雲粒の成長

1 拡散が速い場合

1.1 雲粒の成長方程式

Colaprete and Toon 2003 の (6) 式について以下で考える。雲粒の半径 r の時間発展は以下の式で与える (Toon et al.1989)。

$$\frac{dr}{dt} = g_0 n_{\mathrm{vap}} \left[\frac{(S+1) - A_{\mathrm{k}}(1 + g_1 g_0 Q_{\mathrm{rad}})}{1 + g_1 g_0 n_\infty} \right] \tag{1.1}$$

A_{k} は曲率による蒸気圧の変化を表すケルビン補正項で、

$$A_{\mathrm{k}} = \exp\left(\frac{2M\sigma}{\rho r R T} \right) \tag{1.2}$$

と表される。g_0, g_1, g_2 はそれぞれ

$$g_0 = \frac{D' F_v M}{\rho r A} = \frac{D' F_v m}{\rho r} \tag{1.3}$$

$$g_1 = \frac{L_{\mathrm{e}} M \rho r}{R T^2 K' F_{\mathrm{t}}} = \frac{L_{\mathrm{e}} \rho r}{k T^2 K' F_{\mathrm{t}}} \tag{1.4}$$

$$g_2 = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \tag{1.5}$$

である。簡単のために以下のような仮定をする。

- 曲率による蒸気圧の変化は無視する ($A_k = 1$)。
- 放射加熱（冷却）の効果は無視する ($Q_{\mathrm{rad}} = 0$)。
- 雲粒が気相に与える影響は無視する ($F_{\mathrm{t}} = F_{\mathrm{v}} = 0$)。
- 拡散が速い ($D' = \infty$)。

すると、(1.1) 式は、

$$\frac{dr}{dt} = g_0 n_{\mathrm{vap}} \left[\frac{S}{1 + g_1 g_0 n_\infty} \right] \tag{1.6}$$

$$= \frac{n_{\mathrm{vap}} S}{1/g_0 + g_1 n_\infty} \tag{1.7}$$

$D' = \infty$ より $g_0 = \infty$ となるので、

$$= \frac{S}{g_1} \frac{n_{\mathrm{vap}}}{n_\infty} \tag{1.8}$$
$$= \frac{SkT^2K'}{L_{\mathrm{e}}^2 \rho r} \frac{n_{\mathrm{vap}}}{n_\infty} \tag{1.9}$$

となる。拡散が速い状況だと、$n_{\mathrm{vap}} \simeq n_\infty$ となるので、

$$\frac{dr}{dt} = \frac{SkT^2K'}{L_{\mathrm{e}}^2 \rho r} \tag{1.10}$$

1.2　熱量保存の式

以下で熱量保存の式から成長方程式を導く。雲粒が成長することによって、熱が時間変化すると考える。一方、熱量保存の式は、

$$\frac{d(mL_{\mathrm{e}})}{dt} = -4\pi r^2 K' (\nabla T)_{r'=r} \tag{1.11}$$
$$4\pi r^2 \rho L_{\mathrm{e}} \frac{dr}{dt} = -4\pi r^2 K' (\nabla T)_{r=r_{\mathrm{w}}} \tag{1.12}$$
$$\frac{dr}{dt} = -\frac{K'}{\rho L_{\mathrm{e}}} (\nabla T)_{r'=r} \tag{1.13}$$

と書ける。ここで r' はダスト中心からの距離、r はダストの半径である。

次に熱伝導方程式から温度勾配 ∇T を求める。熱伝導方程式は、一般に

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K'}{\rho c_{\mathrm{p}}} \nabla^2 T \tag{1.14}$$

と書ける。球対称、定常を仮定すると、

$$\frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r'^2 \frac{\partial T}{\partial r'} \right) = 0 \tag{1.15}$$
$$\frac{\partial T}{\partial r'} = \frac{c_1}{r'^2} \tag{1.16}$$
$$T = -\frac{c_1}{r'} + c_2 \tag{1.17}$$

境界条件 ($r' = r$ で $T = T_{\mathrm{s}}$、$r' = \infty$ で $T = T_\infty$) より、温度は

$$T = -\frac{r}{r'} (T_\infty - T_{\mathrm{s}}) + T_\infty \tag{1.18}$$

と求まる。

よって、(1.25) 式は

$$\frac{dr}{dt} = \frac{K'}{\rho L_{\mathrm{e}} r} (T_\infty - T_{\mathrm{s}}) \tag{1.19}$$

と書き直すことができる。

次にクラウジウスークラペイオンの式から温度と潜熱の関係を導く。

$$\frac{dP}{dT} = \frac{Lmn_{\mathrm{vap}}}{T} \tag{1.20}$$

$$\frac{P_\infty - P_{\mathrm{s}}}{T_\infty - T_{\mathrm{s}}} = \frac{Lmn_{\mathrm{vap}}}{T} \tag{1.21}$$

$$T_\infty - T_{\mathrm{s}} = \frac{P_\infty - P_{\mathrm{s}}}{Lmn_{\mathrm{vap}}} T \tag{1.22}$$

$$= \frac{TSP_{\mathrm{s}}}{Lmn_{\mathrm{vap}}} \tag{1.23}$$

$$= \frac{kT^2 S}{Lm} \tag{1.24}$$

となる。ここで、状態方程式 $P_{\mathrm{s}} = n_{\mathrm{vap}} kT$ と $S \equiv \frac{P_\infty}{P_{\mathrm{s}}} - 1$ を用いた。(1.19) 式と (1.24) 式より

$$\frac{dr}{dt} = \frac{SkT^2 K'}{L_{\mathrm{e}}^2 \rho r_{\mathrm{w}}} \tag{1.25}$$

となる。(1.10) 式と (1.25) 式はよく一致している。