やさしい
軌道力学入門

理学部地球惑星科学科4年
北大地球科学サークルGROUND／北大お天気愛好会OB　植田知幸

NASA Webサイトより

自己紹介

- 広島県出身.
- 古生物学の研究室に在籍.
- 地球惑星科学なんでも好き.
- 趣味は読書と映画鑑賞.

お勧めジオ・スポット
広島県庄原市東城町
帝釈峡の「雄橋」

なぜ軌道力学を学ぶのか

- 猫も杓子も火星とかに行く時代……

どんな経路？
どれくらい時間かかる？
荷物は何kgまで？

- 軌道力学を知らないと旅程が立てられない！

もくじ

第1章　軌道を数式で表そう

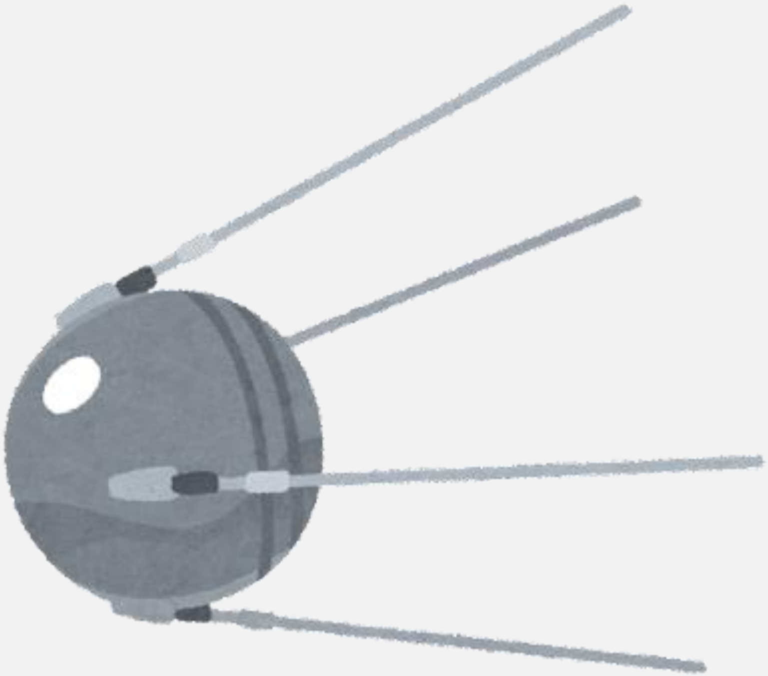
～～ロードマップ～～

　宇宙機の速度を極座標で表す.

⇒加速度を極座標で表す.

⇒運動方程式を立てる.

⇒軌道の極方程式を求める.

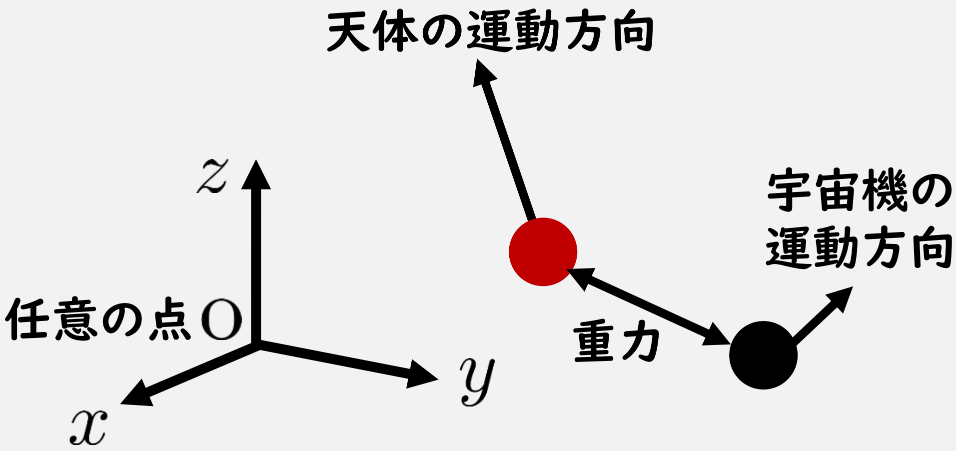


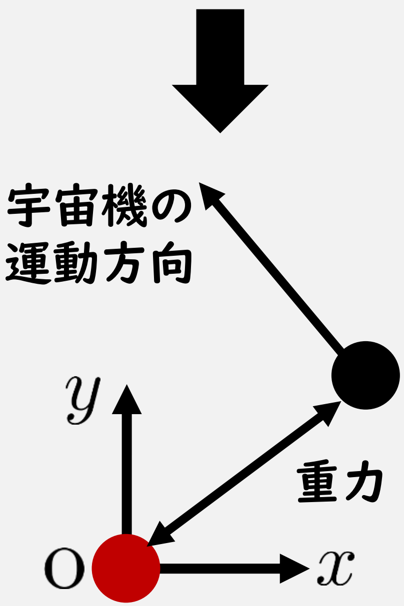
質点の運動法則

- 第一法則：外部から力を受けない質点は，静止または等速直線運動を続ける．
- 第二法則：質点の質量×加速度＝質点に働く力
- 第三法則：質点Aから質点Bに力が働くとき，同時に逆向きで大きさの等しい力がBからAに働いている．

- ニュートン力学はこの三法則を認めることから出発する．

二次元で考えよう



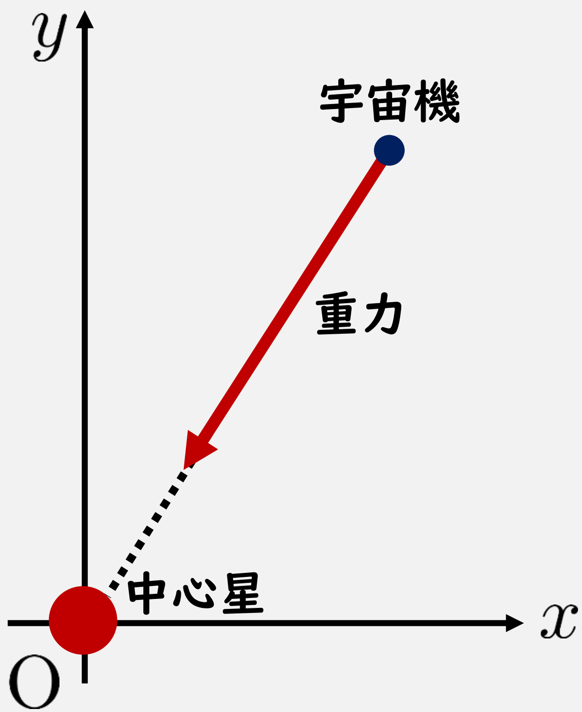


3ベクトルが
同一平面上になくても…

元の原点に対し
天体と共に移動する
新たな座標系を設定
⇒宇宙機は平面上を運動

問題設定と「ケプラー運動」

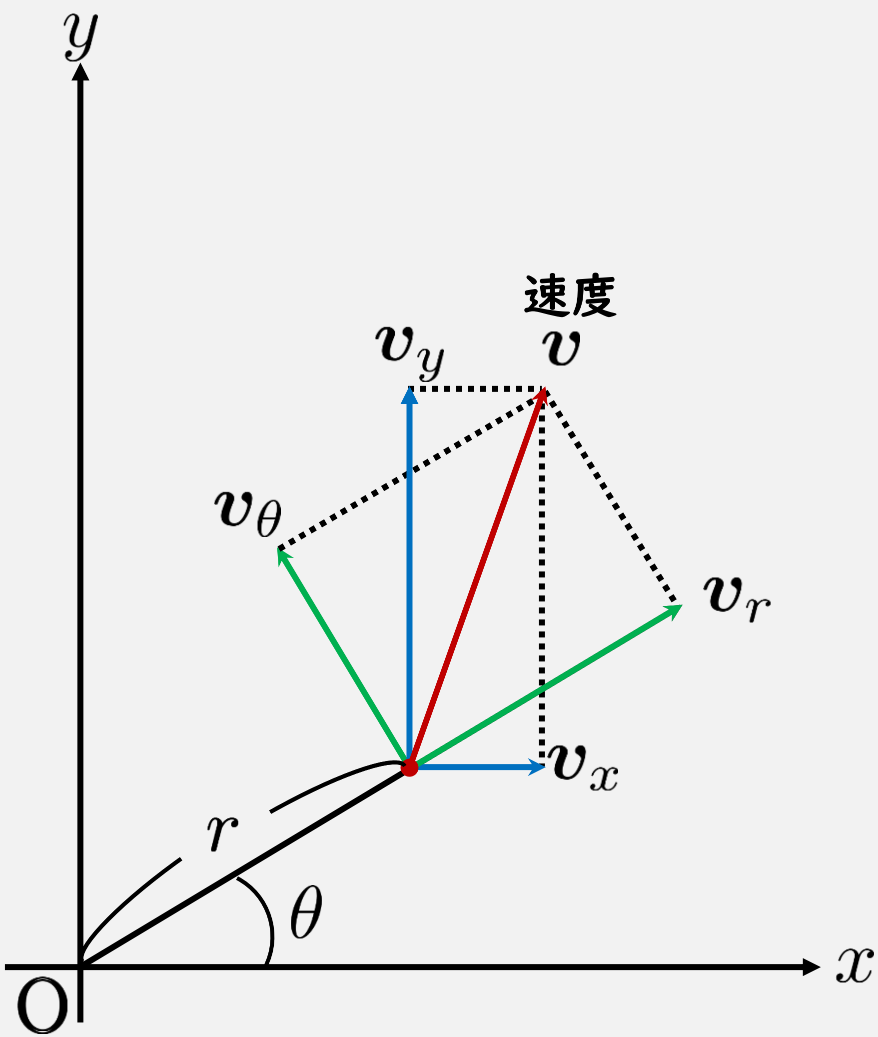
- 中心星と宇宙機をそれぞれ質点とみなす.
- 中心星を原点とする座標系を設定.
- 宇宙機は中心星からの重力のみを受けて運動する.
  ⇒ケプラー運動と呼ぶ.



極座標

- 中心星に対し宇宙機と共に移動する極座標を設定する.

