + \Delta n_3)}{\Delta n_1 + \Delta n_3} &= - \int_0^t 2n_2 \frac{(J_2 J_3 k_2 k_3 n_M)^{1/2}}{J_3 + k_2 n_2 n_M} dt \\ [\ln(\Delta n_1 + \Delta n_3)]_{\Delta n_{10} + \Delta n_{30}}^{\Delta n_1 + \Delta n_3} &= - \left[2n_2 \frac{(J_2 J_3 k_2 k_3 n_M)^{1/2}}{J_3 + k_2 n_2 n_M} t \right]_0^t \\ \ln \left(\frac{\Delta n_1 + \Delta n_3}{\Delta n_{10} + \Delta n_{30}} \right) &= -2n_2 \frac{(J_2 J_3 k_2 k_3 n_M)^{1/2}}{J_3 + k_2 n_2 n_M} t \\ \Delta n_1 + \Delta n_3 &= (\Delta n_{10} + \Delta n_{30}) \exp \left\{ - \frac{t}{\frac{J_3 + k_2 n_2 n_M}{2n_2 (J_2 J_3 k_2 k_3 n_M)^{1/2}}} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{P5.29})$$

(P5.21) と対応させてみると, 合わせた量の時定数は τ_s は

$$\tau_s = \frac{J_3 + k_2 n_2 n_M}{2n_2 (J_2 J_3 k_2 k_3 n_M)^{1/2}} \quad (\text{P5.30})$$

となる. なお, 巻末の解答は

$$\frac{J_3 + k_2 n_2 n_M}{4n_2 (J_2 J_3 k_2 k_3 n_M)^{1/2}} \quad (\text{P5.31})$$

である. ファクター 2 が消えているが...?

(2) 問題文より $k_2 = 10^{-33} \text{ cm}^6 \text{ s}^{-1}$, $k_3 = 10^{-15} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ であり, 図 5.5, 図 5.6 より, 40 km, 30 km, 20 km での J_2 , J_3 , および O_3 の分圧 p_{n_3} は表 P5.2 のようになる. また, n_3 と n_M を知るために必要な各高度の大気的全圧 p と密度 ρ も表 P5.2 に示してある (値に関しては理科年表 2003 を参照した)¹⁰. n_M は巻末の Appendix

表 P5.2: 各高度での解離率, O_3 の分圧, 大気全圧, 大気の密度.

| | J_2 | J_3 | p_{n_3} | p | ρ |
|-------|-----------------------------|----------------------------|-----------|-------------------------------|--|
| 40 km | $10^{-9.4} \text{ s}^{-1}$ | $10^{-2.8} \text{ s}^{-1}$ | 0.003 Pa | $2.87 \times 10^2 \text{ Pa}$ | $4.00 \times 10^{-9} \text{ kg cm}^{-3}$ |
| 30 km | $10^{-10.5} \text{ s}^{-1}$ | $10^{-3.2} \text{ s}^{-1}$ | 0.009 Pa | $1.20 \times 10^3 \text{ Pa}$ | $1.84 \times 10^{-8} \text{ kg cm}^{-3}$ |
| 20 km | 10^{-13} s^{-1} | $10^{-3.4} \text{ s}^{-1}$ | 0.013 Pa | $5.53 \times 10^3 \text{ Pa}$ | $8.89 \times 10^{-8} \text{ kg cm}^{-3}$ |

A.1 の乾燥大気のみかけの分子量 $M = 28.964$ と, アボガドロ数 $N_a = 6.022 \times 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$, そして大気の密度 ρ (表 P5.2 参照) より,

$$n_M = \frac{\rho N_a}{M} \quad (\text{P5.32})$$

となる. n_3 は, 今求めた n_M , そして p_{n_3} と全圧 p (表 P5.2 参照) から

$$n_3 = \frac{p_{n_3}}{p} \times n_M \quad (\text{P5.33})$$

として求める. n_2 は関係式 (5.23) から得ることができる. 結果として, 1 つめの時定数, 2 つめの時定数はそれぞれ表 P5.3 のようになる. (なお, 計算には巻末に書いてある正しい (?) 答えの式を用いた).

表 P5.3: 1 つめの時定数と 2 つめの時定数の計算結果

| | 1 つめの時定数 | 2 つめの時定数 |
|-------|---------------------------------|------------------------------|
| 40 km | 1.99 s | $9.11 \times 10^4 \text{ s}$ |
| 30 km | $1.26 \times 10^{-1} \text{ s}$ | $1.09 \times 10^6 \text{ s}$ |
| 20 km | $2.68 \times 10^{-3} \text{ s}$ | $5.39 \times 10^7 \text{ s}$ |

1 つめの時定数は高度が上がるにつれ長く, 2 つめの時定数は逆に短くなっていることが分かる. また (少なくとも 20 km ~ 40 km の間では), 1 つめの時定数に比べ, 2 つめの時定数の方が非常に大きいことも分かる.