ベクトルの分解

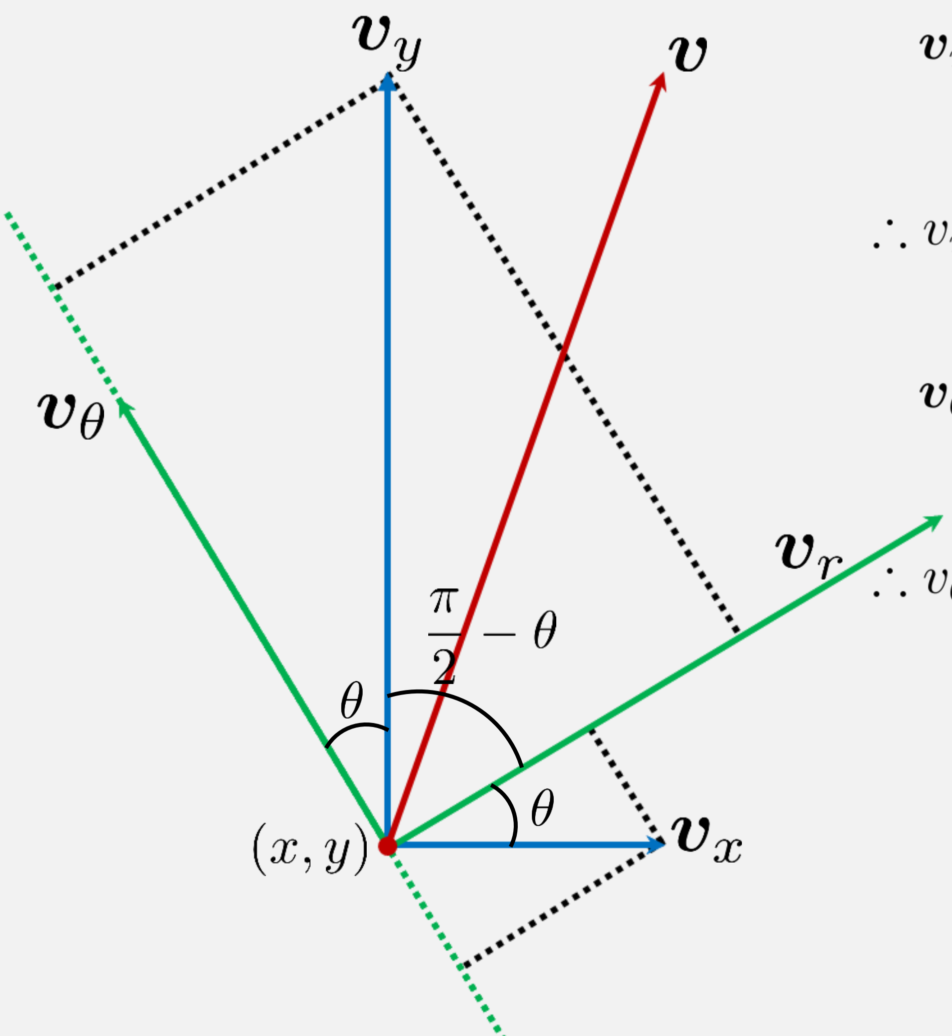


- ベクトルは太字で表す．
- 大きさは細字で表す．
- $\boldsymbol{v}_x$と$\boldsymbol{v}_y$，$\boldsymbol{v}_r$と$\boldsymbol{v}_\theta$は互いを互いで表せない(一次独立)．
- 単位ベクトル$\boldsymbol{e}$を用いて

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= v_x\boldsymbol{e}_x + v_y\boldsymbol{e}_y \\ &= v_r\boldsymbol{e}_r + v_\theta\boldsymbol{e}_\theta \ .\end{aligned}$$

$\boldsymbol{v}_x$のr成分
＋
$\boldsymbol{v}_y$のr成分

速度を極座標で表そう①



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_r &= v_r \boldsymbol{e}_r \\
&= v_x \cos\theta \boldsymbol{e}_r + v_y \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\boldsymbol{e}_r \\
\therefore v_r &= v_x \cos\theta + v_y \sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_\theta &= v_\theta \boldsymbol{e}_\theta \\
&= v_x \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)(-\boldsymbol{e}_\theta) + v_y \cos\theta \boldsymbol{e}_\theta \\
\therefore v_\theta &= -v_x \sin\theta + v_y \cos\theta
\end{aligned}
$$

r と θ で表したい

速度を極座標で表そう②

位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ **より,**

“積の微分”と“合成関数の微分”を思い出して

$$
\begin{aligned}
v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta + r\frac{d}{dt}(\cos\theta) \\
&= \frac{dr}{dt}\cos\theta + r\frac{d}{d\theta}(\cos\theta)\frac{d\theta}{dt} \\
&= \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}
\end{aligned}
$$

$$
v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt} \quad .
$$

速度を極座標で表そう③

$$\begin{cases} v_r = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta \\ v_\theta = -v_x \sin\theta + v_y \cos\theta \end{cases}$$

に

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt} \\ v_y = \dfrac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

を代入して整理すると

$$\boldsymbol{v} = (v_r, v_\theta) = \left(\frac{dr}{dt}, r\frac{d\theta}{dt}\right) .$$

加速度も極座標で表そう

- 加速度 $\boldsymbol{a}$ もベクトルなので, 速度と同様に

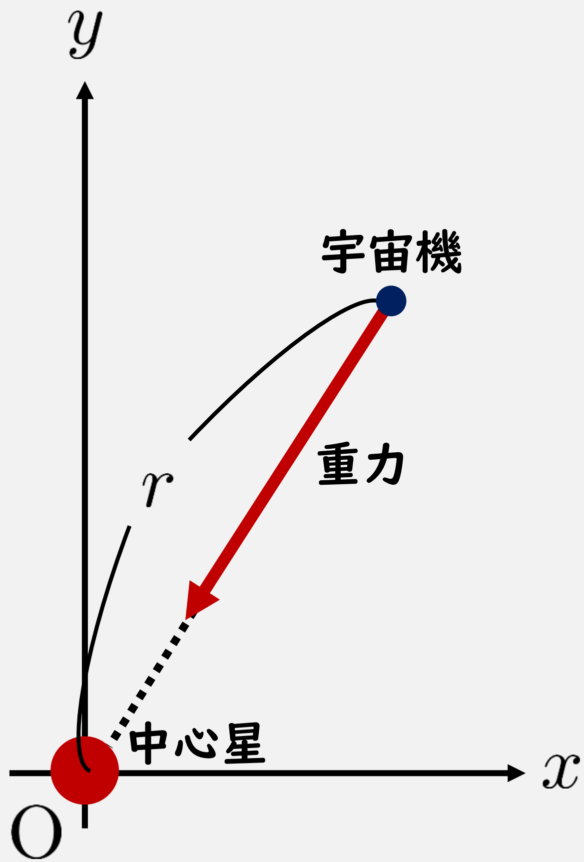
$$\left\{\begin{array}{lcl} a_r &=& a_x \cos\theta + a_y \sin\theta \\ a_\theta &=& -a_x \sin\theta + a_y \cos\theta \end{array}\right. .$$

- $(a_x, a_y) = \left(\dfrac{dv_x}{dt}, \dfrac{dv_y}{dt}\right)$ と $\left\{\begin{array}{lcl} v_x &=& \dfrac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt} \\ v_y &=& \dfrac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} \end{array}\right.$ より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} = (a_r, a_\theta) &= \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) \\ &= \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right) . \end{aligned}$$

運動方程式をたてよう

- 宇宙機がケプラー運動する場合，単位質量についての運動方程式を考える．



$$\text{重力} = -\frac{\overbrace{(\text{万有引力定数})\times(\text{中心星の質量})}^{\text{標準重力パラメータ}\,\mu}}{r^2}$$

$$= -\frac{\mu}{r^2} \qquad (\,e_r\text{と逆向きなので負号付})$$

と書くと，運動方程式は

$$\begin{cases} r\,\text{方向} & \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\dfrac{\mu}{r^2} \\ \theta\,\text{方向} & \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right) = 0 \end{cases} \quad .$$

エネルギー積分

- θ方向 $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$

➡ 成立条件は $r^2\frac{d\theta}{dt}=\mathrm{const.}\equiv h$ (角運動量).

- $\frac{d\theta}{dt}=\frac{h}{r^2}$ を r 方向 $\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{\mu}{r^2}$ に代入し整理すると

$$\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{h^2}{r^3}+\frac{\mu}{r^2}=0\ .$$

- 両辺に $\frac{dr}{dt}$ を乗じると $\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{dr}{dt}\frac{h^2}{r^3}+\frac{dr}{dt}\frac{\mu}{r^2}=0$.

- 両辺積分する(微分して元に戻る関数を探す)と

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{h^2}{2r^2}-\frac{\mu}{r}=\mathrm{const.}\equiv\varepsilon\ .$$

エネルギー積分

ε の物理的意味

- $\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{h^2}{2r^2}-\frac{\mu}{r}=\varepsilon$ に $\frac{h}{r}=r\frac{d\theta}{dt}$ を代入して整理すると

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}-\frac{\mu}{r}=\varepsilon \quad .$$

- $\boldsymbol{v}=(v_r,v_\theta)=\left(\frac{dr}{dt},r\frac{d\theta}{dt}\right)$を思い出す.

$$\frac{1}{2}v^2-\frac{\mu}{r}=\varepsilon$$

力学的エネルギーの総和(一定値!)

運動エネルギー

位置エネルギー

- エネルギー積分は力学的エネルギーなる保存量を表す.

軌道の極方程式を求めよう①

- 目標：先程の積分結果 $\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} = \varepsilon$ から t を消去して動径と角度の関係式を導こう.

- まず $$\frac{dr}{dt}(\theta) = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{h}{r(\theta)}\right\}.$$

合成関数の微分

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$

- 積分結果に代入し, $-\mu/h = \mathrm{const.}$ に注目して変形.

$$\left\{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r}\right)\right\}^2 = 2\varepsilon - \frac{h^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r} - \frac{\mu}{h}\right)\right\}^2 = 2\varepsilon + \frac{\mu^2}{h^2} - \left(\frac{h}{r} - \frac{\mu}{h}\right)^2 \geq 0.$$

軌道の極方程式を求めよう②

- 不等式 $2\varepsilon + \dfrac{\mu^2}{h^2} - \left(\dfrac{h}{r} - \dfrac{\mu}{h}\right)^2 \geq 0$ を変形すると

$$\left(\frac{h}{r} - \frac{\mu}{h}\right)^2 \leq 2\varepsilon + \frac{\mu^2}{h^2} \Leftrightarrow \frac{(h/r - \mu/h)^2}{2\varepsilon + \mu^2/h^2} \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{h/r - \mu/h}{\sqrt{2\varepsilon + \mu^2/h^2}}\right| \leq 1.$$

- 絶対値の範囲がcosと同じなので

$$\frac{h/r - \mu/h}{\sqrt{2\varepsilon + \mu^2/h^2}} \equiv \cos\varphi \Leftrightarrow h/r - \mu/h = \sqrt{2\varepsilon + \mu^2/h^2}\cos\varphi.$$

軌道の極方程式を求めよう③

- $\left\{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r}-\frac{\mu}{h}\right)\right\}^2 = 2\varepsilon + \frac{\mu^2}{h^2} - \left(\frac{h}{r}-\frac{\mu}{h}\right)^2$ に

$h/r - \mu/h = \sqrt{2\varepsilon + \mu^2/h^2}\cos\varphi$ を代入して整理．

$$\left(2\varepsilon + \mu^2/h^2\right)\left\{\frac{d}{d\theta}(\cos\varphi)\right\}^2 = 2\varepsilon + \mu^2/h^2 - \left(2\varepsilon + \mu^2/h^2\right)\cos^2\varphi.$$

- 両辺を $2\varepsilon + \mu^2/h^2$ で除すと

$$\left(\frac{d}{d\theta}\cos\varphi\right)^2 = 1 - \cos^2\varphi$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(-\sin\varphi\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 = \sin^2\varphi$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\varphi}{d\theta} = \pm 1$$

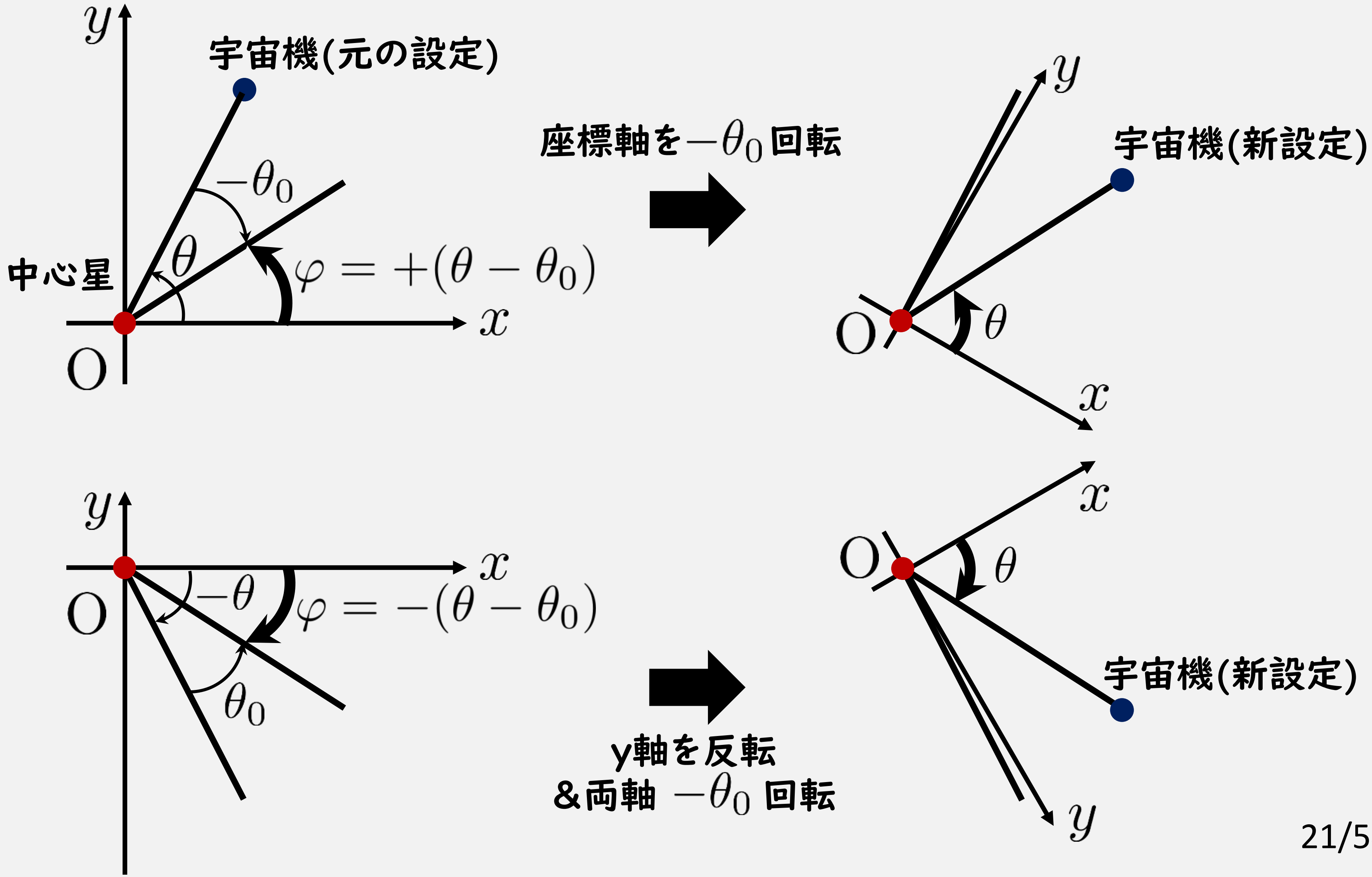
$$\Leftrightarrow \quad d\varphi = \pm d\theta$$

$\Leftrightarrow \quad \varphi = \pm(\theta - \theta_0)$ (積分定数 $\mp\theta_0$)．

φ と θ の関係が分かった！

軌道の極方程式を求めよう④

- 座標系を適切に定めれば φ も θ も同じ.



軌道の極方程式を求めよう⑤

- $h/r - \mu/h = \sqrt{2\varepsilon + \mu^2/h^2}\cos\varphi$ に $\varphi = \pm(\theta - \theta_0)$ を代入して整理．

$$h/r - \mu/h = \sqrt{2\varepsilon + \mu^2/h^2}\cos\{\pm(\theta - \theta_0)\}$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{h^2/\mu}{1 + \sqrt{1 + 2\varepsilon h^2/\mu^2}\cos(\theta - \theta_0)}.$$

- $h^2/\mu \equiv p$ (半直弦)，$\sqrt{1 + 2\varepsilon h^2/\mu^2} \equiv e$ (離心率)，
  $\theta - \theta_0 \equiv f$ (真近点離角)とおけば

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}$$ (軌道の極方程式)．

- 動径と角度の関係式が得られた！

第2章　軌道の形を探ろう

～～ロードマップ～～

　軌道の形をプロットしてみる.

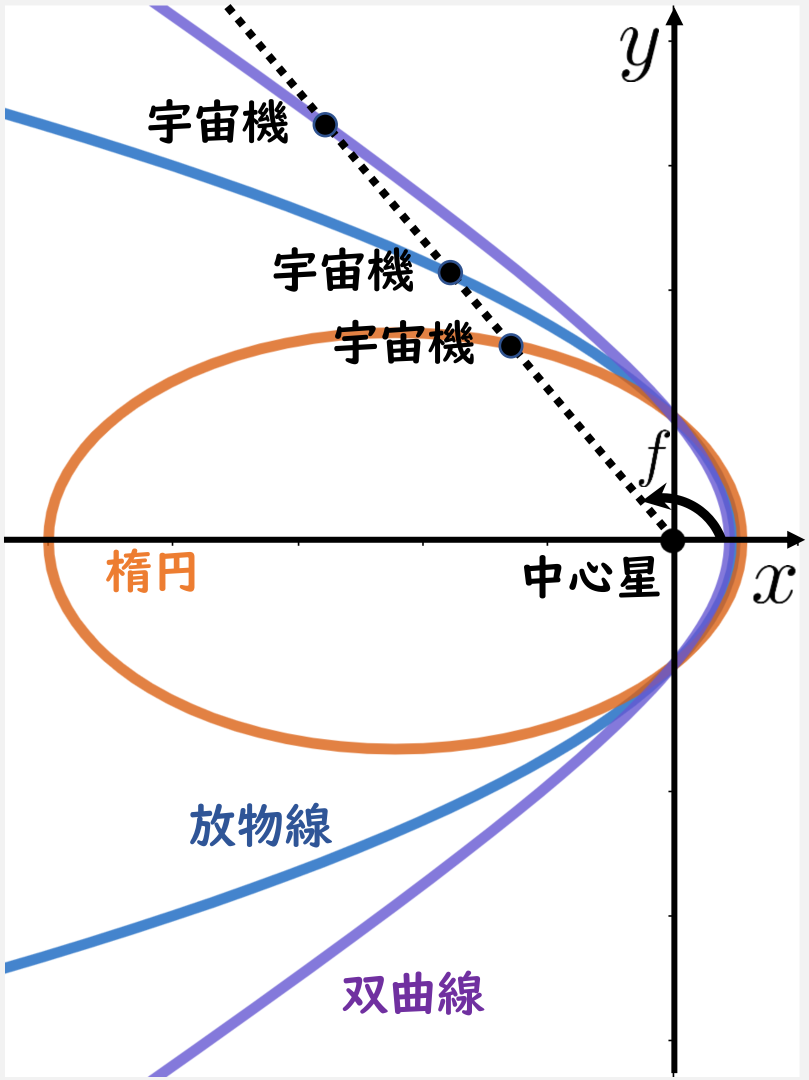
⇒楕円/放物線/双曲線の定義を思い出す.

⇒各パラメータの幾何学的意味を確認.

⇒軌道の極方程式を変形して比べる.

軌道の形

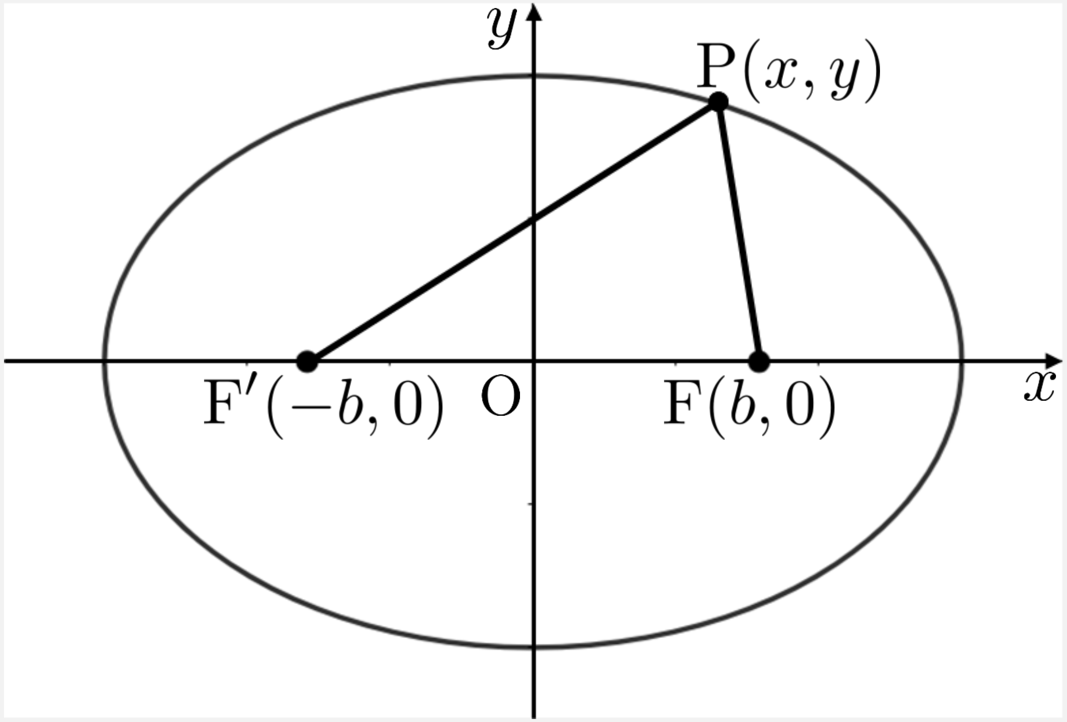
- $r = \dfrac{p}{1 + e\cos f}$ を図示すると……



➡ このことを確かめる.

楕円の定義

- 「2定点(焦点)からの距離の和が一定な点の集合」が楕円.
- 各点を下図の通り定め $\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2a$ とすると
$\sqrt{(x-b)^2+y^2}+\sqrt{\{x-(-b)\}^2+y^2}=2a$ を変形して

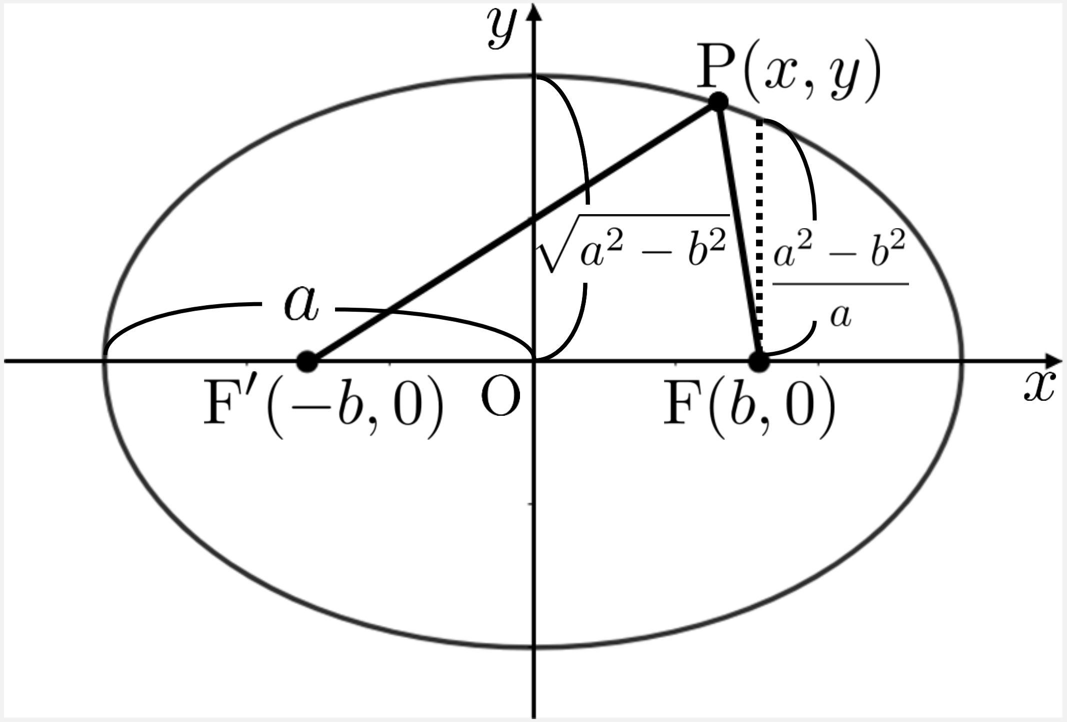


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-b^2}=1.$$

楕円の半長軸, 半短軸, 半直弦

- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-b^2}=1$ に $y=0, x=0, x=b$ をそれぞれ代入.