¹⁰(余談) 圧力に関しては『The Physics of Atmospheres 3rd Edition』に載っているのだが, 密度に関して載っていないだったので, いっそのこと全部理科年表を参照した.

これが何によるのか要考察ですが..., (良く分かりませんでした...).

なお, 巻末の解答は表 P5.4 の通り.

表 P5.4: 巻末の解答

| | 1 つめの時定数 | 2 つめの時定数 |
|-------|-------------------------|----------------------|
| 40 km | 0.76 s | 1.60×10^5 s |
| 30 km | 5.00×10^{-2} s | 1.30×10^6 s |
| 20 km | 2.00×10^{-3} s | 1.30×10^7 s |

以下は計算に用いたスクリプト (必要ないけど一応).

```
#!/usr/bin/ruby
#
# 以下の教科書の Problem 5.13 の計算を行なうスクリプト
#
# Houghton, J. T., 2002:
#   The Physics of Atmospheres, Third Edition.
#   Cambridge Univ. Press. 320pp.
#
# 詳細表示
Detail = nil      # オフ
#Detail = 1      # オン

#####
## 初期設定
# 乾燥大気平均分子量
M = 28.964
# アボガドロ数 (/kmol)
Na = 6.022*10**26
# 反応率
K2 = 10.0**(-33)
K3 = 10.0**(-15)
# 各高度
Alt = ["40", "30", "20"]
# 各高度での解離率
J2 = {"40" => 10**(-9.4), "30" => 10**(-10.5), "20" => 10**(-13)}
J3 = {"40" => 10**(-2.8), "30" => 10**(-3.2), "20" => 10**(-3.4)}
# 各高度での大気密度 (kg/cm^3)
Rho = {"40" => 4.0*10**(-9), "30" => 1.84*10**(-8), "20" => 8.89*10**(-8)}
# 各高度での大気全圧 (Pa)
P = {"40" => 2.87*10**(-2), "30" => 1.20*10**(-3), "20" => 5.53*10**(-3)}
# 各高度でのオゾンの分圧 (Pa)
Pn3 = {"40" => 0.003, "30" => 0.009, "20" => 0.013}

#####
## 1 つ目の時定数の導出
print "====1 つ目の時定数の導出==== \n"
Alt.each{|n|
  print " =高度: ", n, " km==\n"
  # 密度から数密度を求める
  nM = (Rho[n]*Na)/M
  print "  -大気の数密度: ", nM, " cm^(-3). \n" if Detail
  # 分圧から O3 の数密度を求める
  n3=(Pn3[n]/P[n]) * nM
  print "  -O3 の数密度: ", n3, " cm^(-3). \n" if Detail
  # 関係式 (5.23) から O2 の数密度を求める
  n2=n3*((J3[n]*K3)/(J2[n]*K2*nM))**(0.5)
  print "  -O2 の数密度: ", n2, " cm^(-3). \n" if Detail

  t_r = 1.0/(J3[n] + K2*n2*nM)
  print " 1 つ目の時定数 の結果 = ", t_r, " s\n"
}

#####
## 2 つ目の時定数の導出
print "====2 つ目の時定数の導出==== \n"
Alt.each{|n|
  print " =高度: ", n, " km==\n"
  # 密度から数密度を求める
  nM = (Rho[n]*Na)/M
  print "  -大気の数密度: ", nM, " cm^(-3). \n" if Detail
  # 分圧から O3 の数密度を求める
  n3=(Pn3[n]/P[n]) * nM
  print "  -O3 の数密度: ", n3, " cm^(-3). \n" if Detail
  # 関係式 (5.23) から O2 の数密度を求める
```

```
n2=n3*((J3[n]*K3)/(J2[n]*K2*nM)**(0.5))
print "  -02 の数密度: ", n2, " cm(-3). \n" if Detail

t_s = (J3[n] + K2*n2*nM)/(4*n2*(J2[n]*J3[n]*K2*K3*nM)**(0.5))
print "  2 つ目の時定数の結果 = ", t_s, " s\n"
}
exit 0
```

出力結果は以下の通り.

```
====1 つ目の時定数の導出====
=高度: 40 km==
  1 つ目の時定数の結果 = 1.992844764 s
=高度: 30 km==
  1 つ目の時定数の結果 = 0.1261403748 s
=高度: 20 km==
  1 つ目の時定数の結果 = 0.002682905372 s
====2 つ目の時定数の導出====
=高度: 40 km==
  2 つ目の時定数の結果 = 91051.05389 s
=高度: 30 km==
  2 つ目の時定数の結果 = 1094774.298 s
=高度: 20 km==
  2 つ目の時定数の結果 = 53868199.42 s
```