➡半長軸 a, 半短軸 $\sqrt{a^2-b^2}$, 半直弦 $\dfrac{a^2-b^2}{a}$.

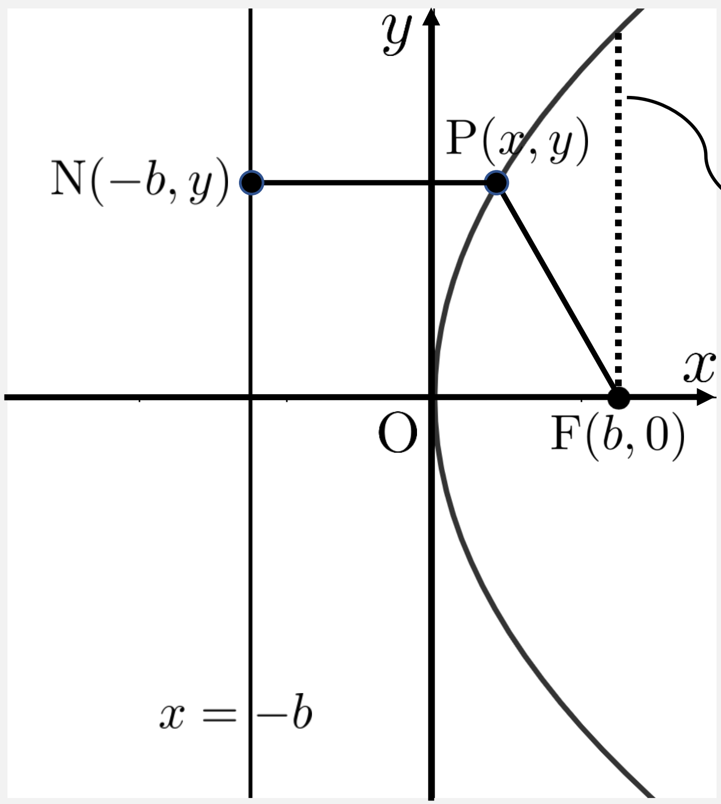


放物線の定義と半直弦

・「1定点(焦点)と1直線(準線)からの距離が一定な点の集合」が放物線.

・各点を下図の通り定めると，$\mathrm{PF} = \mathrm{PN}$より

$\sqrt{(x-b)^2 + y^2} = x + b$を変形して$y^2 = 4bx$.



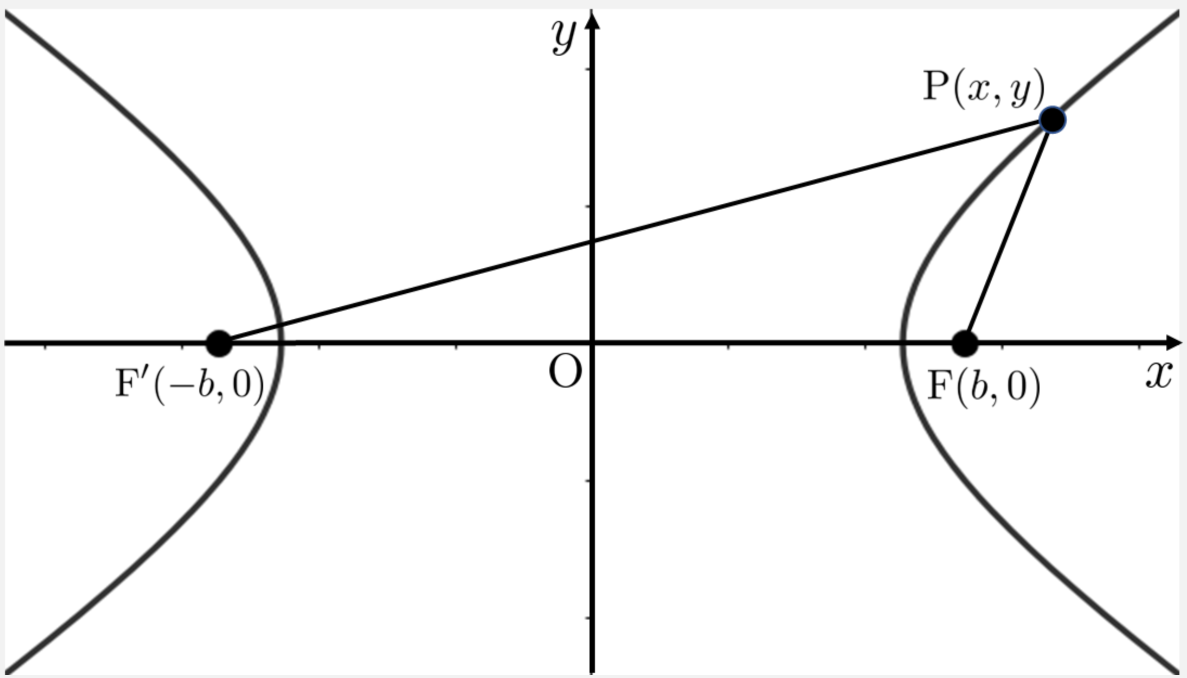
・$y^2 = 4bx$に$x = b$を代入して

半直弦$2b$.

双曲線の定義

・「2定点(焦点)からの距離の差が一定な点の集合」が双曲線.

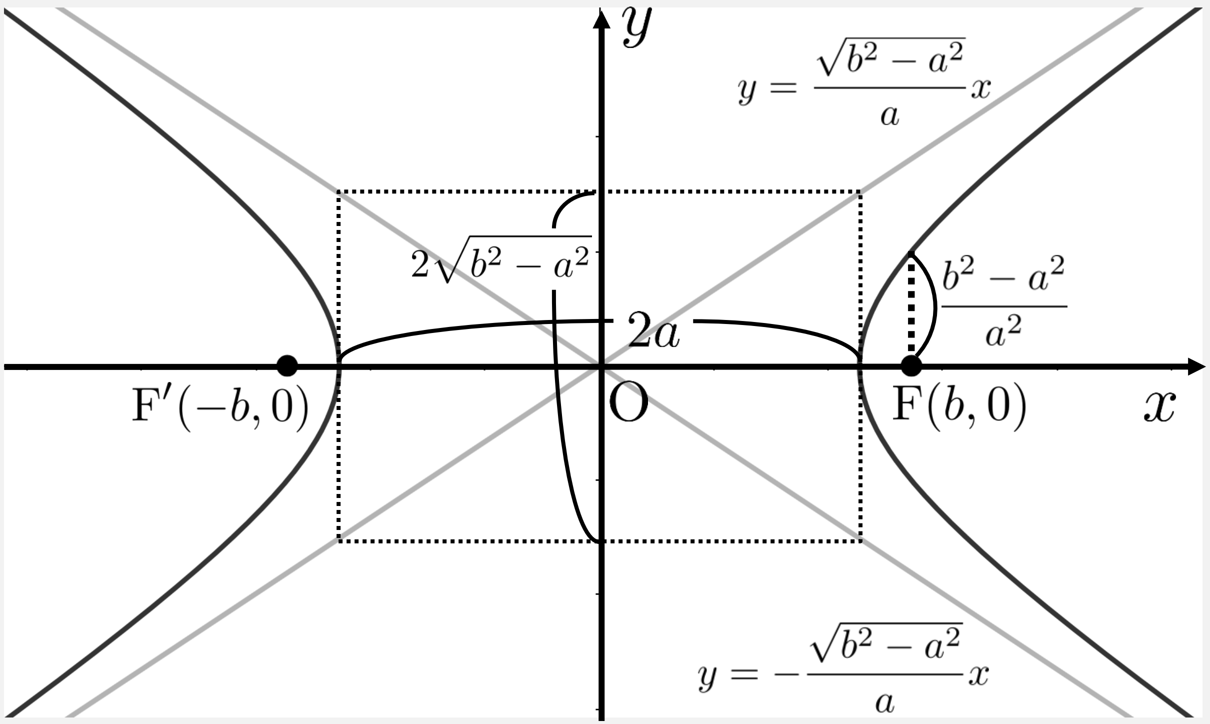
・各点を下図の通り定め $\mathrm{PF}' - \mathrm{PF} = 2a$ とすると
$\sqrt{\{x-(-b)\}^2+y^2} - \sqrt{(x-b)^2+y^2} = 2a$ を変形して
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2-a^2} = 1.$$



双曲線の半直弦, 漸近線, 交軸, 共役軸

- $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2-a^2}=1$ に $x=b$ を代入すると, 半直弦 $\dfrac{b^2-a^2}{a^2}$.
- $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2-a^2}=1 \Leftrightarrow y=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ で $|x|\to\infty$ とし

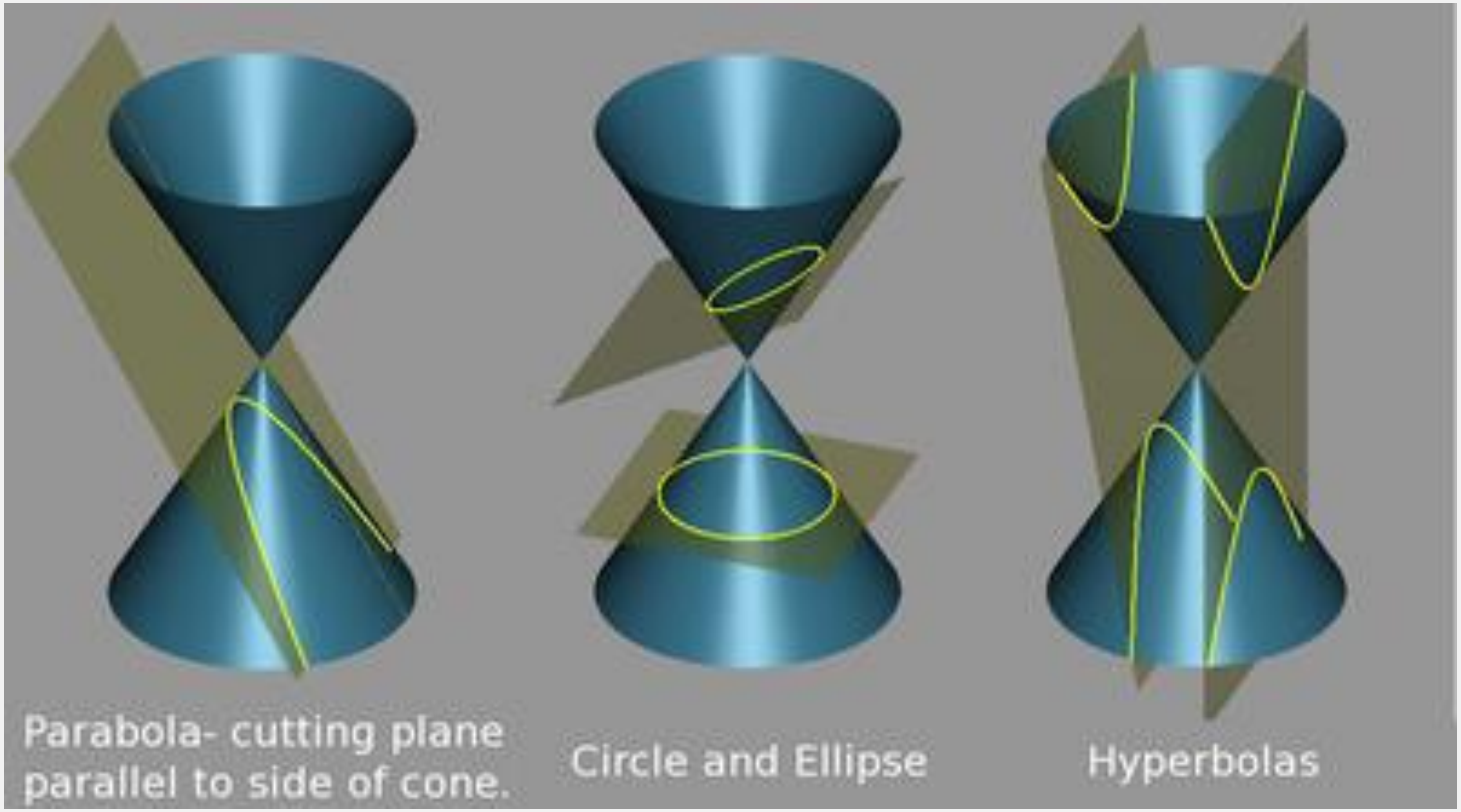
  漸近線 $y=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}x$.



- 双曲線と漸近線の式から交軸 $2a$ と共役軸 $2\sqrt{b^2-a^2}$ を得る.

円錐曲線

- 楕円, 放物線, 双曲線は円錐を平面で切きると得られる(おうちで証明しよう).
- まとめて円錐曲線と呼ぶ.



Wikimedia より

軌道が円錐曲線であることを確かめよう①

- **宇宙機の座標を** $(x, y) = (r\cos f, r\sin f)$ **とおくと**

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \cos f = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

- $r = \dfrac{p}{1+e\cos f} \Leftrightarrow (1+e\cos f)r = p$ **に代入して**

$$\left(1 + \frac{e}{\sqrt{x^2+y^2}}x\right)\sqrt{x^2+y^2} = p$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow &\quad \sqrt{x^2+y^2} = p - ex \\
\Rightarrow &\quad x^2+y^2 = p^2 - 2pex + e^2x^2 \\
\Leftrightarrow &\quad (1-e^2)x^2 + 2pex + y^2 = p^2.
\end{aligned}$$

- $1-e^2$ **の符号によって場合分けする.**

$$1-e^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq e < 1$$

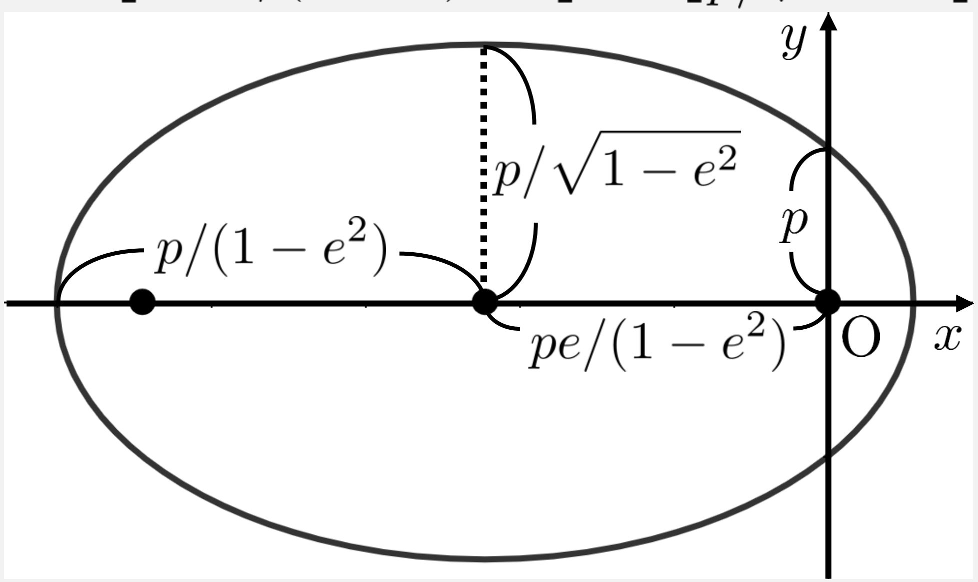
$$1-e^2 = 0 \Leftrightarrow e = 1$$

$$1-e^2 < 0 \Leftrightarrow e > 1.$$

軌道が円錐曲線であることを確かめよう②

- $0 \le e < 1$ **の場合.**

$$
\begin{aligned}
& (1-e^2)x^2 + 2pex + y^2 = p^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 + \frac{2pe}{1-e^2}x + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{1-e^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(x + \frac{pe}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{(1-e^2)^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \left[\frac{x + \{pe/(1-e^2)\}}{p/(1-e^2)}\right]^2 + \left[\frac{y}{p/\sqrt{1-e^2}}\right]^2 = 1.
\end{aligned}
$$

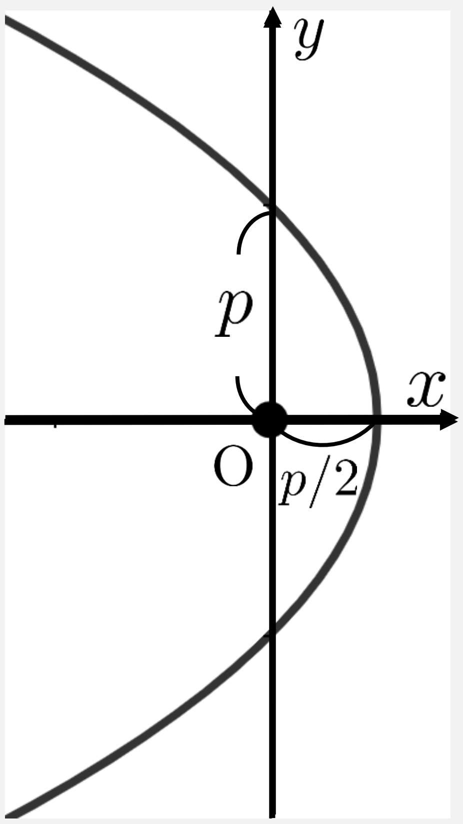


問題:
・焦点の1つが原点
・半直弦が p
を確かめよう.

軌道が円錐曲線であることを確かめよう③

- $e = 1$ **の場合.**

$$
\begin{aligned}
& (1-e^2)x^2 + 2pex + y^2 = p^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 2px + y^2 = p^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x = -\frac{y^2}{2p} + \frac{p}{2}.
\end{aligned}
$$



問題:
・焦点が原点
・半直弦が p
を確かめよう.

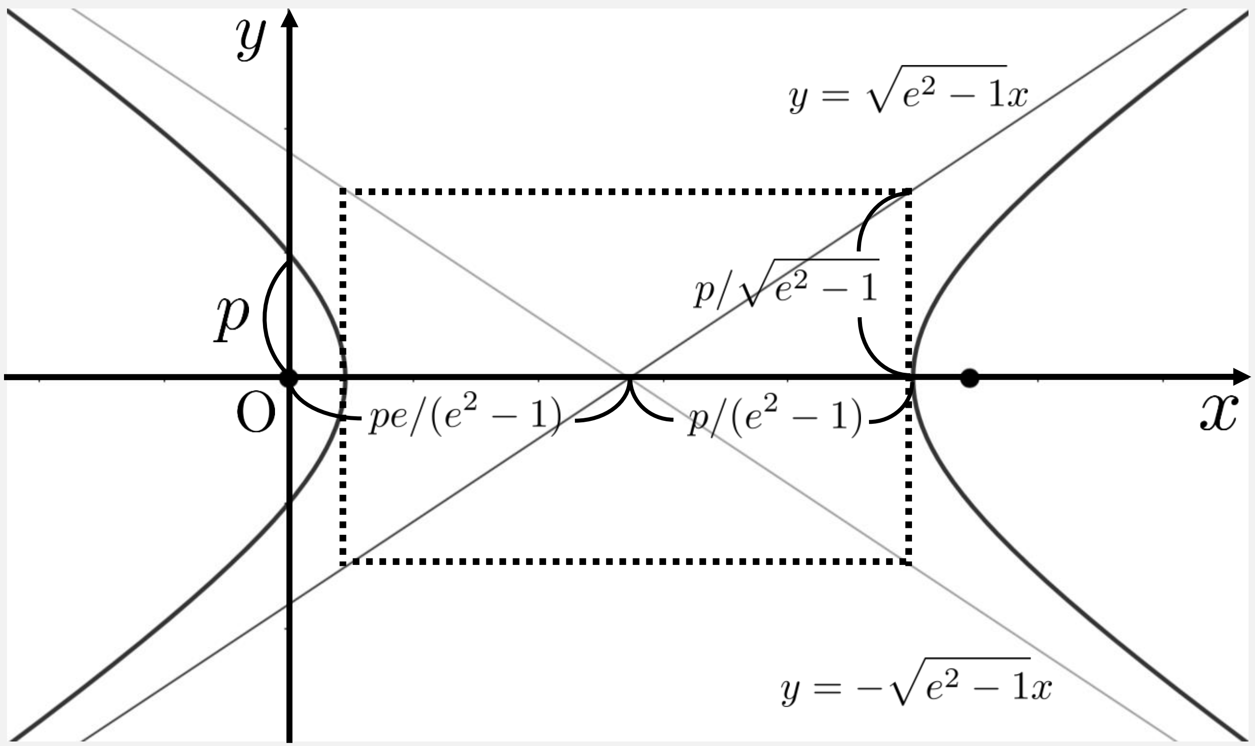
軌道が円錐曲線であることを確かめよう④

- $e>1$ **の場合．楕円のときと同様に変形して**

$$(1-e^2)x^2+2pex+y^2=p^2$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\frac{x+\{pe/(1-e^2)\}}{p/(1-e^2)}\right]^2+\frac{y^2}{p^2/(1-e^2)}=1$$