5.14 OH の大気光の測定によると、中間圏界面あたりの高さの 1 cm^2 の大気柱から、 $1 \mu\text{m}$ から $3 \mu\text{m}$ の間の波長の光子が 10^{12} 個 s^{-1} ほど放出せられている。その放出が高度 75 km から 95 km までの領域にわたって一様に広がっていると仮定して、この放射による冷却率を K day^{-1} の単位で見積もれ。

[解]

波長 λ の光子のエネルギーは $\frac{hc}{\lambda}$ である (h はプランク定数、 c は光速)。

光子がエネルギーを放出することによって大気を冷やすとすると、 75 km から 95 km にわたる大気柱における熱収支は、

$$MC_p \frac{dT}{dt} = -n \frac{hc}{\lambda} \quad (\text{P5.1})$$

で表現できる。

ここで、 M は大気柱内部の大気質量、 C_p は定圧比熱、 T は大気柱の (平均) 温度、 n は光子の個数 ($= 10^{12}$ 個) とおいた。

よって、温度変化 dT は、

$$dT = -\frac{nhcdt}{\lambda MC_p} \quad (\text{P5.2})$$

となるので、(P5.2) に各値を代入すればよいが、大気柱の質量 M については、 80 km と 90 km の密度を用いて、

$$M = \frac{\rho_{80} + \rho_{90}}{2} \times (20 \times 10^3) \times 10^{-4} \text{ kg} \quad (\text{P5.3})$$

と近似する。ただし、

$$\rho_{80} = 1.8458 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-3} \quad (80\text{km})$$

$$\rho_{90} = 3.416 \times 10^{-6} \text{ kg m}^{-3} \quad (90\text{km})$$

とする (理科年表より)。

また λ については、すべての光子が $\lambda = 2 \times 10^{-6} \text{ m}$ であると近似する。

その他の値については、 $h = 6.6262 \times 10^{-34} \text{ J s}$, $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$, $C_p = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $dt = 60 \times 60 \times 24 \text{ s}$ を代入する。すると $dT = -0.39 \text{ K day}^{-1}$ を得る。つまり冷却率は 0.39 K day^{-1} である¹¹。

巻末の解答では 0.4 K day^{-1} となっている。

¹¹この解答では 75 km から 95 km までの大気平均の冷却率を求めたことになる。

- 5.15 ある高度 z から大気上端までの光路長に対する吸収帯の等価幅が W のとき, (5.40) 中の $\bar{\tau}_\nu^*$ が以下の形で与えられることを示せ. ただし, 吸収の光路長は $u = \left| \int_z^{\infty} c\rho dz \right|$ である¹².

$$\bar{\tau}_\nu^* = \frac{1}{S} \frac{dW}{du}, \quad (\text{P5.34})$$

ここで S は吸収帯の強度である.

さらに, 混合比一定の気体の吸収帯で, その吸収線が弱吸収近似か強吸収近似にある非重合の衝突幅を持つ吸収線であれば, 高度 z から射出された光子が宇宙空間へ逃れていく確率は高度に無関係であることを示せ.

[解]

まず初めに吸収係数 k_ν の定義を確認する. 5.7 節における k_ν の定義は 1 分子あたりの吸収係数である. 一方で 5.6 節以前の k_ν の定義は質量あたりの吸収係数である. 前者を $k_{\nu\text{-質量}}$ とし, 後者を $k_{\nu\text{-分子}}$ と表す. このとき, $\tau_\nu^*(z, \infty)$ の定義もそれに伴って変化し,

$$\begin{aligned} \tau_\nu^*(z, \infty) &= \exp\left(-\int_z^\infty \frac{5}{3} k_{\nu\text{-質量}} c\rho dz'\right) \\ &= \exp\left(-\int_z^\infty \frac{5}{3} k_{\nu\text{-分子}} n dz'\right) \end{aligned}$$

と書ける. これらを用いると, (5.40), (5.38) より $\bar{\tau}_\nu^*$ は

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_\nu^* &= \frac{1}{S} \int_{\Delta\nu} k_\nu \tau_\nu^*(z, \infty) d\nu \quad (5.40) \\ &= \frac{1}{S} \int_{\Delta\nu} k_{\nu\text{-分子}} \exp\left(-\int_z^\infty \frac{5}{3} k_{\nu\text{-分子}} n dz'\right) d\nu \\ &= \frac{1}{S} \int_{\Delta\nu} k_{\nu\text{-質量}} \exp\left(-\int_z^\infty \frac{5}{3} k_{\nu\text{-質量}} c\rho dz'\right) d\nu \\ &= \frac{1}{S} \int_{\Delta\nu} k_{\nu\text{-質量}} (\exp(-k_{\nu\text{-質量}} u)) d\nu \quad (\text{P5.35}) \end{aligned}$$

と書ける.

一方 W は (4.9) より

$$\begin{aligned} W &= \int_{\Delta\nu} (1 - \tau_\nu^*) d\nu \\ &= \int_{\Delta\nu} \left(1 - \exp\left(-\int_z^\infty \frac{5}{3} k_{\nu\text{-質量}} c\rho dz'\right)\right) d\nu \\ &= \int_{\Delta\nu} (1 - \exp(-k_{\nu\text{-質量}} u)) d\nu. \quad (\text{P5.3}) \end{aligned}$$

¹²ここで c はある気体の混合比, ρ は大気密度である. よって $c\rho$ は大気中に含まれるある気体の密度である.

(P5.3) を用いると,

$$\frac{1}{S} \frac{dW}{du} = \frac{1}{S} \int_{\Delta\nu} k_{\nu-\text{質量}} (\exp(-k_{\nu-\text{質量}} u) d\nu. \quad (\text{P5.4})$$

よって, $\bar{\tau}_\nu^*$ は (P5.1) で与えられる.

次いで, 光子の脱出確率 $\bar{\tau}_\nu^*$ の高度非依存性を示す. 弱吸収近似の場合, W は (4.13) より

$$W = \frac{3s}{5} u$$

と書ける. よって (P5.1) より

$$\bar{\tau}_\nu^* = \frac{3}{5S} s \quad (\text{P5.36})$$

と書ける. 以上より $\bar{\tau}_\nu^*$ は高度に依存しないといえる.

一方強吸収近似の場合の W は (4.16) より

$$W = 2 \left\{ \frac{s\gamma_0 c}{2gp_0} (p_1^2 - p_2^2) \right\}^{1/2} \quad (\text{4.16})$$

$$= 2 \left\{ \frac{s\gamma_0 c}{2gp_0} \right\}^{1/2} p \quad (\text{P5.37})$$

と書ける. ここで p はある高度 z における大気圧である. 静水圧平衡の式を変形して

$$\begin{aligned} p &= \frac{g}{c} \int c\rho dz \\ &= \frac{3g}{5c} u \end{aligned}$$

であることから, (P5.1) に (P5.4) を代入すると

$$\bar{\tau}_\nu^* = 2 \left\{ \frac{s\gamma_0 c}{2gp_0} \right\}^{1/2} \frac{3g}{S5c}$$

を得る. よって強吸収近似の場合も, $\bar{\tau}_\nu^*$ は高度に依存しないことが示された.

- 5.16 $15 \mu\text{m}$ の二酸化炭素の吸収帯からのフォトンの $\bar{\tau}_\nu^*$ の値を計算せよ。尚、吸収線は重合がなく $\Sigma(S_i\gamma_{0i})^{1/2} = 1600 \text{ cm}^{-1}(\text{gcm}^{-2})^{-1/2}$, $S = \Sigma S_i = 1.26 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}(\text{gcm}^{-2})^{-1}$ で与えられる強吸収近似を適応し、さらに二酸化炭素の質量混合比 $= 5.5 \times 10^{-4}$ とする。

[解]

(4.11) 式より吸収線の強吸収近似での等価幅 W は

$$W = 2(s\gamma\rho l)^{1/2}$$

である。ただし s は吸収線の強度, γ は半値幅, ρ は吸収気体の密度, l は経路長である。この式は ρ 一定として求められた。

高度 z について ρ が変化する場合について書き換える (復習)。 z_1 から z_2 までの透過率 $\tau_\nu(z_1, z_2)$ は (4.19) 式より,

$$\tau_\nu(z_1, z_2) = \exp\left(-\int_{z_1}^{z_2} k_\nu \rho dz'\right)$$

k_ν が z に依存せずまた, CO_2 の質量混合比 c とすれば, CO_2 による吸収の透過率は

$$\begin{aligned} \tau_\nu(z_1, z_2) &= \exp\left(-k_\nu \int_{z_1}^{z_2} c\rho dz'\right) \\ &= \exp(-k_\nu u) \end{aligned} \quad (\text{P5.38})$$

ここで $u = \int_{z_1}^{z_2} c\rho dz'$ とおいた。これより等価幅 W は (4.9) 式より

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty d\bar{\nu}(1 - \tau_\nu) \\ &= \int_0^\infty 1 - \exp(-k_\nu u) \end{aligned} \quad (\text{P5.39})$$