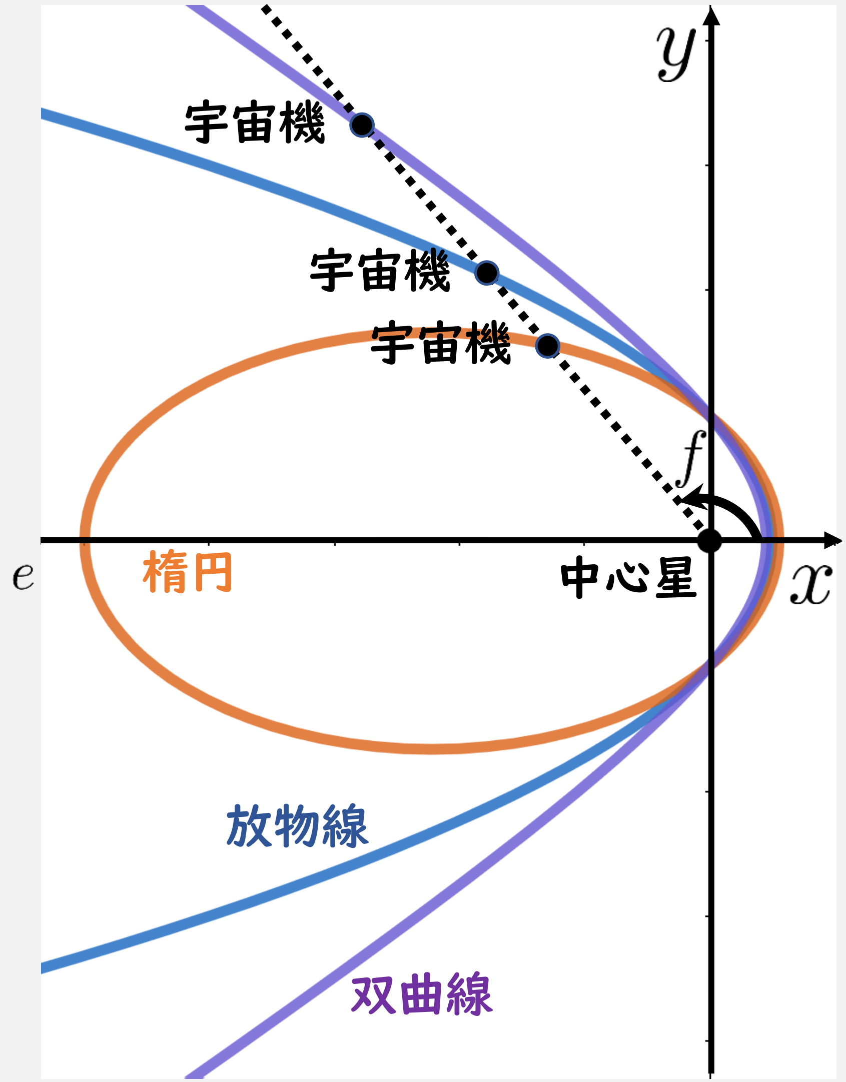
$$\Leftrightarrow\quad \left[\frac{x-\{pe/(e^2-1)\}}{p/(e^2-1)}\right]^2-\left[\frac{y}{p/\sqrt{e^2-1}}\right]^2=1.$$



問題:
・焦点の1つが原点
・半直弦が p
を確かめよう.

軌道が円錐曲線であることを確かめよう⑤

- ケプラー運動する宇宙機の軌道は円錐曲線を描く!



おまけ：摂動

- 現実の宇宙機は，厳密にはケプラー運動をしない．
- 理想的な軌道を乱す「摂動力」が働く．
- 観測値(衛星高度など)から軌道補正を定常的に行う．

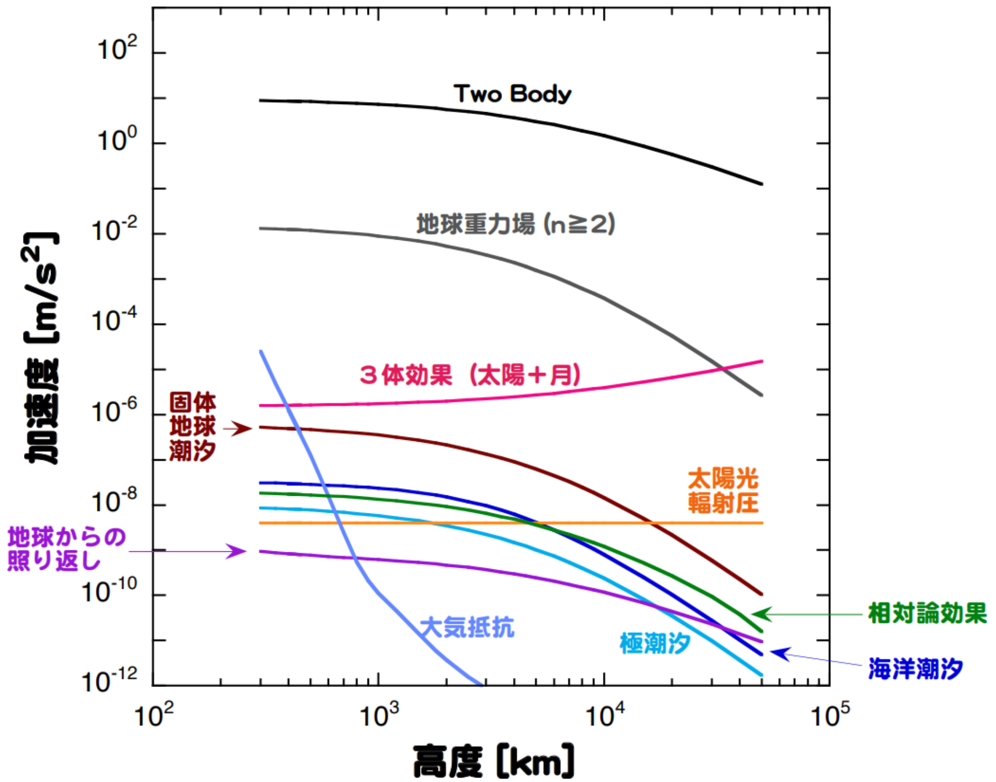


Fig. 2 人工衛星に作用する摂動と高度の関係。Fig. 1 で青い矢印で示した衛星の形状に依存する摂動に関しては、（断面積）／（質量）比を 0.0093 と仮定して計算した。

久保岡(2004) より

精密な軌道を求める場合，地上の重力加速度(約9.8m/s^2)より桁違いに小さい加速度も無視できない

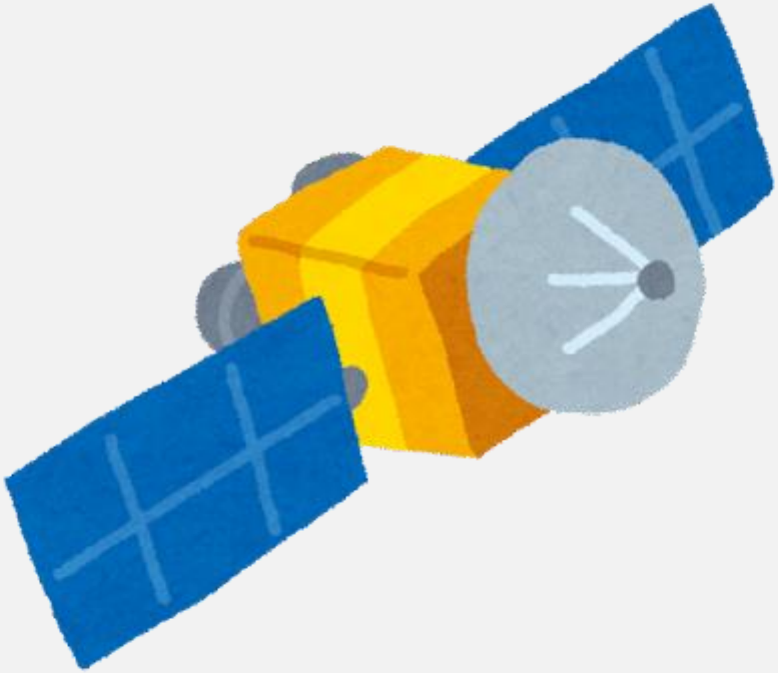
第3章　飛行速度

～～ロードマップ～～

　エネルギー積分を幾何学量で表す.

⇒速度を動径の関数として表す.

⇒宇宙速度



エネルギー積分と幾何学量

- ケプラー運動する宇宙機の離心率の定義(第1章)から

$$e \equiv \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon h^2}{\mu^2}} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\mu^2}{2h^2}(e^2 - 1).$$

- ここで $p \equiv \frac{h^2}{\mu} \Leftrightarrow \frac{\mu}{h^2} = \frac{1}{p}$ より $\varepsilon = \frac{\mu}{2p}(e^2 - 1).$

- エネルギー積分 ε は幾何学量（半直弦 p と離心率 e ）で決まる.

➡ もっと分かりやすい幾何学量で表したい…

楕円軌道のエネルギー積分

- 楕円(半長軸a, 半短軸$\sqrt{a^2-b^2}$)について：

$$\left[\frac{x+\{pe/(1-e^2)\}}{p/(1-e^2)}\right]^2+\left[\frac{y}{p/\sqrt{1-e^2}}\right]^2=1$$ より

$$\begin{cases} a=\dfrac{p}{1-e^2} \\ b=\sqrt{a^2-\left(\sqrt{a^2-b^2}\right)^2}=\sqrt{\{p/(1-e^2)\}^2-\left\{p/\sqrt{1-e^2}\right\}^2}=\dfrac{pe}{1-e^2}. \end{cases}$$

$$\therefore \frac{b}{a}=e.$$

- 半直弦が $p=\dfrac{a^2-b^2}{a}=a\left(1-\dfrac{b^2}{a^2}\right)=a(1-e^2).$
- エネルギー積分は $\varepsilon=\dfrac{\mu}{2p}(e^2-1)=\dfrac{\mu}{2a(1-e^2)}(e^2-1)=-\dfrac{\mu}{2a}.$
- 半長軸さえ分かればエネルギー積分が得られる！

放物線軌道のエネルギー積分

- 放物線について：

$e = 1$ より $\varepsilon = \dfrac{\mu}{2p}(e^2 - 1) = 0.$

・軌道上で運動エネルギーや位置エネルギーが変化しても, それらの合計は常に0.

双曲線軌道のエネルギー積分

- **双曲線(交軸 $2a$, 共役軸 $2\sqrt{b^2-a^2}$)について：**

$$\left[\frac{x-\{pe/(e^2-1)\}}{p/(e^2-1)}\right]^2-\left[\frac{y}{p/\sqrt{e^2-1}}\right]^2=1$$ **より**

$$\begin{cases} a=\dfrac{p}{e^2-1} \\ b=\sqrt{a^2+\left(\sqrt{b^2-a^2}\right)^2}=\sqrt{\{p/(e^2-1)\}^2+\left\{p/\sqrt{e^2-1}\right\}^2}=\dfrac{pe}{e^2-1}. \end{cases}$$

$$\therefore \frac{b}{a}=e.$$

- **半直弦が** $p=\dfrac{b^2-a^2}{a}=a\left(\dfrac{b^2}{a^2}-1\right)=a(e^2-1).$
- **エネルギー積分は** $\varepsilon=\dfrac{\mu}{2p}(e^2-1)=\dfrac{\mu}{2a(e^2-1)}(e^2-1)=\dfrac{\mu}{2a}.$
- **交軸さえ分かればエネルギー積分が得られる！**

軌道上の速度(動径の関数として)①

- **楕円軌道の場合:**
  力学的エネルギー保存則 $\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \varepsilon$ **に** $\varepsilon = -\frac{\mu}{2a}$ **を代入.**