この積分の結果は (4.9) 式との比較から ρl を u に置き換えれば良いので (cf. prob 4.9),

$$W = 2(s\gamma u)^{1/2} \quad (\text{P5.40})$$

となる。ある吸収帯での等価幅は (4.39) から,

$$\Sigma_i W_i = 2\Sigma_i (s_i\gamma_i u)^{1/2} \quad (\text{P5.41})$$

となる。

前問 5.15 の結果より,

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_\nu^* &= \frac{1}{S} \frac{d\Sigma_i W_i}{du} \\ &= \frac{2}{S} \Sigma_i (s_i\gamma_i)^{1/2} \frac{d}{du} u^{1/2} \\ &= \frac{\Sigma (s_i\gamma_i)^{1/2}}{S} \frac{1}{\sqrt{u}} \end{aligned} \quad (\text{P5.42})$$

ここで u は問題 (5.15) より方位角を考慮して $u = \frac{5}{3} \int c \rho dz$ とおく. 静水圧を仮定すると圧力での積分となり, 任意の高度の圧力 p から大気上端 ($p = 0$) まで積分を実行する. ただし $c (= 5.5 \times 10^{-4})$ は一定.

$$u = \frac{5}{3} \int_z^\infty c \rho dz = \frac{5c}{3} \int_z^\infty \rho dz = -\frac{5c}{3} \int_p^0 \frac{dp}{g} = \frac{5c}{3g} p \quad (\text{P5.43})$$

(P5.42) 式に これを代入する. またここで $\gamma = \gamma_0 \frac{p}{p_0}$ を用いる.

$$\bar{\tau}_\nu^* = \frac{\Sigma(s_i \gamma_i)^{1/2}}{S} \frac{1}{\sqrt{u}} \quad (\text{P5.44})$$

$$= \frac{1}{S} \Sigma \sqrt{s_i \frac{\gamma_{i0} p}{p_0} \cdot \frac{3g}{5cp}} \quad (\text{P5.45})$$

$$= \frac{1}{S} \Sigma (s_i \gamma_{i0})^{1/2} \left(\frac{3g}{5cp_0} \right)^{1/2} \quad (\text{P5.46})$$

$g = 980 \text{ cms}^{-2}$, $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ とすれば

$$\bar{\tau}_\nu^* = 0.04$$

となる.

5.17 圧力が 10^{-6} atm (~ 96 km) となる高度での $15 \mu\text{m}$ の二酸化炭素の放射帯からの冷却を考える. ここで $\phi \ll 1$ および $\bar{\tau}_\nu^* \approx 1$ とする. 式 (5.41) の B_ν および A_{21} に代入せよ ($A_{21} = 8\pi\nu^2 g_1 S / c^2 g_2$ である. g_1, g_2 はそれぞれ低い準位, 高い準位の統計的重みである). これから

$$\psi = nh\nu \left\{ \frac{g_2 a_{21}}{g_1 [\exp(h\nu/kT) - 1]} \right\}$$

を示せ. この結果は放射帯の強さ S には無関係であること, および $nh\nu$ にかかっている量 (中括弧の中) は単位時間あたりに衝突により得られるエネルギー量子の確率であることに注意されたい. 10^{-6} atm に相当する高度に対して適当な値を代入して冷却率 (K day^{-1}) を求めよ.

[解]

$\phi \ll 1$ より式 (5.41)¹³

$$\psi = \frac{\frac{5}{3}\pi n S B_\nu \bar{\tau}_\nu^*}{1 + 5\bar{\tau}_\nu^*/12\phi} \quad (5.41)$$

の分母の第 1 項は省略されて

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\frac{5}{3}\pi n S B_\nu \bar{\tau}_\nu^*}{5\bar{\tau}_\nu^*/12\phi} \\ &= 4\pi S n B_\nu \phi \end{aligned} \quad (P5.47)$$

となる. $\phi = a_{21}/A_{21}$ を代入すると

$$\psi = 4\pi S n B_\nu \frac{a_{21}}{A_{21}} \quad (P5.48)$$

となる. ここで, 式 (4.18)

$$B_{\tilde{\nu}} = 2\tilde{\nu}^2 \frac{hc^2\tilde{\nu}}{\exp(hc\tilde{\nu}/kT) - 1} \quad (4.18)$$

を振動数 ν を用いて書き直すと

$$B_\nu = 2\nu^2 \frac{h c \nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (P5.49)$$

となる¹⁴. 式 (P5.49) および

$$A_{21} = \frac{8\pi\nu^2 g_1 S}{c^2 g_2}$$

¹³本文中の式 (5.41) では左辺に負号がついているが, これは加熱を正としているためである. ここでは冷却を正と扱うため ψ の符号は本文と反対になることに注意されたい.

¹⁴ある振動数, 波数領域に対して

$$B_{\tilde{\nu}} d\tilde{\nu} = B_\nu d\nu$$

である. また $\tilde{\nu} = \nu/c$ である (4 章脚注を参照) から

$$B_\nu = B_{\tilde{\nu}} \frac{d\tilde{\nu}}{d\nu} = \frac{1}{c} B_{\tilde{\nu}}$$

となる.

を (P5.48) に代入すると

$$\begin{aligned} -\psi &= 4\pi S n_2 \tilde{\nu}^2 \frac{hc\tilde{\nu}}{\exp(hc\nu/kT) - 1} \frac{a_{21}c^2 g_2}{8\pi\nu^2 g_1 S} \\ &= \frac{nh\tilde{\nu}^3 c^3}{\nu^2} \left\{ \frac{g_2 a_{21}}{g_1 [\exp(hc\tilde{\nu}/kT) - 1]} \right\} \end{aligned} \quad (\text{P5.50})$$

となる. $\tilde{\nu} = \nu/c$ より

$$-\psi = nh\nu \left\{ \frac{g_2 a_{21}}{g_1 [\exp(h\nu/kT) - 1]} \right\} \quad (\text{P5.51})$$

となる.

冷却率を求める

冷却率は

$$\frac{\psi}{c_p \rho} = \frac{nh\nu}{c_p \rho} \left\{ \frac{g_2 a_{21}}{g_1 [\exp(h\nu/kT) - 1]} \right\} \quad (\text{P5.52})$$

で求められる.

教科書 Appendix 1 から以下のようにおく.

$$\begin{aligned} h &= 6.6262 \times 10^{-34} \text{ J s}, \\ k &= 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \\ \nu &= c/\lambda = (2.998 \times 10^8)/(15 \times 10^{-6}) = 1.999 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}, \\ c_p &= 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}. \end{aligned}$$

高度 96 km での温度は教科書 Appendix 5 から $T = 180 \text{ K}$ とする.

統計的重みの比の値は教科書巻末の解答から $g_2/g_1 = 2$ とする¹⁵.

1 atm, 210 K における衝突係数の値は $a_{21}^{-1}(1 \text{ atm}) = 3 \times 10^{-5} \text{ s}$ である. さらに衝突係数は圧力に比例する. したがって, 衝突係数の温度依存性は小さいとして無視すれば, 10^{-6} atm , 180 K における衝突係数の値は

$$a_{21}(10^{-6} \text{ atm}) = 10^{-6}/(3 \times 10^{-5}) = 3.3 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

となる.

理想気体の状態方程式から大気の数密度 n_{total} は

$$n_{total} = \frac{pN_A}{RT} = \frac{10^{-6} \times 1.013 \times 10^5 \times 6.02 \times 10^{23}}{8.32 \times 180} = 4.07 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$$

となる. 二酸化炭素分子の数密度は n_{total} に二酸化炭素分子の体積混合比をかけることで求められる. 乱流圏界面より下では大気は均一に混合されていると考えてよい

¹⁵この値はどのようにして求められるのかはよくわからない.

ため, 高度 96 km での体積混合比と地表付近の体積混合比は等しいと考えてもよい. Appendix 3 より二酸化炭素の体積混合比は 0.00037 である. したがって二酸化炭素分子の数密度 n は

$$n = n_{total} \times 0.00037 = 4.07 \times 10^{19} \times 0.00037 = 1.51 \times 10^{14} \text{ kg m}^{-3}$$

理想気体の状態方程式から密度は

$$\rho = \frac{pM}{RT} = \frac{10^{-6} \times 1.013 \times 10^5 \times 28.8 \times 10^{-3}}{8.32 \times 180} = 1.95 \times 10^{-6} \text{ m}^{-3}$$

となる.

以上の値を式 (P5.52) に代入すると冷却率は $3.31 \times 10^{-5} \text{ K s}^{-1}$ となる. したがって, 一日中一定の割合で冷却されると仮定すれば, 一日当たりの冷却率は

$$3.31 \times 10^{-5} \times 24 \times 60 \times 60 = 2.86 \text{ K day}^{-1} \quad (\text{P5.53})$$

となる.