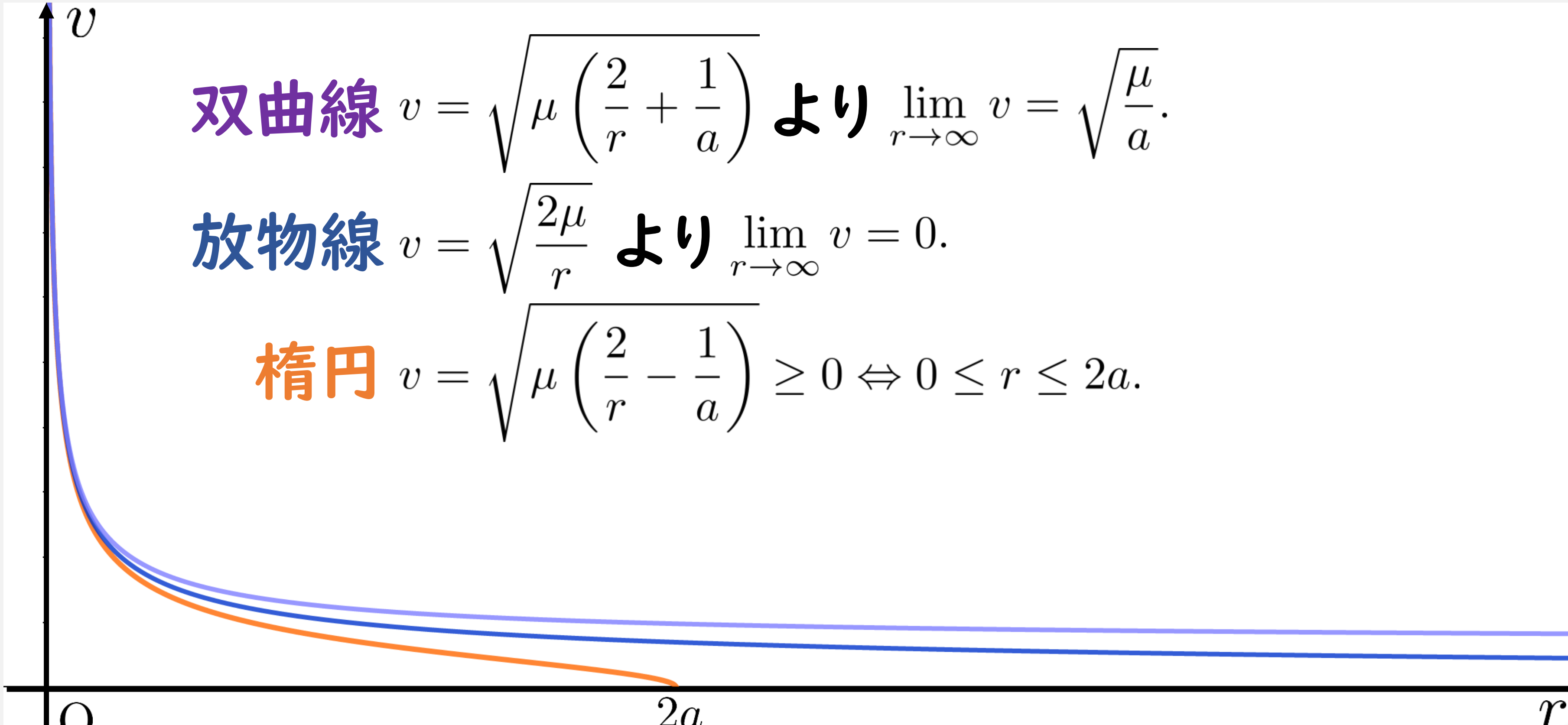
$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \Leftrightarrow v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}.$$

- **放物線軌道の場合:**
  $\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \varepsilon$ **に** $\varepsilon = 0$ **を代入し,** $\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = 0 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}.$

- **双曲線軌道の場合:**
  力学的エネルギー保存則 $\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \varepsilon$ **に** $\varepsilon = \frac{\mu}{2a}$ **を代入.**

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2a} \Leftrightarrow v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right)}.$$

軌道上の速度(動径の関数として)②



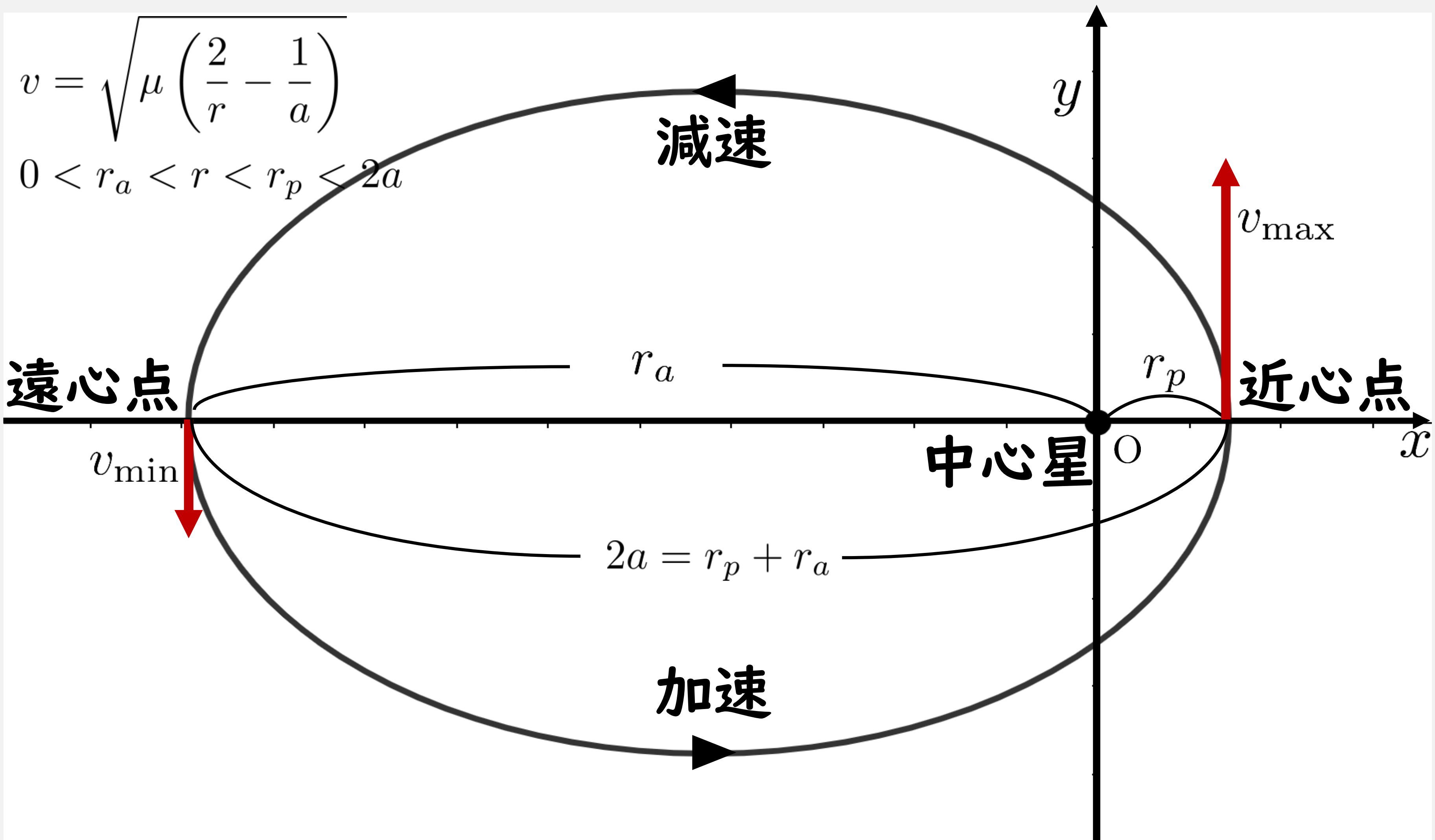
双曲線 $v = \sqrt{\mu\left(\dfrac{2}{r} + \dfrac{1}{a}\right)}$ より $\displaystyle\lim_{r\to\infty} v = \sqrt{\frac{\mu}{a}}.$

放物線 $v = \sqrt{\dfrac{2\mu}{r}}$ より $\displaystyle\lim_{r\to\infty} v = 0.$

楕円 $v = \sqrt{\mu\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{a}\right)} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq r \leq 2a.$

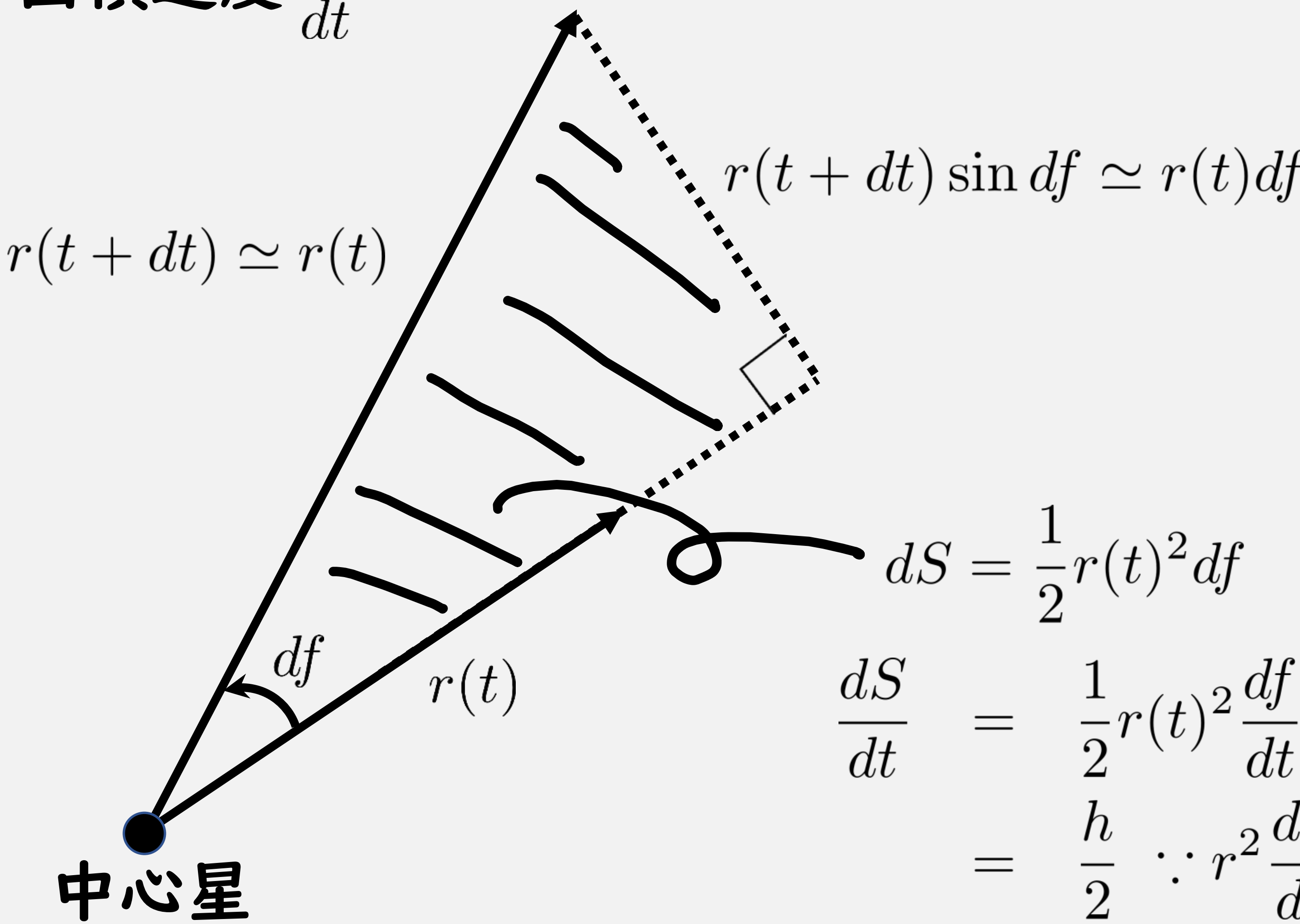
- 双曲線軌道上の宇宙機は常に有限で正の速度を持つ.
- 放物線軌道上の宇宙機は無限遠で静止.