5.18 問題 5.17 で求めた値を熱力学平衡が支配している場合と比べなさい。

[解] CO₂ による単位体積当たりのエネルギー増加率は

$$-\Psi = \frac{\frac{5}{3}\pi n S \bar{\tau}_\nu^*}{1 + 5\bar{\tau}_\nu^*/12\phi} \quad (5.41)$$

問題 5.13 より $\bar{\tau}_\nu^* \approx 1, \phi \ll 1$ なので式 (5.41) の分母は

$$1 + \frac{5\bar{\tau}_\nu^*}{12\phi} \approx \frac{5\bar{\tau}_\nu^*}{12\phi}$$

一方, 局所熱力学平衡 (LTE) を考えた場合, $\phi \rightarrow \infty$ なので

$$1 + \frac{5\bar{\tau}_\nu^*}{12\phi} \approx 1$$

以上より $\phi = 2.4 \times 10^{-4} p$ (p は気圧単位) なので

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_{NLTE}}{\Psi_{LTE}} &= \frac{12\phi}{5\bar{\tau}_\nu^*} \\ &= 5.76 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

問題 5.13 より冷却率は 5 K/day なので局所熱力学平衡の場合 86.8 K/day となる。

考えている高度 (96km) では密度が小さく, ほとんど衝突が起こらない状態, すなわち ϕ が小さくなる状態なので励起・脱励起放射は起こりにくい (問題 5.17). しかし本問題では局所熱力学平衡 ($\phi \rightarrow \infty$), すなわち衝突が十分頻繁に起こると考えたので十分に放射が起こる. このため本問題のような仮定をおくと実際よりは冷えすぎてしまう.

5.19 問題 5.17 で考えた CO_2 の $15 \mu\text{m}$ 帯の吸収線において、 $\bar{\tau}_\nu^* = 1$ の仮定を検証せよ。この場合、 10^{-6} 気圧の高度から宇宙空間に至る気層で、強度 $s = 10^3 \text{ cm}^{-1} (\text{g cm}^{-2})^{-1}$ の典型的な吸収線の中心における透過率を求めてみよ。(ドップラー幅の吸収線の中心における吸収係数は $s\pi^{-1/2}\gamma_D^{-1}$ である。 γ_D の形については問題 4.8 を見よ.)

[解]

$$\bar{\tau}_\nu^* = \frac{1}{S} \int_{\Delta\nu} k_\nu \tau_\nu^*(z, \infty) d\nu \quad (5.34)$$

で、式中 $\tau_\nu^*(z, \infty)$ は

$$\tau_\nu^*(z, \infty) = \exp\left(-\int_z^\infty \frac{5}{3} k_\nu n dz'\right), \quad (5.32)$$

S は

$$S = \int_{\Delta\nu} k_\nu d\nu$$

で与えられる。

ここでは、吸収線の中心における透過率を求めるので、簡単のためごく狭い範囲の $\Delta\nu$ を考え、この範囲で k_ν は ν に依らず一定と考える。すると、(5.34) 式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \int_{\Delta\nu} k_\nu \tau_\nu^*(z, \infty) d\nu &= \frac{1}{\int_{\Delta\nu} k_\nu d\nu} \int_{\Delta\nu} k_\nu \tau_\nu^*(z, \infty) d\nu \\ &= \frac{1}{k_\nu \Delta\nu} k_\nu \Delta\nu \tau_\nu^*(z, \infty) = \tau_\nu^*(z, \infty) \end{aligned} \quad (P5.1)$$

となり、結局 (5.32) 式の値を求めればよいことになる。

問題 4.8 の内容から、吸収線の中心における吸収係数 (単位質量当たり) は

$$s\pi^{-1/2}\gamma_D^{-1} = s\pi^{-1/2} \frac{c}{\tilde{\nu}_0} \left(\frac{M_\gamma}{2RT}\right)^{1/2} \quad (P5.2)$$

であたえられる。よって、(5.32) 式中の吸収断面積 k_ν としては、(P5.2) に CO_2 分子の質量 m_{CO_2} を乗じたものを用いれば良い。以上まとめると、

$$\bar{\tau}_\nu^* = \exp\left(-\int_z^\infty \frac{5}{3} s\pi^{-1/2} \frac{c}{\tilde{\nu}_0} \left(\frac{M_\gamma}{2RT}\right)^{1/2} m_{\text{CO}_2} n dz'\right) \quad (P5.3)$$