楕円軌道上の速度


$v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$
$0 < r_a < r < r_p < 2a$
減速
y
$v_{\max}$
r_a
r_p
遠心点
近心点
$v_{\min}$
中心星
O
x
$2a = r_p + r_a$
加速

楕円軌道上の面積速度

- 面積速度 $\frac{dS}{dt}$



$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \frac{1}{2} r(t)^2 \frac{df}{dt} \\
&= \frac{h}{2} \quad \because r^2 \frac{d\theta}{dt} \equiv h
\end{aligned}
$$

楕円軌道上の公転周期

- **面積速度** $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{h}{2}$ **に** $p \equiv \dfrac{h^2}{\mu} \Leftrightarrow h = \sqrt{\mu p}$ **(負号は座標系の設定で消せる)を代入して** $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{\sqrt{\mu p}}{2}.$

- **公転周期** T **＝(楕円の面積)÷(面積速度)**

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{\pi a \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{\mu p}/2} \\
&= \frac{\pi a \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{\mu \frac{a^2 - b^2}{a}}/2} \quad \because p = \frac{a^2 - b^2}{a} \\
&= 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}.
\end{aligned}
$$

円軌道と第一宇宙速度

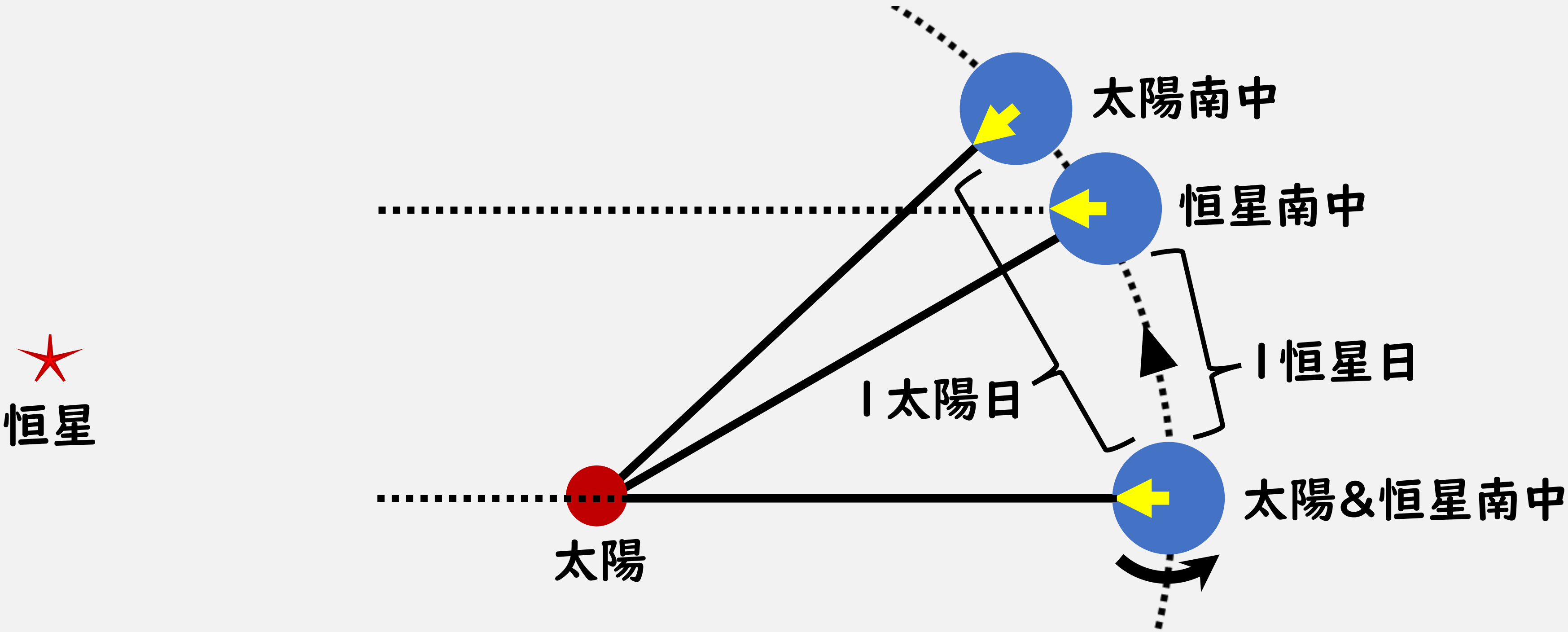
- 楕円軌道の特別な場合が円軌道
- $a = r = \mathrm{const.}$ とおけば良いから，円軌道上の速度は

$$v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r}\right)} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$$ (円速度).

- 問題：円軌道で地球を周回する人工衛星の最高速度(第一宇宙速度)を求めよ．ケプラー運動を仮定し，$\mu = 3.986004 \times 10^5\ \mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$ ，赤道半径 $6378.137\ \mathrm{km}$ とする．

恒星日と静止衛星

- 恒星日：地球の自転周期. 地球から見て南中した無限遠の恒星が, 再び南中するまでの時間. 23 h56 m4.905 s.

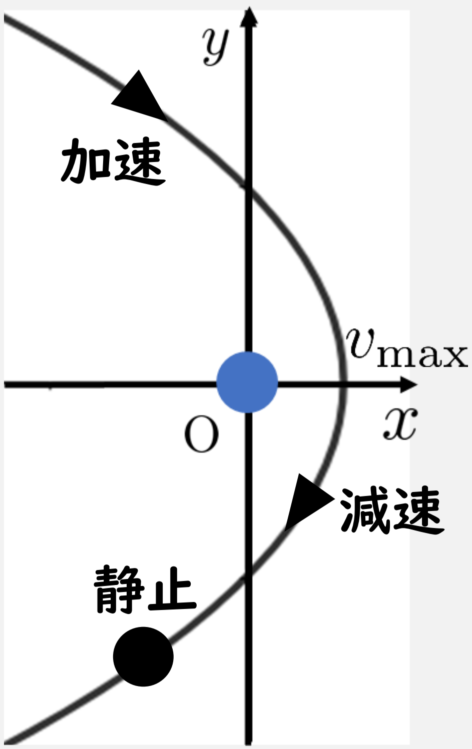


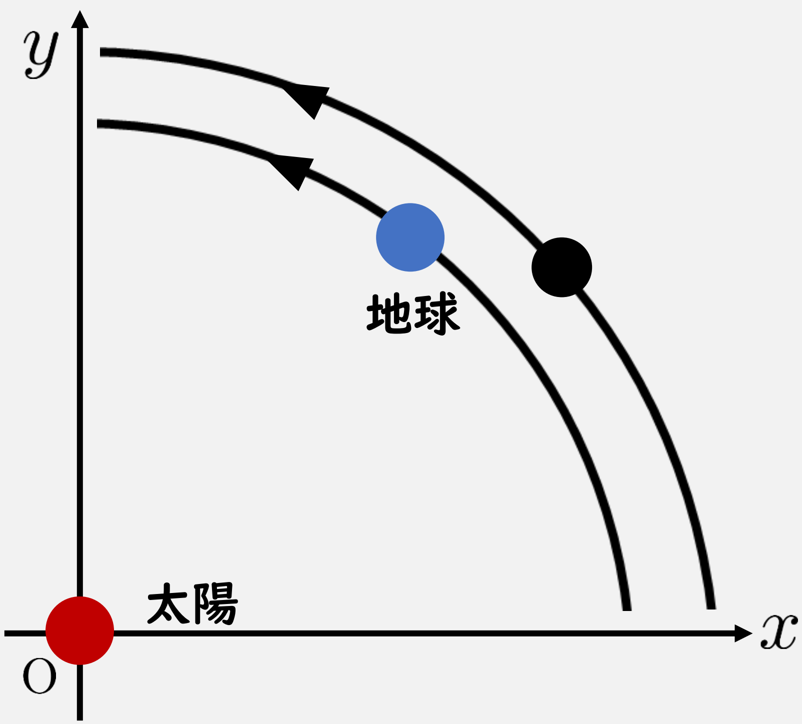
- 問題：地上から静止して見える人工衛星(静止衛星)の高度を求めよ.

放物線軌道と第二宇宙速度①

- $v = \sqrt{\dfrac{2\mu}{r}}$ より $\displaystyle\lim_{r\to\infty} v = 0.$

・地球を原点にした座標系で，放物線軌道を描く物体はやがて静止するが，太陽を原点とした座標系では地球と共に運動している．





放物線軌道と第二宇宙速度②

- $v = \sqrt{\dfrac{2\mu}{r}}$ は中心星の重力を振り切り得る速度の下限.
- 脱出速度, (中心星が地球なら)第二宇宙速度と呼ぶ.
- 第一宇宙速度を用いて, 地球からの脱出速度は

$$v = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{2} \times (7.905\ \mathrm{km/s}) = 11.180\ \mathrm{km/s}.$$

双曲線軌道と第三宇宙速度

- $v = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right)}$ より $\lim_{r \to \infty} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \equiv v_\infty$ (双曲線余剰速度).
- 双曲線軌道なら中心星の重力を振り切れる.
- $v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} + v_\infty^2}.$
- 問題：太陽系脱出に最低限必要な, 地表から見た速度(第三宇宙速度)を求めよ.

太陽の標準重力パラメータ	$1.3271244 \times 10^{11}\ \mathrm{km^3/s^2}$
太陽ー地球間距離	$1.4959787 \times 10^{8}\ \mathrm{km}$
地球の標準重力パラメータ	$3.986004 \times 10^{5}\ \mathrm{km^3/s^2}$
地球の平均公転速度	$3.986004 \times 10^{5}\ \mathrm{km^3/s^2}$
地球の赤道半径	$6378.137\ \mathrm{km}$

おまけ：ケプラーの法則

- 以上の議論で，ケプラーの法則が全て導出されている．

- 第一法則：
  惑星は太陽を焦点の1つとする楕円軌道を描く．
- 第二法則：
  惑星ー太陽の線分が単位時間に掃過する面積は一定．
- 第三法則：
  惑星の公転周期の2乗は，軌道長半径の3乗に比例．

次回予告

- 今回の内容では，お兄さんの疑問は解決されていない．

どんな経路？
どれくらい時間かかる？
荷物は何kgまで？

- 飛行時間，ペイロード評価，軌道遷移，軌道設計へ…
- 次回，「たのしい軌道力学入門」．
- 今回の内容を前提にします．

参考文献

- 半揚稔雄著,『惑星探査機の軌道計算入門 宇宙飛翔力学への誘い』, 日本評論社, 2017
- 福島登志夫著,『天体の位置と運動[第2版]』, 日本評論社, 2017
- 久保岡俊宏著, “やさしい軌道力学-人工衛星に作用する摂動-”, 2004.

https://www.eri.u-tokyo.ac.jp/KOHO/HIGHLIGHT/KYODO/2004-W-01/ppr/eri0411-04kubo-oka.pdf
- 前野昌弘著,『よくわかる初等力学』, 東京図書, 2013
- 長沢工著,『天体の位置計算(増補版)』, 地人書館 1985
- 中村滋著,『円錐曲線 歴史とその数理』, 共立出版, 2011
- 薮下信著,『計算物理(Ⅰ)』, 地人書館, 1982