の値を求めることになる。

計算を行うにあたり、密度・温度の高度変化には理科年表の値 (1976, U.S. 標準大気。後述の prob0519_data.txt) を用いた。また、 CO_2 の質量混合比は問題 5.16 での値 5.5×10^{-4} を用いた (この値の高度変化は考慮していない)。後述の Program により計算を行うと、 $\bar{\tau}_\nu^* = 0.76$ を得る (解答では 0.66)。

```

#!/usr/bin/perl -w
# prob0519.pl -- 問題 5.19
# データファイル prob0519_data.txt

### データファイル読み込み #####

$i = 0;
while ($line = <>) {
    chomp $line;
    ($z[$i], $T[$i], $rho[$i]) = split (/s+/, $line);
    ++$i;
}

#####

### 定数の定義 #####

$N_A    = 6.0e23;    # アボガドロ数
$M_CO2  = 44;      # CO2 の分子量
$c      = 3.0e8;   # 光速
$R      = 8.3;    # 1 mol の気体定数
$lambda = 15e-6;  # 吸収される波長
$s      = 1e4;    # 放射強度
$pi     = 3.14;

$n_u    = 2 * $pi / $lambda;    # 吸収される波数
$m_CO2  = ($M_CO2 * 1e-3) / $N_A; # CO2 分子の質量

#####

### 積分の係数部分の計算 #####

$factor = (5/3) * $pi**(-0.5) * $s * ($c / $n_u)
          * ($M_CO2 * 10**(-3) / (2 * $R))**(0.5) * $m_CO2;

print "factor=", $factor, "\n";

#####

### 積分の実行 #####

$sum = 0;
for ( $i=0 ; $i<14 ; ++$i) {
    $dz = ($z[$i] - $z[$i+1]) * 10**3;    # dx (短冊の幅) の計算
    $T_m = ($T[$i+1] + $T[$i]) / 2;      # 隣り合う T の平均値
    $rho_m = ($rho[$i+1] + $rho[$i]) / 2; # 隣り合う rho の平均値
    $rho_CO2 = $rho_m * 4.7e-4;         # CO2 の密度
    $n_CO2 = $rho_CO2 / $m_CO2 ;        # CO2 の数密度
    $sum += $n_CO2 * $T_m**(-0.5) * $dz; # 短冊の面積の和
}
print "sum=", $sum, "\n";
print "result=", exp(-$sum * $factor), "\n";

#####

```

```
# データファイル prob0519_data.txt
# 高度 [km], 温度 [K], 密度 [kg m^-3]

500 999 5.2e-13
450 998 1.9e-12
400 996 2.8e-12
350 990 7.0e-12
300 976 1.9e-11
250 941 6.1e-11
200 855 2.5e-10
180 790 5.2e-10
160 696 1.2e-9
140 560 3.8e-9
130 469 8.2e-9
120 360 2.2e-8
110 240 9.7e-8
100 195 5.6e-7
90 187 3.4e-6
```

5.20 標準大気での二酸化炭素 (直径 4×10^{-10} m) 一分子の単位時間あたりの衝突回数を簡単な運動理論から計算せよ. もし, 標準大気での衝突による ν_2 振動の脱励起の緩和時間が 6×10^{-6} s である場合, 一回の衝突での脱励起率はいくらか?

この非常に小さい確率は, ν_2 振動に対する $h\nu$ が一般的な温度での分子の平均運動エネルギー ($\approx 3kT/2$) よりもかなり大きいため, 一回の衝突で並進運動から振動に十分なエネルギーが伝わる可能性は非常に小さいからである.

[解] 単位時間あたりの衝突回数は,

$$\frac{\text{一秒あたりに進んだ距離}}{\text{一衝突あたりに進んだ距離}} = \frac{\text{速度}}{\text{平均自由行程}} = n\sigma v$$

で書ける. ただし, n は大気の数密度, σ は CO_2 の衝突断面積, v は CO_2 の並進運動の速度であり,

$$v = (3kT/m)^{1/2}$$

とかける. ただし, k はボルツマン定数, T は温度 (標準状態では 273.15 K), m は一分子辺りの質量である. ここで, 各値を代入すると,¹⁶

$$\begin{aligned} n\sigma(3kT/m)^{1/2} &= 44.90 \times 6.02 \times 10^{23} \times 3.14 \times (4 \times 10^{-10})^2 \times \left(\frac{3 \times 1.381 \times 10^{-23} \times 273.15}{0.0288 / (6.02 \times 10^{23})} \right)^{1/2} \\ &= 7.42 \times 10^9 \end{aligned}$$

衝突による緩和時間は $1/a_{21}$ であることから,

$$a_{21} = \frac{1}{6 \times 10^{-6}} = 1.67 \times 10^5 [\text{s}^{-1}]$$

よって, 一回の衝突による脱励起率は,

$$\frac{\text{実際に脱励起する粒子数}}{\text{励起状態の全 } \text{CO}_2 \text{ 粒子が衝突する回数}} = \frac{a_{21}n_2}{n\sigma vn_2} = \frac{1.67 \times 10^5}{7.42 \times 10^9} = 2.25 \times 10^{-5}$$

となる.

¹⁶標準状態での密度は Appendix 1 より 1.293 kgm^{-3} であるから, $n = 1.293/0.0288 \times 6.02 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}$.